

AVALIANDO O CONHECIMENTO DE PROPRIEDADES DA MEDIANA E MÉDIA DE ALUNOS DO SEGUNDO ANO DO ENSINO MÉDIO NO BRASIL

Assessing the knowledge of median and average properties of high school students in Brazil

Ailton Paulo de Oliveira Júnior

José Antônio Fernandes

Sandra Salerno

Resumo

No presente artigo estuda-se o conhecimento de alunos brasileiros do Ensino Médio sobre propriedades da mediana e da média que derivam de transformações dos dados ou de afirmações enunciadas. Implementou-se um estudo quantitativo, de tipo descritivo, em que participaram 116 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública do município de São Paulo. Perguntou-se sobre a alteração da mediana e da média ao adicionar-se um valor constante a todos os dados, sobre se a mediana diminui/aumenta/mantém-se ao acrescentar um ou dois dados em certas condições e se certas afirmações eram verdadeiras ou falsas. Em termos de resultados, em geral, os alunos revelaram muitas dificuldades nos itens abertos, enquanto nos itens fechados os alunos tiveram um melhor desempenho. Conclui-se que os alunos têm um conhecimento conceitual da mediana e da média limitado, devendo ser-lhe dada mais atenção no ensino.

Palavras-chave: Conhecimento de Estatística; Propriedades da mediana e média; Alunos do 2.º ano do Ensino Médio

Abstract

In this article, we study the knowledge of Brazilian high school students about the properties of the median and the mean that derive from data transformations or from stated statements. A quantitative, descriptive study was implemented, in which 116 students from the 2nd year of high school participated in a public school in the city of São Paulo. Questions were asked about the change in median and mean when adding a constant value to all the data, about whether the median decreases/increases/stays when adding one or two pieces of data under certain conditions, and whether certain statements were true or not. false. In terms of results, in general, students revealed

many difficulties in open items, while in closed items students performed better. It is concluded that students have a limited conceptual knowledge of the median and the mean, which should be given more attention in teaching.

Keywords: Knowledge of statistics; Median and Mean properties; Mean properties; 2nd year high school students

Introdução

A importância das medidas de tendência central, em que se incluem a mediana e a média, é reconhecida nos currículos escolares dos diferentes países. No caso específico do Brasil, nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 2002), documento de referência brasileiro até a publicação da Base Nacional Comum Curricular – BNCC em 2018, nos conteúdos voltados à Estatística para o Ensino Médio, é indicado a análise de dados considerando: média, mediana, moda, variância e desvio padrão.

Considerando a BNCC (BRASIL, 2018), atual documento norteador curricular brasileiro, na competência específica 3 para o Ensino Médio, deve-se utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. Especificamente, em relação aos elementos constantes desse texto, deve-se resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central, entre elas, a média e a mediana.

Dessa forma, quando é indicado que ao resolver problemas deve-se interpretar as medidas de tendência central como a média e a mediana, abre-se espaço para considerações sobre o seu comportamento quando é analisado o comportamento dos dados, bem como discutir e compreender as suas propriedades.

Desde a sua introdução, à semelhança de outros conceitos matemáticos, as medidas de tendência central devem ser exploradas numa dupla vertente, procedimental e conceitual (HIEBERT; LEFEVRE, 1986). Relacionar as estatísticas permite estudar outros conceitos, como seja a simetria, a correlação e regressão lineares ou outros conceitos mais avançados, enquanto a interpretação permite usar a Estatística para responder a situações-problema da realidade, pois é necessário atribuir significado a esses valores no contexto dessas situações (BATANERO, 2013).

Estudos realizados por Batanero (2000) fornecem evidências de que os alunos em geral não apresentam uma compreensão adequada das medidas de tendência central; em particular, na clareza dos algoritmos de cálculo que devem ser usados dependendo da estrutura dos dados (agrupados e não agrupados), bem como das suas propriedades.

No âmbito do contexto antes referido, no presente artigo investiga-se o conhecimento de alunos do 2.º ano do Ensino Médio sobre propriedades da média e da mediana. Mais especificamente, trata-se de propriedades inerentes a estas estatísticas ou que derivam de transformações dos dados.

Além das razões invocadas anteriormente, a pertinência do presente estudo também decorre da centralidade dos conceitos de média e mediana no estudo e na aplicação da Estatística.

Além disso expomos as seguintes considerações quando avalia-se o comportamento da média e da mediana. Para a média apresentamos os seguintes aspectos a serem considerados: 1) Cada conjunto de dados apresenta um valor médio; 2) Ao avaliar a média, todos os valores são incluídos; 3) Um conjunto de dados tem apenas uma média, sendo um valor único. Para a mediana, temos que: 1) Há apenas uma mediana para um conjunto de dados; 2)

Não é afetada por valores muito grandes ou muito pequenos; 3) Pode ser obtido para dados de razão, intervalo e nível ordinal (exceto nominal).

Consideramos que a mediana não possui propriedades que lhe permitam intervir em desenvolvimentos algébricos como a média aritmética, porém, possui propriedades que destacam certas qualidades de um conjunto de dados, o que não ocorre com a média aritmética que é um valor que suprime as individualidades. Em vez disso, a mediana destaca os valores individuais.

Ainda podemos considerar que a mediana: 1) Tem a vantagem de não ser afetada por observações extremas, pois não depende dos valores que a variável assume, mas da ordem deles; 2) Para o cálculo da mediana é importante que os valores sejam ordenados do menor para o maior; 3) Sua aplicação é limitada, pois considera apenas a ordem hierárquica dos dados e não alguma propriedade dos dados, como a média aritmética.

Esse estudo ainda se sustenta pela preocupação indicada por Sousa (2002) ao destacar que a não exigência de pré-requisitos para a aprendizagem dos conceitos estatísticos implica em dificuldades de aprendizagem por parte dos alunos, além do que tem-se verificado em relação aos erros conceituais apresentados pelos alunos quando do tratamento das medidas de tendência central.

Assim, em termos de estruturação do artigo, após a apresentação desta introdução, seguem-se tópicos referentes ao enquadramento teórico, em que se reveem estudos relacionados com este estudo, a metodologia, onde se especificam os participantes e procedimentos metodológicos adotados, a apresentação de resultados do estudo e, por último, as conclusões, onde apresenta-se os principais resultados do estudo e se extraem algumas implicações.

Enquadramento teórico

Partindo da consideração de que a média aritmética é um valor “típico” ou “representativo” dos dados, Campbell (1974) observa que, devido a isso, há uma tendência de colocar a média no centro do intervalo da distribuição dos dados,

propriedade que só é válida para distribuições simétricas.

Por outro lado, segundo Alveal, Fuentes e Rubilar (2016), quando a distribuição dos dados é muito assimétrica (assimetria positiva ou negativa), a média aritmética desloca-se para um dos extremos ou caudas da distribuição, ou seja, é afetada por observações extremas e neste caso a mediana ou a moda seria um valor mais representativo do conjunto de dados, desde que a distribuição fosse unimodal.

Nesse mesmo sentido, Russell e Mokros (1991) afirmam as seguintes habilidades que os alunos devem adquirir: 1) Dado um conjunto de dados, entender a necessidade de utilizar um valor central e escolher o mais adequado; 2) Construir um conjunto de dados que tenha uma dada média; 3) Compreender o efeito que uma alteração total ou parcial dos dados tem nas médias (média, mediana ou moda).

Outro operador que atribui um valor numérico a um conjunto de dados é a mediana, da qual existem diferentes definições equivalentes sendo uma delas “a média central de uma série de dados ordenados por magnitude” (BATANERO, 2000), o que leva os alunos a pensarem que equivale à média aritmética, gerando dificuldades conceituais.

Alveal, Fuentes e Rubilar (2016) completam dizendo que outra dificuldade está processualmente em seu cálculo, pois o algoritmo não é único e depende do tipo de informação, da forma de apresentação dos dados e até mesmo do número de observações. No entanto, a mediana sempre pode ser obtida para dados quantitativos, bem como na presença de dados qualitativos ordinais, situação que não ocorre com a média aritmética. Dentre as propriedades algébricas podemos citar que a mediana não satisfaz a condição de fechamento, associatividade, existência de elemento neutro e elemento inverso, mas é comutativa. Em suma, um conjunto de dados juntamente com a operação mediana não satisfaz os axiomas de um grupo algébrico.

Dessa forma, considerando estudos realizados sobre as medidas de tendência central, foco do presente estudo, a partir da revisão de vários estudos, Jacobbe e Carvalho (2011) relatam dificuldades dos alunos, sendo que especificamente nos

estudos de Boaventura e Fernandes (2004) e de Fernandes e Barros (2005) verificou-se que as dificuldades eram mais acentuadas no caso da mediana e da média, e menos acentuadas no caso da moda.

Em Boaventura e Fernandes (2004) com alunos portugueses do 12.º ano, portanto de nível escolar próximo daqueles que participam do presente estudo, salientaram-se dificuldades na compreensão das propriedades da mediana e média e na atribuição de significado às medidas de tendência central.

Strauss e Bichler (1988) conduziram um dos primeiros estudos sobre propriedades da média. Nesse estudo, em que participaram alunos de idades compreendidas entre 8 e 14 anos, estudou-se o reconhecimento e a aplicação das seguintes propriedades da média a partir de tarefas diversas, incluindo a consideração do tipo de dados discretos e contínuos: a) A média situa-se entre os valores extremos da distribuição; b) A soma dos desvios dos dados em relação à média é zero; c) A média é influenciada pelo valor de cada um dos dados; d) A média não é necessariamente igual a um dos valores do conjunto de dados; e) O valor da média pode não ser inteiro; f) Os dados com valor nulo influenciam o cálculo da média; e g) A média é um “representante” do conjunto de dados a que diz respeito.

Dos resultados obtidos nesse estudo, salienta-se uma melhoria sistemática da compreensão das propriedades com a idade e, para uma mesma idade dos alunos, o grau de compreensão das propriedades foi variável, apresentando menos dificuldades em relação as propriedades a), c) e d) e mostrando-se mais difíceis as propriedades b), f) e g). Já na análise dos raciocínios verificou-se que as dificuldades dos alunos aumentaram com o maior grau de complexidade das propriedades e a aplicação das propriedades a conjuntos de dados discretos ou contínuos esteve na origem de níveis de complexidade distintos, tendo sido mais difícil para os alunos os dados de tipo contínuo.

Boaventura e Fernandes (2004) replicaram o estudo de Strauss e Bichler (1988), questionando alunos portugueses do 12.º ano sobre propriedades da média e da mediana. No caso da média, os alunos

deviam afirmar a verdade ou falsidade das propriedades: a) A média de um conjunto de dados nunca é igual a um dos dados; b) A média de um conjunto de dados é sempre um valor compreendido entre o menor e o maior dos dados; c) Se acrescentarmos o valor 0 (zero) ao conjunto de dados, o valor da média não se altera; d) Se acrescentarmos o valor da média ao conjunto de dados, o valor da média não se altera; e) Dois conjuntos de dados diferentes podem ter a mesma média.

Nestas propriedades a percentagem de respostas corretas variou entre 47,5% e 93,9%, com uma média de 75,2% de acerto por item, sendo as maiores dificuldades dos alunos nos itens c) e d). Ao acrescentar o valor 0 (zero), menos alunos responderam corretamente (62,4%), sendo que muitos acreditam que o valor da média não se altera porque o veem como elemento neutro. Ainda mais alunos sentiram dificuldade em concluir que a média não se altera quando se acrescenta um dado com o valor da média, sendo que agora menos de metade respondeu corretamente (47,5%).

Ainda referente à propriedade de acrescentar o valor 0 (zero) ao conjunto de dados, Cazorla (2003) constatou que a maioria dos estudantes universitários (79,5%) que participaram em estudo sobre a compreensão do conceito de média respondeu corretamente, sendo que o erro mais frequente resultou de ignorar o novo dado e calcular novamente a média dos dados, indicando terem ignorado o valor 0 (zero).

Voltando ao estudo de Boaventura e Fernandes (2004), no caso da mediana, questionaram-se os alunos sobre se o valor da mediana diminui, aumenta ou mantém-se quando: a) Se acrescenta um dado inferior a todos os outros; b) Se acrescenta um dado com o valor da mediana; c) Se acrescenta um dado com valor superior ao da mediana; d) Se acrescenta dois dados, um dado inferior a todos os outros e outro superior a todos os outros. A percentagem de respostas corretas variou entre 65,7% e 82,3%, com uma média 72,9% de acerto por item. Verificou-se, ainda, que as dificuldades dos alunos foram um pouco superior no caso de se acrescentar um dado inferior a todos os outros (65,7%), um dado igual à mediana (72,9%) ou um dado superior à mediana (70,7%). Na

globalidade, entre as percentagens de respostas corretas das propriedades da média e da mediana não se verificaram grandes discrepâncias.

Em estudo recente, Fernandes e Oliveira Júnior (2021) buscaram identificar o conhecimento de alunos brasileiros do Ensino Médio sobre propriedades da mediana e da média que derivam de transformações dos dados ou de afirmações enunciadas, por meio de um estudo quantitativo, de tipo descritivo, em que participaram 104 alunos do 3.º ano do Ensino Médio de uma escola pública da região de São Paulo. Os alunos revelaram muitas dificuldades nos itens abertos, enquanto nos itens fechados tiveram um melhor desempenho. Conclui-se que têm um conhecimento conceitual limitado da mediana e da média, devendo ser-lhe dada mais atenção no ensino.

Procedimentos metodológicos

A presente investigação tem por propósito estudar o conhecimento de alunos do 2.º ano do Ensino Médio sobre propriedades da média e da mediana. Para tal, realizou-se um estudo de natureza quantitativa e de tipo descritivo, em que os participantes foram selecionados pelo critério de conveniência. Neste tipo de estudo pretende-se realizar descrições rigorosas e efetuar inferências alicerçadas em evidência de um fenômeno educacional preexistente (GALL; GALL; BORG, 2003).

Participaram da investigação 116 alunos do 2.º ano do Ensino Médio que frequentavam, em 2021, uma escola pública do município de São Paulo, Brasil. Estes alunos são distribuídos como 56,9% do gênero feminino, tinham idade compreendida entre 15 e 18 anos e com média de idade e mediana de 16 anos. Já as classificações obtidas pelos alunos em matemática no final do ano letivo de 2020 variavam entre 4 e 10, com média de 7,25. Assim, globalmente, conclui-se que os alunos frequentaram o 2.º ano do Ensino Médio na idade em que seria esperado e que tinham um desempenho médio em matemática.

Perguntou-se também aos alunos se esses tiveram dificuldade quando as aulas eram de conteúdos estatísticos, sendo que

somente 6,0% dos alunos indicaram não ter tido dificuldade e 29,3% pouca dificuldade. Aqueles que indicaram ter muita dificuldade foram 20,7% ou somente tiveram dificuldade foram 44,0%. Dessa forma, os alunos parecem ter dificuldade em relação aos conceitos estatísticos.

Os dados do estudo foram obtidos através da aplicação de um questionário, que teve de ser aplicado *online*, através do *Google Forms*, em virtude das restrições à atividade letiva presencial decorrentes da pandemia da Covid-19. O questionário foi constituído por questões, cada uma com vários itens de resposta fechada ou aberta, centrando naquelas que envolvem propriedades da mediana e da média.

A primeira questão, com três itens de resposta aberta, trata da determinação dos novos valores da mediana e da média quando se adiciona o mesmo valor a todos os dados. Já na segunda questão, com quatro itens de resposta fechada, inquire-se sobre se a mediana diminui, aumenta ou mantém-se quando se acrescenta um ou dois dados, em certas condições, à série inicial. Por fim, na terceira questão, com cinco itens de resposta fechada, questiona-se sobre a verdade ou falsidade de afirmações envolvendo o conceito de média. As questões do presente estudo são análogas a questões do estudo de Boaventura e Fernandes (2004) realizado em Portugal, cujos enunciados se apresentam no tópico de apresentação de resultados.

Na aplicação do questionário, os alunos responderam no mesmo período, que tinha sido estabelecido e que não excedeu 40 minutos. Por outro lado, foram incentivados a responder com empenho e sinceridade ao questionário, sendo também informados da preservação do anonimato e de que a sua participação no estudo seria voluntária, podendo a qualquer momento deixar de participar do estudo.

Por último, em relação ao tratamento e análise de dados, estudaram-se as respostas apresentadas pelos estudantes, classificando-as em corretas e incorretas. Em seguida, determinaram-se frequências dos tipos de respostas (corretas e incorretas) e recorreu-se a tabelas estatísticas para resumir a informação dos tipos de respostas, incluindo também, quando necessário, as não respostas.

Apresentação de resultados

A apresentação dos resultados do estudo estrutura-se segundo cada uma das três questões que foram propostas aos alunos, envolvendo propriedades da média e mediana.

Na Questão 1 (Figura 1), pretendeu-se que os alunos determinassem as alterações no valor da mediana e da média quando se adiciona um valor constante a todos os dados.

Figura 1 - Enunciado da questão 1 proposta aos alunos

- 1.** A média dos vencimentos dos 20 trabalhadores de uma empresa é 1500 reais e a mediana é 1000 reais.
- a)** Sabendo que o vencimento de cada um dos trabalhadores foi aumentado em 80 reais, qual a mediana dos novos vencimentos dos 20 trabalhadores?
- b)** Sabendo que o vencimento de cada um dos trabalhadores foi aumentado em 90 reais, qual a média dos novos vencimentos dos 20 trabalhadores?
- c)** Sabendo que o vencimento de cada um dos trabalhadores foi aumentado em 5%, qual a média dos novos vencimentos dos 20 trabalhadores?

Fonte: Elaborado pelos autores

Na resolução dos itens desta questão esperava-se que os alunos adicionassem ao valor dado da mediana e da média o valor da constante que foi adicionado aos dados. Assim, em 1a), a mediana é $1000 + 80 = 1080$ reais; em 1b), a média é $1500 + 90 = 1590$ reais; e, em 1c), a média é $1500 + 1500 \times 0,05 = 1575$ reais.

Na Tabela 1 encontram-se registadas as percentagens dos tipos de respostas (corretas e incorretas) dadas pelos alunos, incluindo, eventualmente, as percentagens de não respostas nos itens da questão 1.

Tabela 1 - Percentagens dos tipos de respostas nos itens da questão 1

Itens	% de respostas		Não respostas
	Corretas	Incorretas	
1a)	38,8	49,1	12,1
1b)	40,5	48,3	11,2
1c)	35,3	51,8	13,8

Fonte: Elaborado pelos autores

Pela Tabela 1 conclui-se que esta questão se revelou difícil para os alunos, variando a percentagem de respostas corretas entre 35,3% e 40,5%, o que significa que aproximadamente um pouco mais de terço dos alunos respondeu corretamente a qualquer dos três itens desta questão.

Por outro lado, além da percentagem de respostas incorretas, que correspondem a cerca de metade dos alunos em qualquer dos itens, destaca-se a elevada percentagem de alunos que não responderam a qualquer dos itens, o que vem a agravar as dificuldades sentidas pelos alunos (11,2% a 13,8%). Neste caso, se adicionarmos a percentagem de alunos que responderam incorretamente com a percentagem dos que não responderam, verificamos que a soma varia entre 59,5% e 65,6%.

Tendo em conta que, em qualquer item, os dados sofreram um aumento, seria de esperar que os alunos reconhecessem que a tal aumento dos dados corresponderia também um aumento da mediana e da média. No caso das respostas incorretas, conclui-se que isso não se verifica, sendo a maioria dessas respostas um valor inferior ao valor inicialmente dado da mediana ou da média, ou seja, 25,9% em 1a), 37,9% em 1b) e 40,5% em 1c).

Aprofundando a análise, constata-se que ao adicionar um valor positivo a qualquer dos dados, resulta que tanto a mediana como a média vêm aumentadas desse valor. Contudo, verificou-se, em qualquer dos itens, que a maioria dos alunos (mais da metade) não teve em consideração que as respetivas medidas estatísticas deviam aumentar, o que agrava as dificuldades reveladas pelos alunos. Este

resultado é particularmente problemático porque denota ausência de sentido crítico por parte dos alunos.

Por último, em todos os itens, salienta-se, ainda, uma variação pequena nas percentagens dos diferentes tipos de respostas e de não respostas. Esta regularidade das percentagens ao longo dos três itens deve-se, provavelmente, ao fato de em qualquer deles se ter de adicionar um valor constante ao valor dado da mediana ou da média. Ou seja, os processos implicados na resolução de qualquer dos itens são, essencialmente, os mesmos.

Na Questão 2, apresentada na Figura 2, questionam-se os alunos sobre se a mediana aumenta, diminui ou se mantém quando se acrescenta um ou dois dados em certas condições.

Figura 2 - Enunciado da questão 2 proposta aos alunos

2. Considere a mediana de um conjunto de 20 dados, todos diferentes. O valor da mediana diminui, aumenta ou mantém-se, quando:

a) Se acrescenta um dado inferior a todos os outros?

diminui aumenta mantém-se

b) Se acrescenta um dado com o valor da mediana?

diminui aumenta mantém-se

c) Se acrescenta um dado com valor superior ao da mediana?

diminui aumenta mantém-se

d) Se acrescentam dois dados, um inferior e outro superior a todos os outros?

diminui aumenta mantém-se

Fonte: Elaborado pelos autores

Como os dados são todos diferentes, e considerando a sua ordenação crescente, temos que: 1) Em a), ao acrescentar um dado inferior a todos os outros, a mediana diminui, coincidindo com o dado imediatamente inferior à mediana; 2) Em b), ao acrescentar um dado igual à mediana, ela mantém-se, coincidindo com o dado introduzido; 3) Em c), ao acrescentar um

dado superior à mediana, ela aumenta, coincidindo com o dado imediatamente superior à mediana; 4) Em d), ao acrescentar um dado inferior e outro superior a todos os outros, a mediana mantém-se porque esses valores passam a constituir os novos valores extremos da série ordenada e, portanto, não intervêm na determinação da mediana.

Na Tabela 2 encontram-se registadas as percentagens dos tipos de respostas (corretas e incorretas) dadas pelos alunos, incluindo, eventualmente, as percentagens de não respostas nos itens da questão 2.

Tabela 2 - Percentagens dos tipos de respostas nos itens da questão 2

Itens	% de respostas		Não respostas
	Corretas	Incorretas	
2a)	41,4	58,6	—
2b)	67,2	32,8	—
2c)	54,3	45,7	—
2d)	62,9	37,1	—

Fonte: Elaborado pelos autores

Por observação da Tabela 2 verifica-se que todos os alunos responderam a todos os itens, não havendo não respondentes, e que o desempenho dos alunos foi bastante melhor nesta questão do que na questão 1. Agora, em qualquer dos itens, mais de metade dos alunos responderam corretamente, exceto no item a) com 41,4%, observando-se alguma variação no desempenho dos alunos ao longo dos quatro itens da questão, especificamente, variando entre 41,4% e 67,2%, com média de 56,2% por item.

No item 2a) os alunos tiveram mais dificuldade em reconhecer que ao acrescentar um dado inferior a todos os outros, a mediana diminui, coincidindo com o dado imediatamente inferior à mediana. Neste item, quase todas as respostas incorretas (45,7%) resultaram de os alunos afirmarem que a mediana aumenta.

No item 2b) os alunos não tiveram muita dificuldade em reconhecer que a mediana se mantém quando se acrescenta um novo dado igual à mediana. Neste item,

a maior parte das respostas incorretas (19,8%) resultaram de os alunos afirmarem que a mediana aumenta, sendo que outros 12,9% indicaram que a mediana diminui.

Considerando o item 2c) um pouco mais da metade dos alunos reconheceram que, ao acrescentar um dado superior à mediana, ela aumenta, coincidindo com o dado imediatamente superior à mediana. Neste item, a maior parte das respostas incorretas (33,6%) resultaram de os alunos afirmarem que a mediana diminuiu, sendo que outros 12,9% indicaram que o valor da mediana se mantém.

Já no item 2d) os alunos foram mais sucedidos em reconhecer que a mediana não se altera, ou mantém-se, quando se acrescentam dois dados, um menor e outro maior do que todos os outros. Agora, as respostas erradas distribuíram-se, pelas opções de resposta aumenta (26,7%) e diminui (10,3%).

Nos itens 2b) e 2d), respectivamente, possivelmente um maior sucesso dos alunos tenha a ver com o fato de, tanto ao acrescentar um dado igual à mediana, ela mantém-se, coincidindo com o dado introduzido, quanto acrescentar um dado inferior e outro superior a todos os outros não se alterar a paridade do número total de dados e desses dois novos dados; não interferirem na determinação da mediana. É como se pudéssemos retirá-los da série ordenada dos dados, mantendo-se, portanto, a mediana do conjunto inicial.

Por fim, em termos das respostas incorretas, no item 2a), entre as opções aumenta e mantém-se, a opção aumenta foi selecionada por mais da metade dos alunos (58,6%). Já no item 2c), entre as opções diminui e mantém-se, a opção diminui foi escolhida por quase metade dos alunos (45,7%).

Considerando apenas as respostas incorretas, verifica-se que a maioria dos alunos afirmou que a mediana aumenta quando se acrescenta um dado inferior a todos os outros ou igual à mediana, respetivamente, nos itens 2a) e 2b), e diminui quando se acrescenta um dado superior à mediana, no item 2c). Repare-se que afirmar que a mediana aumenta/diminui quando se acrescenta um dado inferior/superior que todos os outros contradiz o facto da nova série ordenada se

deslocar para a esquerda/direita e, conseqüentemente, a mediana diminuir/aumentar. Assim, tal como na questão 1, observa-se novamente que alguns alunos denotam ausência de sentido crítico.

Na Questão 3, apresentada na Figura 3, inquiram-se os alunos sobre a verdade ou falsidade de várias afirmações envolvendo o conceito de média.

Figura 3 - Enunciado da questão 3 proposta aos alunos

3. Relativamente a cada uma das afirmações seguintes, envolvendo o conceito de média, diga se é verdadeira ou falsa.

a) A média de um conjunto de dados nunca é igual a um dos dados.

verdadeira falsa

b) A média de um conjunto de dados é sempre um valor compreendido entre o menor e o maior dos dados.

verdadeira falsa

c) Se acrescentarmos o valor 0 (zero) ao conjunto de dados, o valor da média não se altera.

verdadeira falsa

d) Se acrescentarmos o valor da média ao conjunto de dados, o valor da média não se altera.

verdadeira falsa

e) Dois conjuntos de dados diferentes podem ter a mesma média.

verdadeira falsa

Fonte: Elaborado pelos autores.

Em termos de respostas, os alunos deviam reconhecer que se tratava de uma afirmação, tendo que: 1) Em 3a), falsa (basta considerar numa série em que o mesmo dado se repete); 2) Em 3b), verdadeira (a divisão da soma dos dados pelo número de dados não pode ser inferior ao valor mínimo nem superior ao valor máximo); 4) Em 3c), falsa (ao adicionar o valor 0 (zero) a soma dos dados mantém-se, mas o número de dados aumenta de uma unidade, portanto a média diminui); 5) Em 3d), verdadeira (ao

adicionar o valor da média, o quociente da soma dos dados pelo número de dados mantém-se, portanto a média mantém-se); 6) Em 3e), verdadeira (basta considerar dois conjuntos de dados com o mesmo número cardinal e com a mesma soma).

Na Tabela 3 encontram-se registadas as percentagens dos tipos de respostas (corretas e incorretas) dadas pelos alunos, incluindo, eventualmente, as percentagens de não respostas nos itens da Questão 3.

Tabela 3 - Percentagens dos tipos de respostas nos itens da questão 3

Itens	% de respostas		Não respostas
	Corretas	Incorretas	
3a)	64,7	35,3	—
3b)	61,2	38,8	—
3c)	46,6	53,4	—
3d)	50,9	49,1	—
3e)	70,7	29,3	—

Fonte: Elaborado pelos autores

À semelhança do que aconteceu na Questão 2, também na questão 3 todos os alunos responderam a todos os itens, não havendo não respostas, a variação do desempenho dos alunos ao longo dos cinco itens aumentou, sendo agora de 46,6% a 70,7%, e o desempenho médio na globalidade dos itens diminuiu, 58,8% por item.

Entre os cinco itens desta questão, destacam-se os itens 3c) e 3d), em que os alunos revelaram mais dificuldades, e o item 3e), que foi aquele em que mais alunos responderam corretamente. No caso do item 3c), que foi aquele que se revelou mais difícil, afirma-se que quando se acrescenta o valor 0 (zero) ao conjunto de dados, o valor da média não se altera. Nesta situação, a maior parte dos alunos afirmou que se tratava de uma afirmação verdadeira, o que vai de encontro à interpretação de que o valor 0 (zero) não interfere com a média, ou seja, funciona como elemento neutro. Assim, tendo em conta o elevado número de alunos que responderam deste modo,

podemos concluir que esta ideia errada foi largamente adotada pelos alunos.

No item 3d), em que se afirma que, acrescentar o valor da média ao conjunto de dados não altera o valor da média, metade dos alunos respondeu incorretamente. Nesta situação, esses alunos declararam que a afirmação era falsa, contrariando, assim, a definição de média. Da interpretação da média como repartição equitativa, que corresponde a transformar todos os dados no mesmo valor (que é a média), resulta imediatamente que ao adicionar o valor da média ela se mantém.

Já o item 3e), em que se refere que dois conjuntos de dados diferentes podem ter a mesma média, foi aquele em que mais alunos responderam corretamente ao declarar tratar-se de uma afirmação verdadeira. Neste caso, tratando-se de uma afirmação de existência, basta que o aluno reconheça uma situação que verifique a afirmação para responder corretamente. Talvez se deva a isso o maior sucesso dos alunos.

Finalmente, nos itens 3a) e 3b), em que se afirma que, a média de um conjunto de dados nunca é igual a um dos dados e que é sempre um valor compreendido entre o menor e o maior dos dados, respetivamente, verificou-se que a maioria dos alunos respondeu que a primeira era falsa e a segunda verdadeira, respondendo, assim, corretamente.

Considerações finais

Assim, entre as três questões aqui estudadas, a primeira revelou-se mais difícil do que as duas restantes, verificando-se, em todos os seus itens, que um pouco mais de um em cada três alunos respondeu corretamente e um desempenho semelhante em todos eles. Portanto, não se observaram diferenças relevantes do desempenho na determinação da mediana e da média, o que pode dever-se ao fato de os processos matemáticos envolvidos em ambas as estatísticas serem, essencialmente, os mesmos.

Comparando com o desempenho em dois itens análogos, envolvendo apenas a média, do estudo de Boaventura e Fernandes (2004), em que se obteve cerca de 60% de respostas de corretas, conclui-se existir uma

grande disparidade. Considerando que os alunos frequentavam o mesmo nível de escolaridade, admitimos que se trata de um resultado que indica a necessidade de que sejam mais aprofundados.

Talvez as dificuldades experimentadas pelos alunos tenham origem na exigência de determinar a resposta única para as estatísticas mediana e média, pois nos itens das questões 2 e 3, em que não existia esse requisito, a percentagens de respostas corretas foi muito superior, sendo, em média, de 58,8% por item na questão 2 (sobre propriedades da mediana) e de 56,2% por item na questão 3 (sobre propriedades da média). Comparativamente com o estudo de Boaventura e Fernandes (2004), nos mesmos itens, os alunos portugueses obtiveram percentagens de respostas corretas um pouco superiores, especificamente, em média, 72,9% por item no caso das propriedades da mediana e 75,2% por item no caso das propriedades da média.

No presente estudo, os alunos tiveram mais dificuldades em reconhecer que a mediana se mantém quando se acrescenta um novo dado igual à mediana e foram mais sucedidos em reconhecer que a mediana se mantém quando se acrescenta um dado menor e outro maior do que todos os outros. Foi também nesta última propriedade que os alunos do estudo de Boaventura e Fernandes (2004) tiveram maior sucesso.

Já quanto às propriedades da média, os alunos deste estudo sentiram mais dificuldade em reconhecer que ao acrescentar o valor 0 (zero) ou o valor da média ao conjunto de dados, o valor da média não se altera, e foram mais sucedidos em reconhecer que dois conjuntos de dados diferentes podem ter a mesma média. Em todas estas propriedades verificou-se o mesmo padrão de dificuldade/sucesso no estudo de Boaventura e Fernandes (2004).

Muito embora os alunos do presente estudo possam ser capazes de determinar os valores das estatísticas mediana e da média, numa vertente procedimental, daí não decorre que eles também conheçam e apliquem as propriedades dessas estatísticas, pois no presente estudo os alunos exibiram dificuldades em várias propriedades, quer da mediana, quer da média. Adicionalmente, conclui-se que, globalmente, os alunos brasileiros revelaram mais dificuldades do

que alunos portugueses do mesmo nível de escolaridade (BOAVENTURA; FERNANDES, 2004), e o mesmo do que alunos do 8.º ano, no caso da mediana (FREITAS et al., 2018).

A partir das respostas incorretas foi possível constatar no presente estudo a ausência de sentido crítico por parte de muitos alunos, o que aconteceu nas questões 1 e 2. Concretamente, na questão 1, esses alunos afirmaram que ao adicionar o mesmo valor positivo a todos os dados, a mediana e a média diminuíam, enquanto, na questão 2, ao acrescentar um dado inferior/superior a todos os outros, a mediana aumenta/diminui.

Deste resultado problemático do estudo deve-se extrair consequências didáticas, como seja, por exemplo, antes de estudar as propriedades da mediana e média numa vertente algorítmica e conceitual, os alunos poderão discutir intuitivamente, sem efetuar quaisquer cálculos, os efeitos da alteração dos dados na diminuição, aumento ou manutenção dos valores da mediana e média (FISCHBEIN, 1987).

Portanto, face aos resultados obtidos, recomenda-se que os alunos explorem na escola situações-problema semelhantes às do presente estudo, envolvendo as propriedades das medidas de tendência central, em particular da mediana e da média, que são precisamente aquelas em que os alunos têm dificuldades. Desse modo, os alunos terão oportunidades para desenvolver um conhecimento conceitual a par de um conhecimento algorítmico ou procedimental (HIEBERT; LEFEVRE, 1986), que desempenham papéis complementares e aprofundam a compreensão das respetivas estatísticas.

Referências

ALVEAL, F. E. R.; FUENTES, A. C. M.; RUBILAR, P. R. S. Comprensión de las medidas de tendencia central: un estudio comparativo en estudiantes de pedagogía en matemática en dos instituciones formadoras chilenas. **Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior**, Sorocaba/SP, v. 21, n. 3, p. 929-952, nov. 2016.

BATANERO, C. Significado y comprensión de las medidas de posición central. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. **UNO: Revista de didáctica de las matemáticas**, n. 25, p. 41-58, 2000.

BATANERO, C. Sentido estadístico. Componentes y desarrollo. In: CONTRERAS, J. M. et al. (Eds.). **Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria**. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013. p. 55-61.

BOAVENTURA, M. G.; FERNANDES, J. A. Dificuldades de alunos do 12.º ano nas medidas de tendência central: O contributo dos manuais escolares. In: FERNANDES, J. A.; SOUZA, M. V.; RIBEIRO, S. A. Ribeiro (Orgs.). **Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola**. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho, 2004. p. 103-126.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCNs+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 2002.

BRASIL. MEC. **Base Nacional Comum Curricular** - Educação é a Base. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

CAMPBELL, S. K. **Flaws and fallacies in statistical thinking**. New Jersey: Prentice-Hall, 1974.

CAZORLA, I. M. Média aritmética: um conceito prosaico e complexo. In: READING, C. (Ed.). **Anais do IX Seminário de Estatística Aplicada**. Rio de Janeiro: Instituto Interamericano de Estatística, 2003. p. 1-14.

FERNANDES, J. A.; BARROS, P. M. Dificuldades de futuros professores do 1º e 2º ciclos em estocástica. In: Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática (CIBEM), 5. 2005. **Actas...** Porto (Portugal): Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2005.

FERNANDES, J. A.; OLIVEIRA JÚNIOR, A. P. Conhecimento de propriedades da mediana e média de alunos do final do Ensino Médio. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**, Florianópolis, v. 16, p. 01-18, jan./dez., 2021.

FISCHBEIN, E. **Intuition in science and mathematics**: an educational approach. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1987.

FREITAS, A. et al. Dificuldades na aprendizagem da mediana e quartis por alunos do 8.º ano de escolaridade: estudo comparativo fórmula versus gráfico. **Indagatio Didactica**, Portugal, v. 10, n. 2, p. 109-132, 2018.

GALL, M. D.; GALL, J. P.; BORG, W. R. **Educational research: an introduction**. 7. ed. Boston: A & B Publications, 2003.

HIEBERT, J.; LEFEVRE, P. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In: HILBERT, J. (Ed.). **Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1986. p. 1-27.

JACOBBE, T.; CARVALHO, C. Teachers' understanding of averages. In: BATANERO, C.; BURRIAL, G.; READINGS, C. (Eds.). **Teaching statistics in school mathematics- Challenges for teaching and teacher education**. Springer, Dordrecht, 2011. p. 199-209.

RUSSELL, S. J.; MOKROS, J. R. What's typical?: Children's ideas about average. In: D.

VERE-JONES, D. (Ed.) **Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics**. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute, 1991. p. 307-313.

SOUSA, O. Investigações estatísticas no 6º ano. In: Grupo de trabalho de Investigação (Org.). **Refletir e investigar sobre a prática profissional**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2002. p. 75-95. Disponível em: <<https://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/COORDENADORES/Materiais%20Coordenad/Textos/Souza%202002.pdf>>. Acesso em: 31 mar. 2022.

STRAUSS, S.; BICHLER, E. The development of children's concepts of the arithmetic average. **Journal for Research in Mathematics Education**, Estados Unidos, v. 19, n. 1, p. 64-80, 1988.

Ailton Paulo de Oliveira Júnior: Doutorado e Pós-doutorado em Educação ((Didática, Práticas Escolares e Técnicas de Ensino) pela Universidade de São Paulo - USP, Professor Associado III da Universidade Federal do ABC - UFABC, Santo André – São Paulo, ailton.junior@ufabc.edu.br

José António Fernandes: Doutorado em Educação (Metodologia do Ensino da Matemática) pela Universidade do Minho, Professor Associado do Instituto de Educação da Universidade do Minho, Braga – Portugal, jfernandes@ie.uminho.pt

Sandra Salerno: Mestre em Ensino e História das Ciências e da Matemática, Universidade Federal do ABC - UFABC, Santo André – São Paulo, sandrasalernosa@gmail.com