IDENTIFICAÇÃO E PRODUÇÃO DE EXPRESSÕES NUMÉRICAS EM SITUAÇÕES COMBINATÓRIAS POR MEIO DE ÁRVORES DE POSSIBILIDADES

Identification and production of numerical expressions in combinatorial situations through trees of possibility

Juliana Montenegro

Rute Borba

Marilena Bittar

Resumo

O objetivo do presente estudo foi analisar como árvores de possibilidades podem facilitar a identificação e a produção de expressões numéricas em situações combinatórias. Levou-se em consideração a *identificação*, a *conversão* e o *tratamento* realizados por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, bem como os *invariantes* das distintas situações combinatórias. Os participantes responderam um teste de sondagem antes e após sessão de ensino na qual se trabalhou com árvores de possibilidades como representações auxiliares e expressões numéricas como representações de chegada. Os resultados ratificaram a congruência de árvores de possibilidades com enunciados em linguagem natural e com correspondentes expressões numéricas. Conclui-se, assim, que árvores de possibilidades são importantes representações auxiliares na identificação e na produção de expressões numéricas de situações combinatórias.

Palavras-chave: Identificação; Conversão; Tratamento; Situações combinatórias; Representações auxiliares.

Abstract

The aim of the present study was to analyse how trees of possibilities can facilitate the identification and production of numerical expressions in combinatorial situations. The *identification*, *conversion* and *treatment* performed by students in the 5th year of Elementary School were taken into account, as well as the invariants of the different combinatorial situations. The participants answered a probing test before and after a teaching session in which they worked with trees of possibilities as auxiliary representations and numerical expressions as arrival representations. The results confirmed the congruence of trees of possibilities with statements in natural language and with corresponding numerical expressions. It is concluded, therefore, that trees of possibilities are important auxiliary representations in the identification and production of numerical expressions of combinatorial situations.

Keywords: Identification; Conversion; Treatment; Combinatorial situations; Auxiliary representations

Introdução

O estudo da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental tem sido amplamente discutido e recomendado por pesquisadores e em documentos oficiais. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) e na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), tem-se que este conteúdo deve ser introduzido no início da escolarização, com o propósito de solucionar problemas de contagem tais como "[...]combinações, arranjos, permutações"(BRASIL, 1997, p. 40), e, mais especificamente, situações em que se deve "[...] combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra" (BRASIL, 2018, p. 289).

Na perspectiva da Educação Matemática, defende-se que situações combinatórias são desafiadoras e favorecem o uso de uma diversidade de representações simbólicas no ensino e na aprendizagem das mesmas. Justifica-se, desse modo, investigações quanto ao uso de representações diversificadas na resolução das diferentes situações da Combinatória.

Em particular, no presente estudo, questiona-se: Como árvores de possibilidades, por serem mais congruentes com as expressões numéricas do que outras representações, favorecem a identificação de expressões que podem ser solução de problemas combinatórios? Como o uso de árvores de possibilidades, enquanto representação intermediária, possibilita avanços no desempenho dos estudantes na resolução de diferentes situações combinatórias?

Foram utilizadas, como base desse estudo e para responder os questionamentos supracitados, duas teorias que se complementam, conforme defendemos. A Teoria dos Campos Conceituais – TCC (VERGNAUD, 1983) é a primeira dessas teorias e a segunda é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica – TRRS (DUVAL, 1995). Em seção que segue discutimos elementos importantes dessas teorias, utilizados nas análises realizadas, bem como apresentamos justificativa da pertinência da abordagem complementar das mesmas.

Neste texto apresentamos uma análise qualitativa de resultados de Montenegro (2018). No referido estudo, destaca-se a maior congruência de árvores de possibilidades com expressões numéricas, quando comparada com a congruência entre linguagem natural, listagens e expressões numéricas. Buscamos, aqui, discutir como árvores de possibilidades possibilitam maior identificação e mais fácil produção de expressões numéricas em situações combinatórias, as quais possuem propriedades em comum, mas também relações distintas.

Discussão teórica

No que se refere a Vergnaud (1986), sobre campos conceituais, discutiremos, mais especificamente, a importância das *situações*, *invariantes* e *representações* no desenvolvimento conceitual. Este autor destaca que essas três dimensões (S, I, R) precisam ser consideradas simultaneamente na construção de conceitos.

Tomando como base o tripé anunciado na Teoria dos Campos Conceituais, Borba (2016) destaca quatro *situações* combinatórias trabalhadas ao longo da escolarização básica (produto cartesiano, também conhecido como produto de medidas; combinação; arranjo e permutação); indica os *invariantes* que caracterizam essas situações (escolha e ordenação dos elementos e, também, esgotamento das possibilidades), e destaca diferentes *representações* que podem ser utilizadas (desenho, listagem, quadro, árvore de possibilidades, Princípio Fundamental da Contagem - PFC, fórmula, etc.) quando da solução de problemas combinatórios.

Nas situações de *produto de medidas* a escolha se dá entre os elementos de dois ou mais conjuntos e a ordem de escolha dos elementos não gera novas possibilidades. Nas situações de *combinação* e *arranjo* a escolha dos elementos acontece a partir de um conjunto único em que são selecionados alguns elementos, sendo que na *combinação* a ordem de escolha não gera novas possibilidades e no *arranjo* a ordenação indica possibilidades distintas. Nas situações de *permutação* a escolha também acontece a partir de um conjunto único e todos os elementos do conjunto deverão ser utilizados, sendo a ordenação desses elementos o que diferencia uma possibilidade de outra. Para melhor entendimento dos invariantes das situações combinatórias, apresentamos exemplos das distintas situações ao longo do texto.

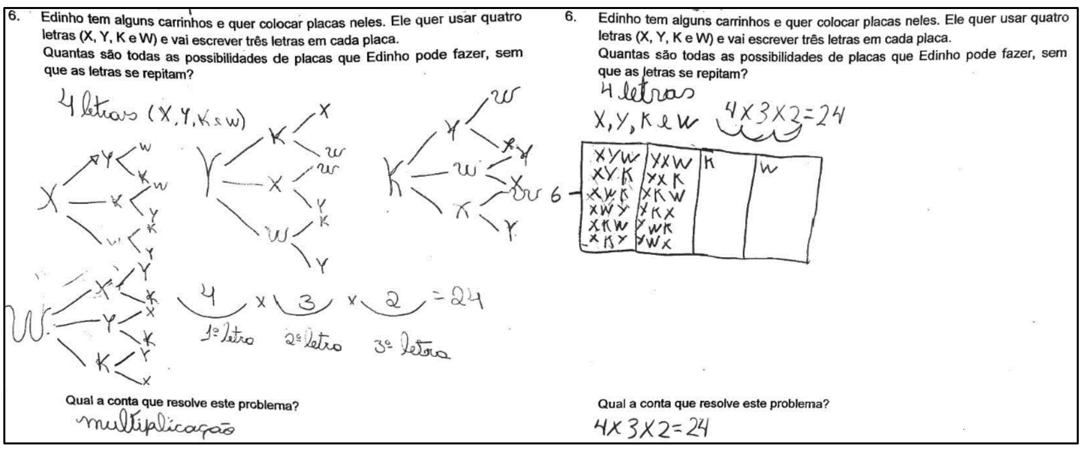
Com o intuito de aprofundar a discussão sobre representações, destaca-se, também com base na pesquisa aqui apresentada, a teoria proposta por Duval (1995). Este autor afirma que apenas por meio das representações semióticas que é possível uma apreensão conceitual, pois, para ele “[...] não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguirmos um objeto de sua representação” (Duval, 2009, p. 14). Defende-se, assim, que seja efetuado um trabalho envolvendo diversas representações para um mesmo objeto matemático, para que o objeto não seja confundido com uma representação específica.

Duval (2009) enfatiza, também, que um registro de representação semiótica deve satisfazer três condições. A primeira dessas condições é que uma representação precisa ser *identificável*, ou seja, deve-se ser capaz de identificar um determinado registro como sendo representação de um objeto específico. Como exemplo dessa primeira condição, tem-se que é possível identificar a árvore de possibilidades como um registro de representação característico de situações combinatórias. A *transformação de conversão* é a segunda condição apontada, destacando-se que um objeto matemático não é representado apenas por um único registro de representação. Desse modo, se faz necessária a conversão de um tipo de representação para outro, como, por exemplo, representar uma situação combinatória por meio da árvore de possibilidades e convertê-la para listagem, para linguagem natural ou para uma expressão numérica, como a resultante da aplicação do Princípio Fundamental da Contagem (PFC). A terceira condição é a *transformação de tratamento* que é uma transformação interna ao registro. Por exemplo, o PFC é um registro simbólico que permite o cálculo do número de possibilidades, portanto, um tratamento em que são utilizados os símbolos (numerais) do próprio registro.

Além disso, o autor da TRRS enfatiza a importância de estudar o fenômeno da congruência entre representações, pois o grau de dificuldade de conversão entre registros está diretamente relacionado à essa congruência. Duval (2009) ressalta que o grau de congruência entre representações é um importante aspecto a ser considerado, pois duas representações podem ser mais ou menos congruentes entre si, a depender de critérios relacionados à *correspondência* e *univocidade semânticas*, bem como à *ordem dessa correspondência* nas representações utilizadas.

A árvore de possibilidades, segundo esses critérios, possui maior congruência com a expressão numérica que pode ser utilizada na solução de um problema combinatório do que a listagem, mesmo sistemática, como se pode observar na Figura 1. Na árvore, os ramos produzidos justificam mais explicitamente a multiplicação realizada, pois os nós iniciais indicam o primeiro termo da expressão numérica (quatro nós na situação exemplificada) e o número dos primeiros ramos indica o segundo termo (três) e o terceiro termo (dois) indica os ramos da terceira etapa de escolha. Assim, os números usados na expressão numérica (4x3x2) estão em correspondência e na mesma ordem com as quantidades representadas na árvore de possibilidades. Já na listagem, os critérios (correspondência, univocidade e ordem) de congruência com a expressão numérica não são explícitos.

Figura 1 - Situação de arranjo resolvida por meio de árvore de possibilidades e de listagem, evidenciando a maior congruência da árvore com a expressão numérica.



Fonte: as autoras.

Duval (2011, p. 124) afirma que "Os fenômenos de não congruência são mais numerosos que os fenômenos de congruência. É isso que faz a riqueza criadora da diversidade de registros". Assim, especialmente para situações em que a representação do enunciado em linguagem natural não é congruente com outros registros, particularmente a linguagem matemática, este autor propõe o conceito de *representações auxiliares de transição*, pois, “Para poder colocar em evidência as correspondências regulares entre as variações de enunciados [...] e as variações de conteúdo no outro registro, é preciso passar por representações auxiliares de transição” (2011, p. 125). Desse modo, como os enunciados de problemas combinatórios são não congruentes com as respectivas expressões numéricas que podem ser usadas em suas soluções, faz-se necessário o uso de representações auxiliares de transição, tais como listas sistematizadas e árvores de possibilidades.

Embora a conversão de enunciados de problemas combinatórios em expressões numéricas – as quais podem representar as multiplicações e divisões necessárias para se chegar ao número total de possibilidades solicitadas – não seja algo fácil, por conta da não congruência entre esses registros (linguagem natural e expressão numérica), nos livros didáticos essa transformação é solicitada como uma tarefa simples, em que o estudante deve realizar diretamente, como atestaram Borba, Azevedo e Bittar (2016a; 2016b). Reconhecemos, entretanto, que essa conversão (linguagem natural – expressão numérica) em situações combinatórias não é simples e, assim, defendemos a necessidade de mais investigações, como a aqui relatada, sobre o papel de representações auxiliares de transição.

Com base nesses pressupostos e constatações, Montenegro (2018) investigou o papel das *identificações* e *transformações de tratamento* e *de conversão* na Combinatória em suas diferentes *situações*, com ênfase nos *invariantes* das situações e suas *representações*. No estudo citado, as análises realizadas indicaram que árvores de possibilidades possuem maior congruência com as expressões numéricas, quando comparadas com as listagens sistemáticas, em todos os tipos de situações combinatórias. No presente texto são analisados qualitativamente protocolos deste estudo, com o objetivo de discutir como árvores de possibilidades apresentam maior congruência com expressões numéricas.

Método

Em seu doutoramento, Montenegro (2018) desenvolveu dois estudos, sendo o objetivo do primeiro investigar a *identificação* de representações, por parte de estudantes do 5º ano de Ensino Fundamental, na conversão de enunciados de situações combinatórias em linguagem natural para listagem ou para árvores de possibilidades e dessas para a expressão numérica. No segundo estudo a autora realizou uma pesquisa de intervenção, também envolvendo crianças do mesmo ano escolar do estudo anterior, com o objetivo de possibilitar, por parte dos estudantes, a *conversão* entre diferentes registros (linguagem natural para expressões numéricas), utilizando como representações auxiliares de transição árvores de possibilidades ou listagens sistemáticas.

Apresentamos, em seguida, análises qualitativas de protocolos dos Estudos 1 e 2 da tese de Montenegro (2018) de 16 crianças de uma escola privada (no Estudo 1) e 39 estudantes (19 no grupo de árvore de possibilidades e 20 no grupo de listagem) de uma escola pública municipal da cidade do Recife (no Estudo 2). Na tese, a autora analisou tanto árvores de possibilidades, quanto listagens. Neste artigo, foi realizado um recorte, uma vez que o objetivo é focar nas árvores de possibilidades pela maior congruência dessas com as expressões numéricas.

Apresentação e análise dos resultados do Estudo 1

No primeiro estudo, as crianças responderam, inicialmente, oito problemas combinatórios, dois de cada tipo de situação (*arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto de medidas*) e em metade dos problemas solicitava-se a identificação da árvore de possibilidades correta para a conversão do enunciado apresentado em linguagem natural e na outra metade a identificação era da listagem. Em um segundo momento, era solicitado que os estudantes identificassem a expressão numérica correta para a resolução da situação.

Alguns alunos apresentaram

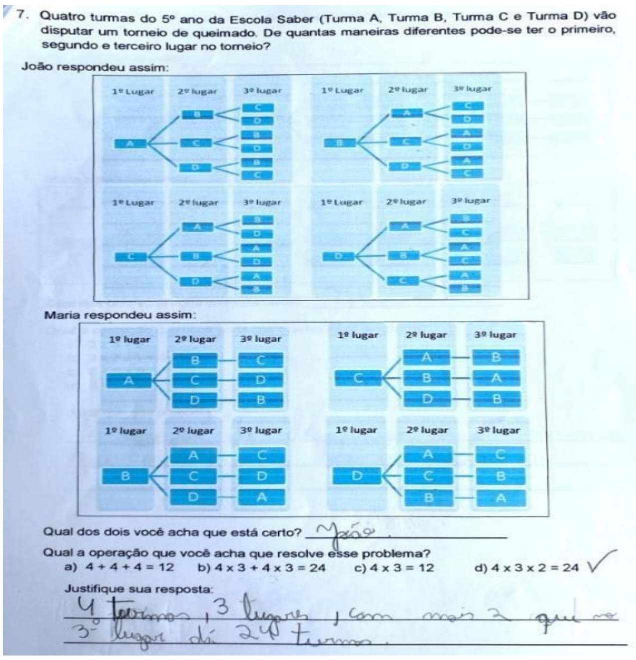
dificuldades em identificar, a partir dos enunciados dos problemas, as correspondentes árvores de possibilidades, o que reforça nossa hipótese de que esta representação não é espontânea ou intuitiva, mas que precisa ser ensinada. Em algumas situações, os estudantes apontavam a árvore de possibilidades correta, mas indicavam uma operação que não correspondia à quantidade de possibilidades apresentados na árvore. Já algumas crianças não identificavam corretamente a árvore de possibilidades, mas indicavam a expressão numérica correta.

Apesar das dificuldades evidenciadas por alguns estudantes, outras crianças conseguiram identificar corretamente as conversões solicitadas. Entretanto, essa conversão não foi igualmente identificada nas distintas situações combinatórias (*arranjos*, *combinações*, *permutações* e *produtos de medida*).

Na Figura 2 tem-se um exemplo de corretas identificações de conversões em uma situação de *arranjo*. Tanto nesse tipo de situação, quanto nas de *permutação* e *combinação*, a expressão numérica que pode resolver o problema não utiliza diretamente ou exclusivamente os números expressos, em linguagem natural, no enunciado. Apenas em *produtos de medida* os números do enunciado são diretamente multiplicados entre si.

Desejava-se o levantamento do número de possibilidades de se obter o 1º, o 2º e o 3º lugar em um torneio envolvendo quatro turmas. O estudante identificou a primeira árvore como a correta e também identificou a expressão numérica correta (4 x 3 x 2), já que havia quatro opções para o primeiro lugar no torneio, três opções para o segundo lugar (uma vez que uma das turmas já obteve o 1º lugar) e duas opções para o terceiro lugar (já que duas turmas ocuparam 1º e 2º lugares). Assim, apesar da não familiaridade com a árvore de possibilidades, essa criança identificou corretamente o registro intermediário (a árvore), bem como o registro final (a expressão numérica).

Figura 2 - Situação de *arranjo* em que a primeira e segunda conversões estão corretas.



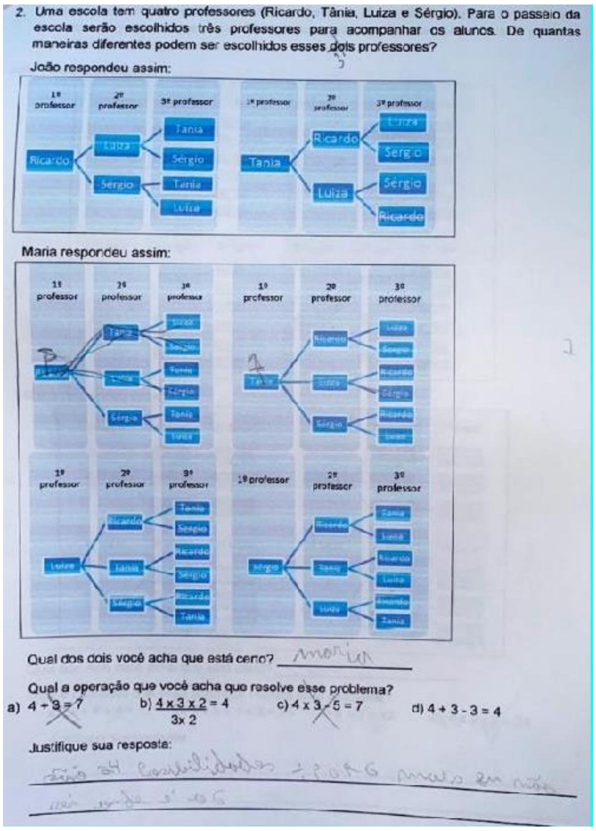
Fonte: Montenegro (2018, p. 129)

Na Figura 3, tem-se um exemplo de identificação de conversões de uma situação de *combinação*. Neste caso era preciso realizar a multiplicação 4 x 3 x 2 e dividir o resultado por seis, já que na combinação a ordem dos elementos não indica possibilidades distintas e nesse problema os casos são iguais seis a seis, ou seja, a permutação dos três elementos escolhidos.

Destaca-se que apenas este aluno conseguiu perceber, sem necessidade de intervenção, a divisão por seis, apesar de ainda apresentar dificuldades em entender essa divisão, uma vez que na justificativa escreveu “são 24 possibilidades ÷ por 6 mas eu não sei onde é o 6”. Isso aconteceu principalmente porque nas situações de *combinação* a divisão pelos casos repetidos não fica evidente na expressão numérica.

Conclui-se, a partir dos dados do Estudo 1, que a identificação dos registros (conversão do enunciado para árvore e conversão dessa para a expressão numérica) é influenciada pela situação tratada (e seus respectivos invariantes), sendo necessário, portanto, a articulação entre a TCC e a TRRS ao se tratar de conversões de situações combinatórias. A TRRS ressalta a importância da conversão e a TCC destaca que as distintas situações devem ser consideradas – e observamos, no caso do conteúdo por nós abordado, que a conversão varia para cada uma das situações combinatórias.

Figura 3 - Situação de *combinação* em que a primeira e a segunda conversão estão corretas.



Fonte: Montenegro (2018, p. 121)

Esse primeiro estudo justificou a necessidade do segundo estudo, de intervenção, em que a árvore de possibilidades foi utilizada como representação intermediária entre os enunciados em linguagem natural e as expressões numéricas. Visou-se investigar mais o papel da árvore como representação intermediária auxiliar.

Estudo 2

No Estudo 2, os estudantes responderam, inicialmente, um teste de sondagem com enunciados em linguagem natural. Solicitava-se que apresentassem uma estratégia de resolução e uma expressão numérica para a solução de oito problemas combinatórios, sendo dois de cada tipo de situação (*arranjo, combinação, permutação* e *produto de medidas*). Nesse teste inicial, os resultados (do número de possibilidades solicitadas) variavam de 4 a

24. Em seguida, as crianças participaram de intervenções em que foram utilizadas árvores de possibilidades ou listagens sistemáticas como representação auxiliar para chegarem na expressão numérica. Por fim, responderam um teste no mesmo formato do teste de sondagem. Neste segundo teste visava-se verificar os avanços obtidos depois da intervenção realizada. A diferença nesse teste final estava no número total de possibilidades – que variou de 6 a 120, como objetivo de verificar quantos estudantes conseguiriam determinar expressões numéricas sem o auxílio da representação intermediária, já que seria impraticável representar uma árvore com número muito elevado de possibilidades.

Foram analisados os desempenhos de 19 estudantes que faziam parte do grupo que participou da intervenção usando árvores de possibilidades como representação auxiliar. Avanços em desempenhos também foram observados no uso de listagens sistematizadas como representação auxiliar, mas, nesse caso, os avanços foram menores do que com árvores de possibilidades.

No pré-teste, os estudantes apresentaram uma média de 1,89 pontos para o levantamento de casos (em um total de 24 pontos possíveis, visto que o acerto total de cada problema era pontuado com 3 pontos[1]). A média de desempenho para a apresentação de uma expressão numérica correta[2], nesse teste inicial, foi de 0,31 pontos.

Esses resultados apontaram uma grande dificuldade em responder as situações combinatórias antes do processo de intervenção. A principal representação espontaneamente utilizada pelos estudantes foi a listagem de possibilidades. Houve tentativas de elaboração de quadros como representação, além de operações de adição e multiplicação e nenhum aluno usou árvore de possibilidades no primeiro teste.

Após a intervenção – usando a árvore de possibilidades como representação auxiliar entre o enunciado (representação de partida) e a expressão numérica (representação de chegada) – os estudantes avançaram significativamente em seus desempenhos. Para o levantamento de possibilidades, apresentaram uma média de 6,11 pontos e, para a expressão numérica, uma média de 4,57 pontos.

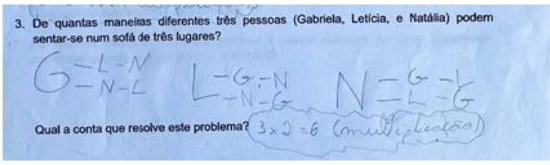
Grande parte dos estudantes usou, no teste final, a árvore de possibilidades como representação auxiliar, entretanto, também houve o uso de expressões sem a necessidade do uso de uma representação auxiliar. Duval (2011, p. 130) chama atenção para a transitoriedade dessas representações intermediárias: “Esse tipo de representação auxiliar é evidentemente de transição. Elas são abandonadas pelos próprios alunos logo que eles compreendem, pois sua utilização lhes parece um procedimento lento e custoso”.

Na Figura 4, tem-se um exemplo de produção de árvore de possibilidades para um problema de *permutação*, referente à posição de três pessoas (Gabriela, Letícia e Natália) em um sofá com três lugares.

[1] O levantamento de possibilidades foi analisado de acordo com os seguintes critérios: pontuação 0 (zero) significava Erro (respostas em branco ou aquelas que não indicavam claramente um raciocínio combinatório na sua resolução); 1 ponto significava Acerto Parcial 1 (respostas com raciocínio combinatório em que se apresentasse menos da metade de possibilidades que responde o problema); 2 pontos significava Acerto Parcial 2 (casos em que foram apresentadas mais da metade de possibilidades, mas sem esgotamento); 3 pontos significava Acerto Total (o total dos pontos eram designados àqueles que conseguiam responder corretamente o problema com esgotamento de todas as possibilidades).

[2] A análise para a expressão numérica que responde o problema também foi realizada com pontuação de 0 a 3 pontos, sendo que 0 (zero) designava respostas em branco ou que apresentavam um cálculo que não correspondia ao usado para responder o problema. Estudantes que escreviam o tipo de operação que deveria ser realizado, mas que não indicavam qual a expressão numérica, nem a resposta numérica, também foram classificados com 0 ponto. O Acerto Parcial 1 era caracterizado quando os alunos indicavam a expressão numérica correta, entretanto erravam o procedimento do cálculo, indicando um número de possibilidades que indicava menos da metade do total. No Acerto Parcial 2, os alunos erravam o procedimento, mas indicavam como resposta um número de possibilidades igual ou superior à metade do total de possibilidades. Assim, os alunos acertavam o que Vergnaud (1983) chama de cálculo relacional, mas erravam o cálculo numérico; ou ainda, tinham dificuldade no tratamento dentro do próprio registro, como apontado por Duval (2012). Também foram encontrados acertos parciais com generalização incompleta de possibilidades. Os 3 pontos foram designados para os que indicavam a expressão numérica correta, seja ela por meio de uma generalização de possibilidades ou pelo Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

Figura 4 - Situação de *permutação* do pós-teste resolvida corretamente pelo Aluno 2, por meio de árvore de possibilidades e expressão numérica.

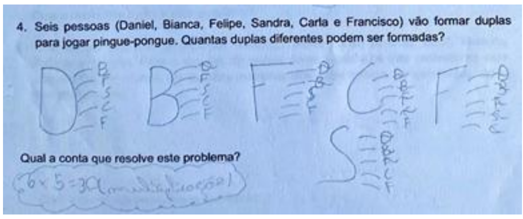


Fonte: autoras da pesquisa

O Aluno 2 produziu uma árvore, destacando o primeiro nó de cada ramo com as letras iniciais de cada uma das pessoas enumeradas no enunciado:'G' para Gabriela; 'L' para Letícia e 'N' para Natália. Cada nó inicial representa quem sentará na primeira posição do sofá. A partir desta escolha, os ramos da árvore indicam o que pode acontecer com a segunda e, em seguida, com a terceira posição no sofá. Como há três possibilidades para a primeira posição e a partir disso sobram dois assentos no sofá que, permutando a ordem resulta em duas possibilidades, a expressão numérica que indica o total de possibilidades é 3 x 2 = 6, que foi corretamente encontrada pelo estudante. Vemos assim que a mobilização da representação auxiliar intermediária árvore de possibilidades possibilitou que a criança chegasse à expressão desejada.

Esse mesmo aluno foi capaz de utilizar, de modo diferenciado, a árvore de possibilidades em uma situação de *combinação* (como se pode observar na Figura 5). O estudante construiu a árvore com os seis nós iniciais (representando Daniel, Bianca, Felipe, Sandra, Carla e Francisco) e verificou que seriam 6 x 5 as possibilidades, mas percebeu que os casos repetidos precisam ser desconsiderados (pois as duplas são iguais duas a duas,ou seja, Daniel e Bianca é a mesma dupla que Bianca e Daniel, por exemplo) e os riscou para eliminar tais possibilidades, conforme realizado na intervenção. Entretanto, na expressão numérica não dividiu por dois, para que não fossem contados os casos repetidos. Observou-se, assim, que, para esse aluno, como para os demais, a conversão de árvores para expressões numéricas se mostrou mais difícil nas situações de *combinação*, do que nas de *arranjo*, *permutação* e *produto de medidas*.

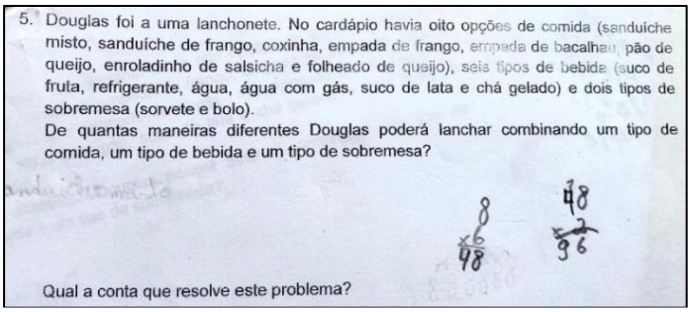
Figura 5 - Situação de *combinação* do pós-teste resolvida pelo Aluno 2, por meio de árvore de possibilidades correta e expressão numérica incorreta.



Fonte: autoras da pesquisa

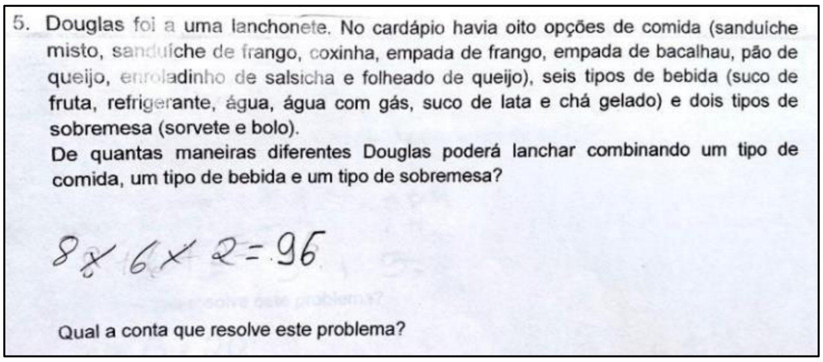
Nos problemas da segunda parte do pós-teste, em que o número de possibilidades da resposta era maior (entre 56 e 120 possibilidades), os estudantes apresentaram melhores desempenhos na situação de *produto de medidas*. Em alguns casos, não apresentaram uma representação intermediária, indicando duas multiplicações ou uma expressão única, como pode ser observado nas Figuras 6 e 7. Desse modo, as árvores de possibilidades como representações auxiliares cumpriram seu papel transitório, pois no teste final alguns alunos resolveram os problemas diretamente por expressões numéricas, não necessitando das árvores como representações intermediárias.

Figura 6 - Situação de *produto de medidas* do pós-teste resolvida corretamente pelo Aluno 9, por meio de duas operações de multiplicação.



Fonte: autoras da pesquisa

Figura 7 - Situação de *produto de medidas* do pós-teste resolvida corretamente pelo Aluno 7, por meio de uma única expressão numérica.


5. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio havia oito opções de comida (sanduíche misto, sanduíche de frango, coxinha, empada de frango, empada de bacalhau, pão de queijo, enroladinho de salsicha e folheado de queijo), seis tipos de bebida (suco de fruta, refrigerante, água, água com gás, suco de lata e chá gelado) e dois tipos de sobremesa (sorvete e bolo).
De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?

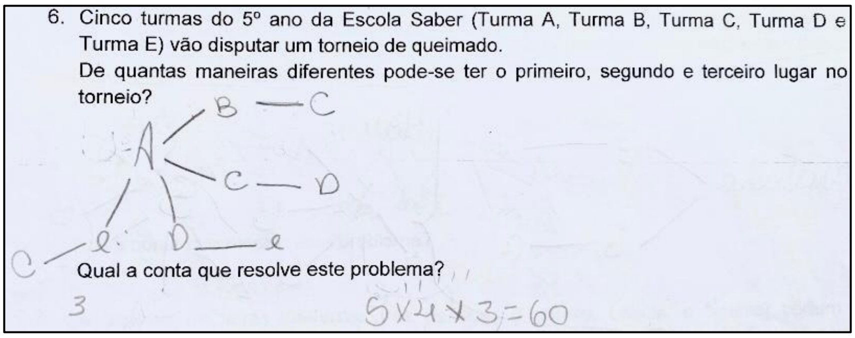
8 x 6 x 2 = 96

Qual a conta que resolve este problema?

Fonte: autoras da pesquisa

Nas situações de *arranjo* e *permutação*, alguns estudantes indicaram uma árvore de possibilidades parcial e, em seguida, realizaram uma multiplicação, como é possível observar na Figura 8. O aluno iniciou a ramificação com a Turma A e indicou que se essa turma tirasse o primeiro lugar no torneio, haveria quatro possibilidades de segundo lugar (Turmas B, C, D ou E). Para terceiro lugar, se A for primeiro lugar e B segundo lugar, tem-se apenas três opções restantes: Turmas C, D e E. Com apenas essa representação parcial da árvore de possibilidades, o aluno chegou à expressão numérica correta para a resolução do problema, ou seja, 5 x 4 x 3 = 60. Dessa forma, demonstrou-se a utilidade da árvore de possibilidades como representação intermediária, mesmo quando não representada completamente.

Figura 8 - Situação de *arranjo* do pós-teste resolvida corretamente pelo Aluno 8, por meio de árvore de possibilidades parcial e expressão numérica.


6. Cinco turmas do 5º ano da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C, Turma D e Turma E) vão disputar um torneio de queimado.
De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

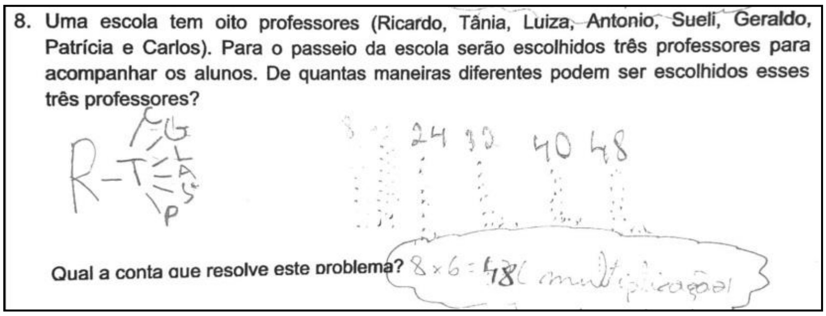
Qual a conta que resolve este problema?

5x4x3=60

Fonte: Montenegro (2018, p. 179)

Em contrapartida, na Figura 9 é possível observar uma árvore de possibilidades parcial como representação intermediária para responder uma situação de *combinação*. O estudante escolheu um dos elementos para a primeira escolha solicitada e mais um elemento para a segunda escolha, restando seis elementos para a terceira escolha. Desse modo, ficam faltando outros sete elementos para a segunda escolha. Na generalização de possibilidades, o estudante deveria indicar os oito elementos para a primeira escolha, multiplicar por sete elementos para a segunda, e por seis elementos da terceira, para, em seguida, dividir pelo número de casos repetidos entre si. Nesta situação, o estudante realizou uma generalização de possibilidades incompleta, uma vez que multiplicou os oito elementos da primeira escolha pelos seis elementos da terceira escolha, de modo que não multiplicou pelos elementos da segunda escolha e não dividiu pelos casos repetidos. Percebe-se, com isso, a maior dificuldade com a resolução das situações de *combinação*, uma vez que a árvore de possibilidades parcial não foi suficiente para que o estudante identificasse os casos repetidos e realizasse uma expressão numérica correta.

Figura 9 - Situação de *combinação* do pós-teste resolvida incorretamente pelo Aluno 2, por meio de árvore de possibilidades parcial e expressão numérica.



8. Uma escola tem oito professores (Ricardo, Tânia, Luiza, Antonio, Sueli, Geraldo, Patrícia e Carlos). Para o passeio da escola serão escolhidos três professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses três professores?

R – T

24 32 40 48

Qual a conta que resolve este problema? 8 × 6 = 48 (multiplicação)

Fonte: as autoras

Neste estudo buscamos refletir, por meio das análises realizadas, sobre a importância das árvores de possibilidades como representações intermediárias, o que raramente é explorado nas variadas situações combinatórias. Destacamos que cada uma das situações, com seus invariantes específicos, determinam uma maneira de produzir esta representação.

A conversão entre a linguagem natural e a expressão numérica foi favorecida pela mobilização da árvore de possibilidades, que funcionou como representação auxiliar. Estes resultados indicam a pertinência e importância da articulação entre as duas teorias adotadas neste estudo –TCC (VERGNAUD, 1983); TRRS (DUVAL, 1995).

A análise da intervenção realizada permite inferir que o raciocínio combinatório dos estudantes pode ser desenvolvido por meio do trabalho com os invariantes das distintas situações combinatórias (BORBA, 2016), e pelo uso de representações diversificadas, principalmente árvores de possibilidades, dado seu grau de congruência com os enunciados em linguagem natural e com as expressões numéricas.

Conclusões

Neste texto, teve-se como objetivo analisar qualitativamente os resultados de Montenegro (2018), em particular, os usos, por alunos do Ensino Fundamental, de árvores de possibilidades e expressões numéricas. Buscou-se analisar como árvores de possibilidades podem possibilitar maior identificação e melhor produção de expressões numéricas em situações combinatórias, uma vez que se caracterizam como uma representação própria da Combinatória.

Nesse sentido, em um primeiro estudo foi proposto um teste em que fosse realizada – a partir de enunciados de problemas combinatórios – a identificação de árvores, listagens e expressões numéricas. Em um segundo estudo, foi realizado um teste de sondagem, e, após um processo de intervenção usando estas representações como auxiliares, foi realizado um teste de verificação dos efeitos do ensino. Na intervenção, foram trabalhadas duas representações auxiliares (árvore de possibilidades e listagem sistemática) e uma representação de chegada (expressão numérica), além do enunciado em linguagem natural como representação de partida. Sobre isso, Vergnaud (1996, p.184) enfatiza que "[...] as representações simbólicas têm justamente a vantagem de dar uma ajuda à resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão exige várias etapas".

Destaca-se que os estudantes indicaram diversas estratégias de resolução dos problemas combinatórios, apresentando desde erros, passando por acertos parciais até os acertos totais. Os erros e acertos parciais indicam possíveis interpretações equivocadas sobre as situações combinatórias ou, ainda, caminhos que, se discutidos com mais atenção, podem chegar aos acertos totais que apresentam indícios do raciocínio mobilizado pelos estudantes, principalmente após um processo de intervenção de ensino específico.

Duval (2011, p.121) destaca que a "[...] variação de congruência ou não congruência é uma das maiores causas da incompreensão ou dos erros de interpretação dos enunciados do problema para os alunos". Assim, no presente estudo, a árvore de possibilidades se caracterizou como uma representação intermediária importante pela maior congruência entre as representações de partida (linguagem natural) e de chegada (expressões numéricas). Isso porque, diante dos resultados apresentados, fica evidente como os nós e os ramos produzidos nesta representação favorecem a adequação aos três critérios de congruência estabelecidos por Duval (2009) – correspondência semântica, univocidade semântica e ordem da organização das unidades significantes. Desse modo, a árvore de possibilidades permite melhor identificação do enunciado e da expressão numérica correspondentes, bem como, utilizada como representação auxiliar, possibilita avanços na resolução de diferentes situações combinatórias.

Os resultados do presente estudo reforçam a defesa de que o raciocínio combinatório pode ser desenvolvido ao longo de toda a escolarização básica. Defende-se também que a árvore de possibilidades seja utilizada como representação auxiliar transitória, de modo que auxilie na compreensão de expressões numéricas a serem usadas em soluções de problemas envolvendo variadas situações combinatórias.

Referências

BORBA, R. Antes cedo do que tarde: o aprendizado da Combinatória no início da escolarização. **Anais...** Encontro de Combinatória, Estatística e Probabilidade dos Anos Iniciais1º ENCEPAI. Recife-PE. 2016. p. 1-15.

BORBA, R.; AZEVEDO, J.; BITTAR, M. Representações semióticas e situações combinatórias em livros didáticos dos anos iniciais. **Anais...** XII Encontro Nacional de Educação Matemática – XII ENEM – Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016a. p. 1-12.

BORBA, R.; AZEVEDO, J.; BITTAR, M. Brazilian primary school textbooks: symbolic representations in combinatorial situations. **Proceedings...** 13th International Congress on Mathematical Education – ICME 13. Hamburg, 24-31July 2016b.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática.1º e 2º ciclos. Brasília, DF,1997.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2018.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**. Berna: Peter Lang. 1995.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano:** Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**.** (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels). (FascículoI)/ Raymond Duval. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira - São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Ver e ensinar Matemática de outra forma – Entrar no modo matemático de pensar:** os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266 - 297, 2012.

MONTENEGRO, J. A. **Identificação, conversão e tratamento de registros de representações semióticas auxiliando a aprendizagem de situações combinatórias**. 2018. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: Lesh, R. & Landau, M. (Eds.).

Acquisition of mathematics: Concepts and processes. New York: Academic Press, 1983. p. 128-175.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo:as estruturas aditivas.**Análise Psicológica,1**. 1986, p. 75-90.

VERGNAUD,G. A Teoria dos Campos Conceptuais.In.BRUM,Jean,(org.)

Didáctica das Matemáticas. Horizontes Pedagógicos, Lisboa, 1996. p. 155-191.

Juliana Montenegro: Doutora em Educação Matemática pela UFPE, Professora Adjunta da UFPE, Recife – PE, juliana.azevedo2@ufpe.br

Rute Borba: PhD pela Oxford Brookes University, Professora aposentada da UFPE, Recife – PE, resrborba@gmail.com

Marilena Bittar: Doutora em Didática da Matemática pela Universidade Joseph Fourier, Professora Titular Sênior da UFMS, Campo Grande – MS, marilenabittar@gmail.com