

ANÁLISE DA PRODUÇÃO DO GRUPO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO ALGÉBRICA DA PUC-SP EM RELAÇÃO À TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Analysis of the production of the research group on algebraic education at PUC-SP in relation to the theory of semiotic representation registers in basic education

Barbara Lutaif Bianchini

Gabriel Loureiro de Lima

Resumo

Neste artigo, apresenta-se um mapeamento de cunho exploratório-analítico com o objetivo de analisar nas dissertações e teses defendidas por membros do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA) e que enfocam reflexões referentes à Educação Básica subsidiadas pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval, os aspectos teóricos utilizados e as justificativas para o emprego de tal referencial. Uma das justificativas mais recorrentes é o fato de a apreensão global de um objeto matemático requerer a coordenação de diferentes representações semióticas deste objeto em diversos registros. Os aspectos mais empregados da Teoria são: a importância de utilizar, de maneira coordenada, representações semióticas em diferentes registros para um dado objeto matemático e as transformações entre representações buscando-se evidenciar as mais exploradas.

Palavras-chave: Mapeamento; Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica; Teoria dos Registros de Representação Semiótica; Educação Básica.

Abstract

This article presents a mapping of exploratory-analytical nature with the purpose of analyzing the dissertations and theses defended by members of the Algebraic Education Research Group (GPEA) and that focus on reflections related to Basic Education subsidized by Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Registers (TRRS), the theoretical aspects used and the justifications for the use of such reference. One of the most recurrent justifications is the fact that the global apprehension of a mathematical object requires the coordination of different semiotic representations of this object in several registers.

The most used aspects of the Theory are the importance of using, in a coordinated way, semiotic representations in different registers for a given mathematical object and the transformations between representations seeking to highlight the most explored ones.

Keywords: Mapping; Algebraic Education Research Group; Theory of Semiotic Representation Registers; Basic Education.

Introdução

O Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA) foi criado em 2003 no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Em 18 anos de atuação, um conjunto significativo de pesquisas, especialmente dissertações e teses orientadas pelos docentes do Grupo, foi desenvolvido e, com a tripla finalidade de inventariar os estudos já realizados, identificar caminhos já trilhados e perspectivas para novas investigações e, conseqüentemente, evitar repetições de abordagens que não acrescentem novos resultados à base de conhecimento em construção, consideramos essencial para a comunidade da Educação Matemática e também para nós, tanto na condição de pesquisadores líderes do Grupo como de orientadores de mestrandos e doutorandos, catalogar os objetos matemáticos enfocados nestes estudos, os objetivos, os referenciais teóricos (englobando as justificativas para seus empregos e os elementos efetivamente adotados de cada quadro teórico), as metodologias, os sujeitos de pesquisa (se

houver), os níveis de ensino e os resultados alcançados.

Demos início a esse trabalho de síntese das produções do Grupo em 2019 quando, no artigo *O Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA): mapeamento de algumas de suas produções* (BIANCHINI; LIMA; MACHADO, 2019), detivemo-nos às produções relativas aos cinco conteúdos matemáticos mais explorados nas teses e dissertações produzidas pelo Grupo, a saber: Números e Operações, Generalização de Padrões, Função, Álgebra Linear e Equações, analisando 62 produções, sendo 54 dissertações e oito teses. Destacamos, quando havia, os subtemas tratados em cada um dos conteúdos matemáticos mais abordados, explicitando os números de dissertações e teses referentes a eles e, posteriormente, categorizamos as pesquisas em experimentais ou documentais; para as da primeira categoria, apresentamos subtema (quando havia), objetivo, tipo de produção (dissertação ou tese) e sujeitos; para as da segunda categoria, apresentamos subtema (quando havia), objetivo, tipo de produção (dissertação ou tese) e documento(s) analisado(s).

Em 2021, para o III LADIMA (Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática) apresentamos o segundo produto desta série de mapeamentos dos estudos do GPEA, um resumo expandido intitulado *Álgebra Linear: as investigações do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA) subsidiadas por teorias da Didática Francesa* (BIANCHINI; LIMA, não publicado), no qual analisamos que resultados, em termos tanto do ensino como da aprendizagem, cinco dissertações recorrendo às lentes teóricas desta vertente da Didática trouxeram para o Grupo e, conseqüentemente, para a Educação Algébrica.

No presente artigo, nosso objetivo é analisar nas dissertações (quatro de mestrado acadêmico e 14 de mestrado profissional) e teses (uma) defendidas por membros do

grupo que enfocam reflexões referentes à Educação Básica (zero a 17 anos de idade, sendo obrigatória para indivíduos de 4 a 17 anos) subsidiadas pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) do psicólogo francês Raymond Duval, os aspectos teóricos utilizados e as justificativas para o emprego de tal referencial. Como descremos na seção seguinte, do ponto de vista metodológico, a pesquisa realizada caracteriza-se como um mapeamento de cunho exploratório-analítico (BIEMBENGUT, 2003). Além disso, adotamos alguns preceitos da Análise de Conteúdo, na acepção de Bardin (2011), para organizar os dados coletados e, posteriormente, analisá-los.

Metodologia

A pesquisa desenvolvida é de caráter qualitativo, caracterizando-se como um mapeamento exploratório-analítico, que como postula Biembengut (2003), tem como característica essencial, além de sumarizar as características e os achados nas investigações mapeadas, a classificação e a organização destes elementos com o objetivo de evidenciar “as questões a serem avaliadas; reconhecer padrões, evidências, traços comuns ou peculiares, ou ainda, características indicadoras de relações genéricas” (BIEMBENGUT, 2003, p. 5). Para identificar os trabalhos que seriam mapeados, consultamos os currículos Lattes de todos os docentes que já orientaram pesquisas de mestrado e doutorado no GPEA e identificamos aqueles que atendiam ao recorte que apresentamos neste artigo: pesquisas referentes à Educação Básica com subsídio da TRRS de Duval. A próxima etapa foi acessar a Biblioteca Digital de Dissertações e Teses da PUC-SP¹ e reunir os trabalhos selecionados em suas versões digitais. Ao final deste processo, havíamos constituído o *corpus* de análise, constituído por 19 pesquisas, conforme explicitamos no Quadro 1.

¹

https://sapientia.pucsp.br/?_ga=2.214697872.628996682.16

12182449-149160779.1561464622 – Acesso em 10 de outubro de 2020.

Quadro 1 – *Corpus* de Análise neste estudo

Autor (Ano)	Título	Mestrado Acadêmico (MA)	Mestrado Profissional (MP)	Doutorado (D)
Adriana Santos (2011)	O Ensino da Função Logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do <i>software</i> GeoGebra	X		
Alessandro Ribeiro (2007)	Equação e seus multissignificados no ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico			X
Alexandre Silva (2008)	Conceito de função: atividades introdutórias propostas no material de Matemática do ensino fundamental da rede pública estadual de São Paulo		X	
Ana Lucia Jordão (2011)	Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio		X	
Carla Battaglioli (2008)	Sistemas lineares na segunda série do Ensino Médio: um olhar sobre os livros didáticos		X	
Cláudia de Souza (2010)	Análise da abordagem de função adotada em livros didáticos de Matemática da Educação Básica		X	
Claudia dos Santos (2013)	Função seno: um estudo com o uso do <i>software</i> Winplot com alunos do Ensino Médio		X	
Edson Castro (2011)	Um estudo exploratório das relações funcionais e suas representações no terceiro ciclo do ensino fundamental		X	
Fernando da Conceição Junior (2011)	Uma abordagem funcional para o ensino de inequações no Ensino Médio		X	
José de Melo (2007)	Docência de inequações no Ensino Fundamental da cidade de Indaiatuba	X		
Juliana Gregorutti (2009)	Construção dos Critérios de Divisibilidade com alunos de 5º série do Ensino Fundamental por meio de situações de aprendizagem		X	
Michele Diniz (2015)	A multiplicação nos livros do professor usados nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental em uma cidade de Minas Gerais	X		
Patricia da Cruz (2016)	Pensamento Algébrico e os significados do sinal de igualdade: o uso da oralidade e da narrativa nas aulas de Matemática	X		
Raquel Silva (2014)	Estudo da reta em Geometria Analítica: uma proposta de atividades para o Ensino Médio a partir de conversões de registros de representação semiótica com o uso do <i>software</i> GeoGebra		X	
Regina Dias (2014)	Análise do conhecimento de professores sobre o ensino de inequações		X	
Renata Gonçalves (2007)	Um estudo com os números inteiros usando o programa Aplusix com alunos de 6ª série do Ensino Fundamental		X	
Rosana Vaz (2008)	SARESP/2005: uma análise de questões de Matemática da 7ª série do Ensino Fundamental, sob a ótica dos níveis de mobilização de conhecimentos e dos registros de representação semiótica		X	
Salette Rodrigues (2008)	Uma análise da aprendizagem de produtos notáveis com o auxílio do programa Aplusix		X	
Umberto Silva (2007)	Análise da abordagem de função adotada em livros didáticos de Matemática da Educação Básica		X	

Fonte: dados da pesquisa

Constituído o *corpus* de nossa investigação, passamos a coletar e organizar os dados tendo por base alguns pressupostos da Análise de Conteúdo de Bardin (2011). Depois de realizar a *leitura flutuante* dos dezenove trabalhos, passamos à *exploração do material*, por meio da qual buscamos

índices (menções explícitas ou implícitas ao que intentávamos analisar) relacionados às justificativas da escolha da TRRS em cada uma das pesquisas e aos elementos de tal referencial que foram efetivamente empregados pelos autores. A partir de tais índices, fizemos recortes nos textos,

destacando as *unidades de registro* a partir dos objetivos de nosso estudo e as *unidades de contexto* constituíram-se pelos trechos das dissertações e teses nos quais os autores evidenciavam o porquê de ter recorrido à TRRS e, quais elementos, entre os que compõem este quadro teórico, foram de fato empregados nas investigações. Antes de passarmos, efetivamente, à análise e discussão dos dados, apresentamos, na próxima seção, os principais elementos da TRRS.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS)

O pressuposto básico da TRRS, desenvolvida pelo psicólogo francês Raymond Duval, é que a Matemática, ao contrário de outras ciências e áreas do conhecimento, não possibilita o acesso direto aos seus objetos de estudo; mas somente às suas representações.

Em todas as áreas do conhecimento, exceto Matemática, existem dois modos de acesso aos objetos de conhecimento: acesso sensorial, direto (percepção) ou instrumental (para qualquer coisa além de nossas capacidades de discriminação sensorial e de nosso campo perceptivo). [...] Acesso semiótico, por meio do uso de sistemas que produzem representações, independentemente de qualquer conservação de dados sensoriais ou qualquer restrição física. O primeiro desses sistemas é a linguagem, mas também existem produções gráficas, que vão desde esboços a figuras geométricas. Na Matemática, ao contrário, não há acesso sensorial aos objetos de conhecimento. O acesso passa por representações semióticas (DUVAL, 2010, p. 129).

Para Duval (2010, p. 129), essa questão de os objetos matemáticos só poderem ser acessados por meio de suas representações insere nesta ciência o que ele denomina de *Paradoxo Cognitivo do Pensamento Matemático*, o qual pode ser formulado de duas maneiras diferentes: (i) “Como não confundir um OBJETO e sua REPRESENTAÇÃO se não tivermos acesso a este objeto a não ser por meio de sua

representação?” (ii) “Dado que existem múltiplas representações semióticas possíveis do mesmo objeto, como não pensar que os CONTEÚDOS diferentes das diferentes representações possíveis se referem a diferentes OBJETOS, e não a este mesmo objeto?” Na visão do autor, a segunda formulação para o paradoxo cognitivo evidencia de maneira mais precisa a questão ligada à compreensão da Matemática por parte dos estudantes: “como os alunos podem reconhecer o mesmo objeto em diferentes representações?”

O mencionado paradoxo ilustra que a *semiose*, que para Duval (2008, p. 177), é “a apreensão ou a produção de uma representação semiótica”, é capital para o pensamento matemático. Segundo o autor, “as representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento” (DUVAL, 2012, p. 269). Exemplifica afirmando que “uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes” (Idem). Duval (2009, p. 32) afirma que a especificidade das representações semióticas é que estas são referentes a um sistema específico de signos e que podem “ser convertidas em representações ‘equivalentes’ em um outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para um sujeito que as utiliza”. Como pontua o autor “a noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para outro” (Idem).

Em artigo de 2010, o autor enfatiza que todos os sistemas semióticos são códigos que desempenham a função de comunicação. Há alguns sistemas, no entanto, que têm outras duas além desta: a *objetivação* que, segundo Duval (2009, p. 41) “corresponde à descoberta pelo próprio sujeito do que até então ele mesmo não supunha, mesmo se outros lhe houvessem explicado” e a *função de tratamento*, a qual “permite transformar uma representação semiótica em outra representação semiótica”. Duval denomina por *registros* os

sistemas semióticos que cumprem, além da função de comunicação, as de objetivação e de tratamento. A partir destas considerações, refina a definição de *semiose* afirmando que este termo “designa mobilização, implícita ou explícita, de pelo menos dois registros para produzir, externamente ou mentalmente, representações semióticas de um objeto, e ser capaz de transformar (uma representação em outra)” (DUVAL, 2010, p. 130).

Existem três atividades cognitivas de representação inerentes à *semiôsis*. A primeira é evidentemente a formação de representações em um registro semiótico particular, seja para “expressar” uma representação mental, seja para “evocar” um objeto real. Essa formação implica sempre uma seleção no conjunto de caracteres e determinações que “queremos” representar. As duas outras atividades são diretamente ligadas à propriedade fundamental de representações semióticas: sua transformabilidade em outras representações que conservam seja todo o conteúdo da representação inicial, seja uma parte somente deste conteúdo. Porém, esta transformação não corresponde à mesma atividade cognitiva conforme a transformação se faz no interior do mesmo registro ou, ao contrário, consiste em uma mudança de registro. Falaremos neste caso de “tratamento” quando a transformação produz outra representação no mesmo registro. E falaremos então de “conversão” quando a transformação produz uma representação em outro registro distinto da representação inicial (DUVAL, 2009, p. 53-54).

O mencionado autor questiona então *qual a importância para o funcionamento do pensamento humano de coordenar diferentes registros de representação semiótica?* Em um artigo de 2012, Duval apresenta três perspectivas complementares para responder à esta questão.

- (I) *Economia de Tratamento*: tendo-se à disposição diferentes registros de representação, pode-se analisar em qual deles a realização da atividade cognitiva de tratamento é

mais econômica e então efetuar uma conversão para trabalhar neste novo registro.

- (II) *Complementaridade dos Registros*: ao selecionar determinado registro para representar um conteúdo (objeto, conceito ou situação), automaticamente faz-se uma opção por certos elementos específicos do conteúdo representado. Ou seja, cada registro traz inerente a ele possibilidades e inconvenientes e, portanto, é relevante ter à disposição uma gama de registros para salientar, por meio de cada um deles, diferentes aspectos do conteúdo representado.
- (III) *Conceitualização implica coordenação de registros de representação*: a compreensão de um conteúdo cuja representação limita-se a um único registro é parcial, uma vez que o torna pouco ou não utilizável em outras situações, já que ao invés de atender-se às características essenciais do ente representado corre-se o risco de fixar-se em determinada forma de representação utilizada.

Especialmente na atividade matemática é fundamental, para que o estudante não confunda o objeto representado com a sua representação e para que sua apreensão de tal objeto seja mais abrangente, que mobilize diferentes registros de representação semiótica, muitas vezes em uma mesma situação; que saiba transitar entre diferentes registros e que reconheça um ente matemático independentemente da forma como ele está representado.

Convém salientar, por fim, o fenômeno da *congruência* ou *não-congruência* entre duas representações semióticas diferentes de um mesmo objeto. A este respeito, Duval (2009) destaca que:

geralmente a passagem de uma representação à outra se faz espontaneamente quando elas são congruentes, quer dizer, quando as três condições seguintes são preenchidas: correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações, e conversão de uma unidade significativa da representação de partida em uma só unidade significativa na representação de chegada. Mas, quando um desses três critérios não é verificado, as representações não são mais congruentes entre elas, e a passagem de uma à outra não tem mais nada de imediato. Pode-se igualmente fazer-se que duas representações sejam congruentes em um sentido de conversão e não congruentes para conversão inversa. Por exemplo, a expressão “ $XY \geq 0$ ” e a representação gráfica cartesiana dos dois quadrantes determinados respectivamente pelos semieixos

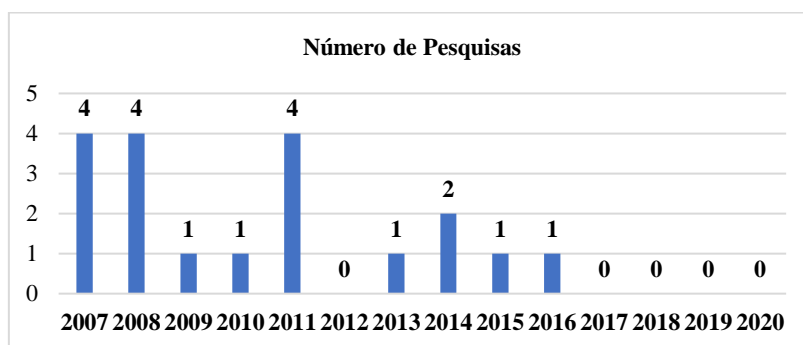
X e Y positivos, X e Y negativos, são congruentes se passarmos da escritura algébrica ao gráfico, mas não são para a passagem inversa (DUVAL, 2009, p. 18-19).

Tendo explicitado os pontos centrais da TRRS, passamos então a apresentar, na próxima seção, a análise e discussão dos dados obtidos.

Análise e discussão dos dados

Conforme apresentamos na Figura 1, as dissertações e teses já defendidas no âmbito do GPEA tendo como nível de estudo a Educação Básica e adotando como subsídio a TRRS fizeram-se presentes, respectivamente, nos anos de 2007, 2008 e 2011 (com 4 trabalhos por ano), 2014 (2 trabalhos) e 2009, 2010, 2013, 2015 e 2016 (1 trabalho por ano). Nos demais anos, tal referencial não foi utilizado ao menos nas pesquisas relativas aos ensinos Fundamental e Médio.

Figura 1 - Número de pesquisas relativas à Educação Básica subsidiadas pela TRRS



Fonte: dados da pesquisa

A partir do Quadro 2, podemos perceber que, em relação ao tipo de pesquisa, o *corpus* de análise foi composto por cinco investigações documentais (uma de mestrado acadêmico, três de mestrado profissional e uma de doutorado) e 14 pesquisas de campo (uma de mestrado acadêmico tendo professores como sujeitos, duas de mestrado acadêmico tendo estudantes como sujeitos, uma de mestrado profissional tendo professores como sujeitos e 10 de mestrado profissional tendo estudantes como sujeitos).

Quadro 2 - Detalhamento do *corpus* de análise

Tipo de Pesquisa	Nível			Sujeitos		Total
	M A	M P	D	Não há	Estudantes	
Documental	1	3	1	X		5
De campo	1	1	0			X
	2	10	0		X	
Totais	4	14	1			19

Fonte: dados da pesquisa

Ainda a partir do Quadro 2, nota-se que nas investigações do GPEA tendo como foco a Educação Básica e por subsídio a TRRS, predominam as de campo, realizadas na esfera do mestrado profissional, que

funcionou até 2015, e com enfoque em estudantes.

Quadro 3 - Temáticas presentes nas investigações do *corpus* de análise

Temáticas	Nível			Sujeitos			Total
	MA	MP	D	Não há (pesquisa documental)	Estudantes	Professores	
Funções	1	5	0	2	4	0	6
Inequações	1	2	0	0	1	2	3
Sistemas Lineares	0	2	0	1	1	0	2
Equações e Expressões	0	1	1	1	1	0	2
Multiplicação em \mathbb{N}	1	0	0	1	0	0	1
Crítérios de Divisibilidade	0	1	0	0	1	0	1
Números Inteiros	0	1	0	0	1	0	1
Produtos Notáveis	0	1	0	0	1	0	1
Estudo da Reta	0	1	0	0	1	0	1
Pensamento Algébrico e Significados do sinal de igualdade	1	0	0	0	1	0	1
Totais	4	14	1	5	12	2	19

Fonte: dados da pesquisa

O Quadro 3 evidencia que a temática funções é a mais explorada concentrando 31,6% dos trabalhos, sendo predominantes os de campo tendo estudantes por sujeitos e não havendo nenhuma investigação na qual os professores são sujeitos. As inequações foram foco de 15,8% das pesquisas, sendo todas de campo. Os outros temas mais explorados são sistemas lineares (10,5% dos

estudos), equações e expressões (também em 10,5% dos trabalhos). As demais temáticas estão presentes, cada uma delas, em apenas uma pesquisa. Passamos então à análise das pesquisas documentais, apresentando, inicialmente, por meio do Quadro 4, seus objetivos e os materiais analisados no intuito de atingi-los.

Quadro 4 - Objetivos e materiais analisados nas pesquisas documentais

Autor (Ano)	Nível			Objetivo e Materiais Analisados
	MA	MP	D	
Ribeiro (2007)			X	Investigar os significados da noção de equação no ensino de Matemática em obras de diferentes naturezas , como: livros de fundamentos da Matemática, dicionários matemáticos e da língua portuguesa, artigos científicos na área da Educação Matemática e livros didáticos nacionais e internacionais, de diferentes épocas.
Silva (2007)		X		Investigar a abordagem de função adotada em livros didáticos atuais da Educação Básica (as estratégias adotadas pelos autores, a relação discreto/contínuo na construção e de gráficos etc.).
Battaglioli (2008)		X		Fazer uma análise qualitativa sobre a abordagem de Sistemas Lineares apresentada por três livros didáticos do Ensino Médio, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM) .
Silva (2008)		X		Investigar o conceito de função nas atividades de Matemática do Jornal do Aluno (material do Ensino Fundamental da rede pública estadual de São Paulo), utilizado no início do ano letivo de 2008 .
Diniz (2015)	X			Analisar os livros da Coleção do Professor , adotados na rede municipal de uma cidade de Minas Gerais , focalizando o processo de elaboração do conceito de multiplicação do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental.

Fonte: dados da pesquisa

Como evidenciado no Quadro 4, a TRRS foi empregada nas pesquisas documentais com os dois seguintes objetivos gerais: (i) investigar os significados de um objeto matemático; e (ii) analisar os diferentes tipos de

abordagens de determinado conteúdo matemático presentes em livros ou outros materiais. Em relação aos materiais analisados, predominam os livros didáticos.

Quadro 5 - Justificativas para o emprego da TRRS nas pesquisas documentais

Autor(es) (Ano(s))	Justificativas
Ribeiro (2007)	A importância dos registros de representação semiótica na construção de significados para os objetos matemáticos.
Silva (2007)	Possibilita maior compreensão dos objetos matemáticos e de seus processos de ensino e de aprendizagem .
Silva (2008)	Permite verificar se atividades presentes em materiais didáticos possibilitam ou propõem ao estudante o trânsito por representações em diferentes registros .
Battaglioli (2008), Diniz (2015)	Possibilita analisar um elemento essencial para a construção do conhecimento matemático : trabalhar com representações em diferentes registros de representação semiótica de um mesmo objeto matemático.

Fonte: dados da pesquisa

Os autores das pesquisas documentais justificam o emprego da TRRS em suas investigações a partir da importância das representações semióticas em diferentes registros para: (i) a construção de significados e de compreensão para os objetos matemáticos; (ii) o entendimento dos processos de ensino e de aprendizagem de objetos matemáticos; (iii) a análise de elementos essenciais para a construção do conhecimento matemático e (iv) como se manifesta nos livros didáticos o “trânsito” entre diferentes registros de representação no estudo de determinado objeto matemático.

No que se refere aos aspectos explicitados no Quadro 6, é conveniente salientar que Ribeiro (2007) optou por empregar o pressuposto da TRRS supracitado por entender que, para a construção do significado da noção de equação é necessário propiciar ao estudante a vivência de situações nas quais “a ideia de equação, ainda entendida como um problema entre igualdade de quantidades, possa ser interpretada e representada de diferentes formas gráficas, seja por meio de diagramas, de esquemas gráficos, ou mesmo, posteriormente, pela intersecção de duas curvas” (RIBEIRO, 2007, p. 129-130).

Quadro 6 - Aspectos da TRRS empregados nas pesquisas documentais

Autor(es) (Ano(s))	Aspectos da teoria que foram empregados
Ribeiro (2007)	O pressuposto de que para a construção do conhecimento matemático é importante utilizar representações semióticas em diferentes registros .
Silva (2007)	Se a conversão entre representações nos registros gráficos e algébricos ocorre nos dois sentidos e os procedimentos relacionados à elaboração de um tipo especial de representação semiótica – a gráfica .
Silva (2008)	Transformações entre representações (conversões e tratamentos) e, no caso das conversões, a questão da congruência ou não-congruência .
Battaglioli (2008)	Transformações (conversões e tratamentos) entre representações.
Diniz (2015)	Coordenação de diferentes registros de representação semiótica.

Fonte: dados da pesquisa

Em relação aos procedimentos para a elaboração de um tipo especial de representação semiótica – a gráfica, Silva (2007) destaca a importância de analisar esse tipo de representação pelo fato de elas preencherem

as quatro funções cognitivas do pensamento. Constantemente as pessoas são expostas a informações (nos meios de comunicação, livros didáticos etc.) que, para serem entendidas e levadas em conta de modo crítico, exigem a leitura de gráficos, tabelas, diagramas etc. Destaca-se a representação gráfica por preencher não só o papel de comunicação, mas também de objetivação, tratamento e identificação, ou seja, não é suficiente saber “ler” um gráfico, é necessário também saber interpretar as informações contidas nessa forma de representação (SILVA, 2007, p. 25).

Relacionando a questão das representações gráficas com a ideia do emprego de diferentes representações para um mesmo objeto matemático, Silva (2007) considera relevante analisar as conversões entre representações, uma vez que é esse estudo, mais do que o dos tratamentos, que poderá dar pistas acerca das dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos estudantes.

O autor afirma ser importante observar as conversões entre representações

algébricas e as representações gráficas nos dois sentidos possíveis, uma vez que em cada sentido a demanda cognitiva da atividade pode ser diferente. Salienta que, ao construir a representação gráfica de uma função associando um ponto do plano a um par ordenado ou vice-versa ou ainda ao traçar um gráfico unindo pontos, não é estabelecida uma relação entre a representação gráfica obtida e a expressão algébrica da função, mas somente a correspondência entre um par ordenado e sua representação no sistema cartesiano plano.

Já os gráficos construídos estabelecendo-se uma equivalência entre a “associação variável visual da representação à unidade significativa da escrita algébrica” (SILVA, 2007, p. 28-29) possibilitam uma apreensão mais direta “da relação entre as modificações nas expressões algébricas das funções e as modificações nos respectivos gráficos e vice-versa” (p. 29). Tendo em vista essa observação, o autor considera pertinente analisar as conversões entre as representações gráficas e algébricas porque, como salienta Duval (2003) citado por Silva (2007), a conversão entre uma representação algébrica de uma função e uma representação gráfica deste objeto matemático realizada somente via localização no sistema cartesiano plano de pontos obtidos por substituição de valores numéricos (geralmente inteiros) na expressão algébrica da função e posterior união de tais pontos por meio do traçado de uma curva, procedimento mais observado nos livros didáticos, “não permite uma apreensão global e qualitativa necessária, por exemplo, para utilizar os gráficos para fins de controle, ou de exploração, relacionados aos tratamentos algébricos. Essa regra permite apenas uma leitura pontual das representações gráficas” (SILVA, 2007, p. 29).

Por sua vez, Silva (2008) salienta a importância de considerar o aspecto da TRRS por ele empregado afirmando que: “a conversão tem que ser considerada nos dois sentidos pois se o aluno conseguir fazer a conversão de uma representação no registro R1 para uma representação no registro R2 e não souber fazer o caminho inverso, não houve possibilidade de apreensão do objeto matemático em questão” (SILVA, 2008, p.

46). Em suas análises, verifica os casos de tratamento e de conversões, identificando aquelas que são ou não congruentes.

Para Battaglioli (2008) é relevante voltar a atenção para as conversões entre representações nos registros da língua natural, algébrico e gráfico porque cada um destes apresenta limitações. No caso específico do objeto matemático sistemas lineares, a autora afirma que

ao trabalharmos os sistemas lineares apenas no registro algébrico, pode acontecer do aluno dominar uma técnica e resolver este sistema, porém, pode não estar claro para ele que esta solução encontrada representa a n -upla que verifica todas as equações deste sistema, simultaneamente. Esta dificuldade, quando se trabalha com uma representação no registro algébrico, poderá ser minimizada ao fazer a conversão para uma representação no registro gráfico (BATTAGLIOLI, 2008, p. 15).

Ainda em relação ao registro algébrico, salienta outra limitação que é a falta de contextualização. Isso ocorre quando é pedido apenas para que se resolva um sistema linear no contexto matemático, sem apresentar uma situação-problema, no registro da língua natural, que poderá auxiliar o aluno a atribuir significado a tal sistema.

Finalmente, Diniz (2015) optou por, em seu trabalho, focar na questão da coordenação entre diferentes registros de representação semiótica por entender, subsidiada por Duval (2003), que a apreensão conceitual de objetos matemáticos demanda o desenvolvimento, por parte do estudante, de maior mobilidade com diferentes representações semióticas, em diferentes registros, de um mesmo objeto, mas que essa coordenação de registros não é espontânea ao sujeito. É “necessária a realização de ações orientadas, por parte do professor, na promoção de atividades com este objetivo: o de converter representações semióticas nos dois sentidos, ao ensinar a Matemática” (DINIZ, 2015, p. 22).

Passamos agora a analisar as investigações realizadas com professores, das quais apresentamos, primeiramente, por meio do Quadro 7, seus objetivos e os

materiais por meio dos quais os dados foram coletados.

Quadro 7 - Objetivos e materiais analisados nas pesquisas cujos sujeitos são professores

Autor (Ano)	Nível		Objetivo e Materiais Analisados
	MA	MP	
Dias (2014)		X	Analisar de que modo cinco professores da Rede Pública Estadual que lecionam na cidade de Carapicuíba, Região Metropolitana de São Paulo, desenvolvem o tema desigualdade e inequações com alunos da 8ª série (atual 9º ano) do Ensino Fundamental ou 1º Ano do Ensino Médio. Para isso, foram analisadas as respostas dos sujeitos a 17 questões de caráter didático e de conteúdo específico .
Melo (2007)	X		Investigar se o tema inequações estava sendo desenvolvido por 27 dos 32 professores de Matemática de Ensino Fundamental I de 10 das 42 escolas da cidade de Indaiatuba, e, em caso positivo, de que forma o assunto é abordado . Para atingir o objetivo foram analisadas respostas dos professores a um questionário e os livros didáticos por eles utilizados .

Fonte: dados da pesquisa

A partir dos dados apresentados no Quadro 7, é possível perceber que não há investigações em nível de doutorado subsidiadas pela TRRS tendo como sujeitos professores. Os únicos objetos matemáticos abordados foram desigualdades e inequações. A pesquisa de Melo (2007) volta sua atenção para professores que atuam no Ensino Fundamental I (atual Ensino Fundamental – Anos Iniciais) enquanto Dias (2014) realiza suas análises juntamente a professores do último ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio. Em ambas as investigações os dados foram coletados por meio de respostas dos sujeitos a um questionário e, no caso de Melo (2007), houve ainda a análise de livros didáticos.

Quadro 8 - Justificativas para o uso da TRRS nas pesquisas cujos sujeitos são professores

Autor (Ano)	Justificativas
Dias (2014)	Uma abordagem não somente algébrica para a resolução de inequações poderia facilitar o ensino deste objeto matemático.
Melo (2007)	Para o aluno mobilizar diversos registros de representação , ao estudar inequações, é necessário que o professor também os mobilize ou crie condições, por meio de tarefas, que permitam tal ação por parte dos alunos.

Fonte: dados da pesquisa

A partir do Quadro 8 ressaltamos que o emprego da TRRS nestas duas investigações tendo professores como sujeitos é justificado pela necessidade de que, para o estudante mobilizar diferentes registros de representação semiótica para o estudo das inequações, o professor deve conhecê-los e explorá-los em sala de aula, não limitando-se à representação algébrica e consequentemente auxiliando o aluno na apreensão global do objeto matemático em estudo.

Quadro 9 - Aspectos da TRRS empregados nas pesquisas com professores

Autor (Ano)	Aspectos da teoria que foram empregados
Dias (2014)	Representações semióticas priorizadas no momento da resolução de inequações.
Melo (2007)	Registros de representação mobilizados pelos professores em suas propostas de ensino e se são privilegiados as conversões ou os tratamentos .

Fonte: dados da pesquisa

Nos dois trabalhos tendo professores por sujeitos, como evidenciado no Quadro 9, seus autores empregam da TRRS a ideia de que um objeto matemático pode ser representado de diferentes maneiras em distintos registros de representação semiótica. Além disso, em uma das pesquisas, a de Melo (2007), recorre-se à ideia de transformação entre representações, buscando identificar se são priorizados os tratamentos ou as conversões.

Dias (2014) justifica o porquê de ter recorrido aos aspectos da TRRS explicitados no Quadro 9 afirmando que: na concepção assumida neste referencial, “a apreensão de um objeto matemático pode ocorrer ao submeter o aluno a situações-problema, nas quais ele tenha de se utilizar de diversos

registros de representação, executando diferentes tratamentos e variadas conversões de representações” (DIAS, 2014, p. 78). Além disso, a autora salienta que, como pontual Duval (2003), é

próprio de a atividade matemática mobilizar simultânea ou alternadamente vários registros de Representação Semiótica, e essa ação é considerada de relevante importância a seu ensino. É importante que o aluno consiga passar de um tipo de representação semiótica para outro tipo de representação semiótica, de um mesmo objeto matemático. Sendo assim, se os professores apresentarem o objeto matemático de uma única maneira, sem privilegiar as mudanças de registros de representação semiótica, poderão dificultar sua apreensão de modo significativo (DIAS, 2014, p. 126).

Melo (2007), por sua vez, salienta a importância dos aspectos da TRRS por ele consideradas, afirmando que:

a articulação entre os registros constitui uma condição de acesso à

compreensão em Matemática. O aluno pode aprender a reconhecer um objeto matemático através das múltiplas representações que podem ser feitas em diferentes registros, e esse reconhecimento é fundamental para que o aluno possa transferir ou modificar representações de informações durante a resolução de problemas (MELO, 2007, p. 22).

Além disso, relativamente à opção por analisar se são privilegiados os tratamentos ou as conversões, salienta que “do ponto de vista cognitivo é a atividade de conversão que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão, no entanto, se elas são realizadas (apenas) pelo professor ou pelo autor do livro, isso pouco contribuiu para a aprendizagem do aluno” (MELO, 2007, p. 118).

A seguir, passamos a analisar os trabalhos cujos sujeitos foram estudantes, iniciando pela apresentação, no Quadro 10, dos objetivos e materiais analisados nas investigações realizadas com alunos do Ensino Fundamental (EF).

Quadro 10 - Objetivos e materiais analisados nas pesquisas cujos sujeitos são estudantes do EF

Autor (Ano)	Nível		Objetivo e Materiais Analisados
	MA	MP	
Gonçalves (2007)		X	Investigar, por meio dos protocolos por eles produzidos, como 8 alunos de 6ª série do Ensino Fundamental II (atual 7º ano) resolvem situações-problema envolvendo Números Inteiros , utilizando o programa computacional Aplusix .
Rodrigues (2008)		X	Investigar, por meio dos protocolos por eles produzidos, o desempenho de 3 alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental de uma escola pública de São Paulo no estudo de produtos notáveis com o auxílio do programa de computador Aplusix .
Vaz (2008)		X	Analisar, por meio dos protocolos por eles produzidos, o desempenho de 32 alunos do 8º ano do Ensino Fundamental na resolução de algumas questões do SARESP/2005 relacionadas à Álgebra em questões referentes a equações e expressões .
Gregorutti (2009)		X	Conhecer, por meio dos protocolos por eles produzidos, como 6 alunos da 5ª série do Ensino Fundamental (atual 6º ano) mobilizam seus conhecimentos a respeito de divisibilidade de números naturais , em atividades visando a construção de um novo conceito, os Critérios de Divisibilidade para os números dois, três e cinco .
Castro (2011)		X	Investigar, por meio dos protocolos produzidos por 10 alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da zona leste de São Paulo, como as relações funcionais contribuem para a introdução ao pensamento e à linguagem da Álgebra.
Cruz (2016)	X		Compreender e analisar, por meio de protocolos produzidos pelos sujeitos (4 alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual da cidade de São Paulo), registros de diálogos em áudio, vídeo e diário de campo , de que forma a comunicação, o aluno explicando como pensou para resolver a atividade na aula de Matemática poderá contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico no que diz respeito à compreensão do sinal de igualdade com o sentido de equivalência .

Fonte: Dados da pesquisa

A partir do Quadro 10, podemos observar que, entre as investigações produzidas no GPEA tendo por subsídio a TRRS e por sujeitos estudantes do EF, não há trabalhos de doutorado. Além disso,

predominam os de mestrado profissional (cinco) em relação aos de mestrado acadêmico (apenas uma pesquisa). Em todos os estudos, os autores recorrem, para a coleta de dados, à análise de protocolos de

estudantes e, no caso da pesquisa de Cruz (2016), estes foram complementados com registros em áudio, vídeo e diário de campo. Em dois dos trabalhos foram empregados o programa computacional educativo Aplusix, que, como menciona Rodrigues (2008, p. 32), “é um programa direcionado à aprendizagem da Álgebra, desenvolvido por pesquisadores da equipe DidaTIC, do laboratório Leibniz em Grenoble na França”. Na época em que as pesquisas de Gonçalves (2007) e Rodrigues (2008) foram desenvolvidas, o mencionado *software* era

estudado no Brasil especialmente pela equipe da Prof^a. Dr^a. Marilena Bittar da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS). Os temas matemáticos explorados nas investigações evidenciadas no Quadro 10 são diversificados, havendo, no entanto, duas pesquisas dedicadas a aspectos relacionados ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

No Quadro 11 são apresentados os objetivos e os materiais analisados nas pesquisas em que os sujeitos são alunos do Ensino Médio (EM).

Quadro 11 - Objetivos e materiais analisados nas pesquisas cujos sujeitos são estudantes do EM

Autor (Ano)	Nível		Objetivo e Materiais Analisados
	MA	MP	
Souza (2010)		X	Analisar, por meio de protocolos produzidos pelos sujeitos (14 alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual, localizada em São Paulo) se as atividades apresentadas no Caderno do Professor do 3º bimestre de 2008 contribuem ou não para a compreensão do aluno a respeito do objeto Função Exponencial .
Santos (2011)	X		Elaborar, aplicar e analisar (por meio dos protocolos produzidos pelos alunos (6 estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de São Paulo no Município de Itaquaquecetuba) em conjunto com as transcrições dos diálogos gravados em áudio durante essa produção) uma sequência didática que envolveu o tema função logarítmica utilizando o <i>software GeoGebra</i> como uma estratégia pedagógica.
Conceição Junior (2011)		X	Analisar, a partir dos protocolos produzidos por 20 alunos do 2º ano do Ensino Médio, em que medida o ensino de inequações via uma abordagem funcional gráfica pode, ou não, favorecer o entendimento por parte dos alunos do assunto em questão.
Jordão (2011)		X	Elaborar, aplicar e analisar, por meio das gravações em áudio das discussões de 7 alunos do Ensino Médio, uma sequência didática que aborda a resolução algébrica e gráfica dos sistemas lineares quadrados com o auxílio do <i>software</i> educacional Winplot .
Santos (2013)		X	Investigar, por meio de protocolos de 3 estudantes do 2º ano do Ensino Médio, de que modo uma estratégia pedagógica apresentada na forma de sequências de atividades, com o uso do <i>software Winplot</i> , pode promover a aprendizagem da função seno e ainda se pode contribuir na compreensão em um contexto físico-matemático .
Silva (2014)		X	Investigar, por meio de protocolos , áudios de discussões e entrevistas com 6 alunos do 3º ano do Ensino Médio, se a utilização de um <i>software</i> de geometria dinâmica, o GeoGebra , pode contribuir para uma melhor compreensão do objeto matemático reta em relação à Geometria Analítica .

Fonte: dados da pesquisa

Pela análise dos dados apresentados no Quadro 11, podemos destacar, mais uma vez, assim como salientado em relação às pesquisas tendo professores e estudantes do EF como sujeitos, a inexistência de pesquisas em nível de doutorado. Assim como nos estudos realizados com estudantes do EF, também nestes com alunos do EM, predominam os de mestrado profissional, havendo, entre as seis investigações, apenas uma de mestrado acadêmico. Em todas as pesquisas foram analisados protocolos produzidos pelos estudantes, sendo que em dois estudos, a coleta de dados foi complementada com gravações em áudio e, em uma destas, ainda com entrevistas realizadas com os sujeitos.

O objeto matemático mais estudado é função, havendo pesquisas sobre a função exponencial (uma), função logarítmica (uma) e função seno (uma). Além disso, as funções também se fazem presentes na investigação tendo por foco as inequações, uma vez que o autor recorre a uma abordagem funcional gráfica para resolvê-las. Em quatro estudos, recorre-se ao uso de *softwares* educacionais, sendo estes: o GeoGebra (duas pesquisas, sendo os objetos matemáticos a função logarítmica e a reta sob o ponto de vista da Geometria Analítica) e o Winplot (duas pesquisas também, nas quais os objetos matemáticos são os sistemas lineares e a função seno). Um último aspecto a ser salientado é o fato de, em uma das investigações, na estratégia pedagógica

implementada para trabalhar com o objeto matemático em foco, recorrer-se ao contexto físico-matemático e não somente matemático. A seguir, no Quadro 12, apresentamos as justificativas para recorrer a TRRS salientadas pelos autores das pesquisas tendo estudantes por sujeitos.

Quadro 12 - Justificativas para o uso da TRRS nas pesquisas cujos sujeitos são estudantes

Autor(es)/Ano(s)	Justificativas
Gonçalves (2007), Santos (2011) e Santos (2013)	Possibilita realizar uma abordagem cognitiva da construção do conhecimento por parte do estudante.
Rodrigues (2008) e Santos (2011)	Permite entender questões relacionadas às dificuldades dos estudantes em compreenderem conceitos matemáticos .
Vaz (2008), Souza (2010) e Cruz (2016)	As atividades elaboradas ou os objetos abordados possibilitam a utilização de representações em diferentes registros de representação semiótica e, portanto, a Teoria de Duval traz contribuições para as análises feitas.
Conceição Junior (2011)	As representações em diferentes registros são fundamentais para o entendimento dos objetos matemáticos, ter acesso a eles e manipulá-los .
Castro (2011)	Permite descrever as condições de compreensão da Matemática para todos os alunos, a começar por aqueles que não estão destinados a fazer da Matemática sua atividade profissional .
Gregorutti (2009), Jordão (2011) e Silva (2014)	Permite colocar foco nas atividades de tratamento e de conversão, na mobilização simultânea de diferentes registros e na identificação, por parte dos alunos, dos diferentes registros, cada um com suas particularidades e assim utilizá-los da melhor maneira possível em diferentes situações, aspectos essenciais para a construção do conhecimento matemático .

Fonte: dados da pesquisa

Analisando o Quadro 12, nota-se que, em oito pesquisas (GONÇALVES 2007; SANTOS, 2011; SANTOS, 2013; CONCEIÇÃO JUNIOR, 2011; CASTRO, 2011; GREGORUTTI, 2009; JORDÃO, 2011 e SILVA, 2014) as justificativas para o emprego da TRRS baseiam-se na ideia de que, o acesso a um objeto matemático e a construção de um conhecimento, com compreensão, relacionado a ele depende fortemente de o estudante trabalhar, simultaneamente, com as diferentes

representações semióticas, em registros distintos, deste objeto. Havendo tal dependência, é evidente que, dificuldades na construção do conhecimento matemático podem estar relacionadas às dificuldades na articulação entre as diferentes representações semióticas do objeto relacionado a este conhecimento e estão atreladas a esta ideia as justificativas dadas por Rodrigues (2008) e Santos (2011) para o emprego da TRRS em seus estudos. As atividades elaboradas ou os objetos abordados por Vaz (2008), Souza (2010) e Cruz (2016) possibilitam o uso de representações semióticas em diferentes registros e, portanto, é natural que tais autores recorram a este referencial.

Quadro 13 - Aspectos da TRRS empregados nas pesquisas com estudantes

Autor(es)/Ano(s)	Aspectos da teoria que foram empregados
Gonçalves (2007), Vaz (2008), Santos (2013) e Cruz (2016)	Conversões entre representações semióticas
Rodrigues (2008), Souza (2010) e Jordão (2011)	Transformações (conversões e tratamentos) entre representações
Gregorutti (2009) e Castro (2011)	Diferentes registros de representação semiótica
Santos (2011), Conceição Junior (2011) e Silva (2014)	Coordenação entre representações semióticas em diferentes registros

Fonte: dados da pesquisa

Por meio do Quadro 13, nota-se que, em duas pesquisas (GREGORUTTI, 2009 e CASTRO, 2011) recorre-se somente à ideia de, na aprendizagem de Matemática, empregar-se diferentes registros de representação semiótica. Em oito pesquisas o aspecto da TRRS utilizado é a transformação entre representações, sendo que, em quatro (GONÇALVES, 2007; VAZ, 2008; SANTOS, 2013 e CRUZ, 2016) o foco está nas conversões, enquanto nas outras, enfatizam-se também os tratamentos (RODRIGUES, 2008; SOUZA, 2010 e JORDÃO, 2011). Finalmente, nas três demais pesquisas, a coordenação entre as representações é que ganha destaque.

Os autores que, dentre os aspectos da TRRS, optaram por explorar em suas pesquisas a ideia de conversões entre representações semióticas, o fizeram pelas seguintes razões: (i) converter e coordenar registros de representação possibilita

iluminar a questão da aprendizagem e disponibilizar “ao professor instrumentos que deverão ajudá-lo a tornar mais acessível a compreensão da Matemática (GONÇALVES, 2007, p. 38); (ii) amenizar as dificuldades que normalmente os estudantes enfrentam na atividade de conversão de representações requer que o professor realize um amplo trabalho junto a seus alunos tendo esta atividade como foco (VAZ, 2008); (iii) as conversões realizadas pelos estudantes permitem ao professor compreender suas aprendizagens em relação a determinado objeto matemático (SANTOS, 2013); e (iv) a atividade de conversão é fundamental porque é uma transformação que conduz aos mecanismos de compreensão acerca de determinado ente matemático, sendo as conversões não congruentes “as mais difíceis, e os bloqueios mais fortes por haver dificuldade do reconhecimento do mesmo objeto matemático, em duas de suas representações diferentes, por parte dos alunos” (CRUZ, 2016, p. 33).

Os autores que optaram por enfatizar não somente as conversões, mas também os tratamentos de representações semióticas, o realizaram com as seguintes justificativas: (i) “em toda análise de tarefa [...] é necessário distinguir cuidadosamente o que sobressalta no tratamento [...] e aquilo que sobressalta em uma conversão” (DUVAL, 2003 apud RODRIGUES, 2008, p. 52); (ii) por meio das transformações entre representações é possível analisar quais as dificuldades ou não dos alunos nas mudanças de diferentes registros de representação semiótica (SOUZA, 2010, p. 67); e (iii) as transformações de representações semióticas podem favorecer a aprendizagem de determinado objeto, uma vez que, transitar de uma representação para outra “não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto” (DUVAL, 2003 apud JORDÃO, 2011, p. 172).

Em relação à opção por explorar os diferentes registros de representação semiótica, os autores que em suas investigações tiveram este foco apresentam os seguintes argumentos para essa escolha: (i) “para maior apropriação do conceito matemático em jogo por parte dos alunos

(GREGORUTTI, 2009, p. 49); e (ii) “a apreensão conceitual de um objeto matemático de forma significativa está diretamente associada aos vários registros de representação a que tal objeto conceitual pode estar associado, e conseqüentemente, à maior mobilidade possível entre esses registros de representação” (CASTRO, 2011, p. 62).

Em relação à coordenação entre representações semióticas em diferentes registros, os pesquisadores que enfatizaram este aspecto apresentam os seguintes argumentos para justificar esta opção: (i) “o modo como o funcionamento do pensamento e de como o conhecimento se desenvolve está na variedade dos tipos de signos que podem ser utilizados e não no emprego deste ou daquele tipo de signo” (SANTOS, 2011, p. 28). A autora complementa esta justificativa afirmando que: “as questões centrais para as aprendizagens intelectuais aparecem na possibilidade de favorecer a coordenação dos registros. E esta coordenação é simplesmente a consequência da aprendizagem de um conceito” (SANTOS, 2011, p. 33); (ii) a aquisição de conhecimento sobre determinado objeto matemático se dá “quando um aluno consegue perceber que um objeto matemático pode ser representado por mais de um registro [...] de modo que, ao resolver um problema, tem a possibilidade de coordenar vários registros de representação em busca daquele que melhor favorece sua resolução” (CONCEIÇÃO JUNIOR, 2011, p. 27); e (iii)

A coordenação entre representações ressaltando sistemas semióticos diferentes não tem nada de espontâneo. [...] Um trabalho de aprendizagem específico centrado sobre a diversidade de sistemas de representação, sobre a utilização de suas possibilidades próprias, sobre sua comparação por colocar em correspondência e sobre suas “traduções” mútuas uma dentro da outra parece necessário para favorecê-la. Porém, quando um tal tipo de trabalho é proposto, constata-se uma modificação completa nas iniciativas e nas atitudes dos alunos para efetuar os tratamentos matemáticos, para os controlar, para a rapidez de execução e também para o

interesse colocado na tarefa [...]. Esse salto qualitativo no desenvolvimento das competências e das performances aparece ligado à coordenação de sistemas semióticos dos alunos. (DUVAL, 2009 apud SILVA, 2014, p. 49).

Na sequência, por meio do Quadro 14, destacamos as seis pesquisas do *corpus* de análise nas quais a TRRS foi articulada com outros referenciais teóricos e salientamos as teorias mobilizadas conjuntamente à desenvolvida por Duval e com que objetivo a articulação de quadros teóricos foi realizada.

Quadro 14 - Teorias articuladas com a TRRS e objetivos desta articulação

Autor(es)/Ano(s)	Teorias Articuladas	Objetivo da Articulação
Ribeiro (2007)	Transposição Didática de Yves Chevallard.	Dar suporte à discussão sobre objetos do saber e objetos do ensino , bem como para compreender e justificar a posição de se poder, ou não, conceber a ideia de equação como uma noção matemática .
Vaz (2008)	Níveis de Mobilização de Conhecimentos de Aline Robert.	Analisar os dados obtidos nos protocolos dos alunos a partir dos níveis de mobilização dos conhecimentos de Aline Robert (técnico, mobilizável e disponível), uma vez que para que haja uma boa compreensão dos conceitos algébricos, faz-se necessário um trabalho da Álgebra com suas várias representações, em níveis de conhecimento diferentes , exigindo do aluno a mobilização de seus conhecimentos e articulação de estratégias para a resolução de uma atividade.
Souza (2010)	Modelo Três Usos da Variável (3UV) de Sonia Ursini e colaboradores.	Complementar a análise relativa às atividades apresentadas no Caderno do Professor a respeito do objeto Função Exponencial, uma vez que, conforme citam as autoras do Modelo 3UV, em uma relação funcional (um dos usos da variável) é necessário reconhecer as correspondências relacionadas independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais ou expressões analíticas); determinar os valores da variável dependente , dados os valores da independente e vice-versa; reconhecer a variação conjunta das variáveis envolvidas em uma relação funcional, independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais ou expressões analíticas).
Santos (2011)	Processos do Pensamento Matemático Avançado na acepção de Tommy Dreyfus.	Auxiliar na compreensão das dificuldades que os alunos podem enfrentar, uma vez que o pensamento matemático avançado é composto de uma grande variedade de processos de interação .
Santos (2013)		Elaborar a sequência de atividades propostas.
Cruz (2016)	Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau.	Oportunizar aos estudantes assumirem a condição de investigadores , conforme a definição dada por Brousseau à situação didática, na qual o aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico como garantia de uma construção efetiva do conhecimento, podendo conjecturar, argumentar e validar suas hipóteses.

Fonte: Dados da pesquisa

Os dados evidenciados por meio do Quadro 14 revelam a presença de cinco teorias em articulação com a TRRS, sendo três da esfera da Didática da Matemática Francesa (Teoria das Situações Didáticas, Transposição Didática e Níveis de Conhecimento). A Teoria das Situações Didáticas foi a única mobilizada por mais de um autor. Os objetivos das articulações entre a TRRS e os diferentes referenciais são diversos: a elaboração de atividades (SANTOS, 2013), a complementação da análise dos dados (VAZ, 2008; SOUZA, 2010 e CRUZ, 2016), a evidência de aspectos que podem ter relação com as dificuldades dos estudantes (SANTOS, 2011) e a justificativa acerca de assumir a equação como uma noção matemática

(RIBEIRO, 2007). A seguir, apresentamos as considerações finais depreendidas de nossas análises.

Considerações Finais

Por meio do estudo realizado, pudemos notar, na esfera do GPEA, a carência por investigações de doutorado subsidiadas pela TRRS. Há espaço também para mais pesquisas documentais tendo por foco diferentes tipos de materiais didáticos, tais como: documentos diversos elaborado pelo professor para suas aulas e seus cursos, materiais elaborados para ambientes virtuais de aprendizagem. Salientamos ainda, como caminhos a serem trilhados a análise de materiais didáticos para a Educação Infantil

e para o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, tendo em vista o desenvolvimento do pensamento algébrico, desde o início da escolaridade, conforme preconizado pela Base Nacional Comum Curricular. A análise de diferentes tipos de materiais, sob a ótica da TRRS é uma abordagem de pesquisa importante, uma vez que seus resultados relativos à compreensão de como os diferentes registros e as diferentes representações são explorados nestes diversos materiais, permite aos professores identificar os registros não contemplados para incluí-los em seus trabalhos. Possibilita ainda ao pesquisador elaborar tanto materiais quanto formação de professores no intuito de municiá-los para uma abordagem mais completa, em sala de aula, dos diferentes objetos matemáticos, uma vez que ao priorizar representações em um registro em detrimento de outros possíveis alguns aspectos do objeto matemático acabam mais valorizados do que outros, sendo essencial, portanto, para a apreensão global deste objeto a complementaridade de registros.

Outra lacuna refere-se à realização de pesquisas nas quais os sujeitos são professores, focalizando diferentes objetos matemáticos, uma vez que, no corpus analisado há somente duas investigações tendo docentes como sujeitos e em ambas o objeto matemático explorado é inequação.

Em relação aos temas matemáticos que podem ainda ser explorados, destacamos, entre outros polinômios e equações algébricas; números complexos; outros elementos da Geometria Analítica no plano além da reta; aspectos algébricos relacionados à Teoria dos Conjuntos, Probabilidade, Estatística e Combinatória; progressões (Aritméticas e Geométricas), funções definidas por várias sentenças, funções injetora, sobrejetora e injetora, composição de funções, funções racionais e irracionais, crescimento e decréscimo de funções, binômio de Newton, razão e proporção, trigonometria e funções trigonométricas.

Acerca dos aspectos da teoria empregados, entendemos como relevantes para a área a realização de mais pesquisas enfatizando os procedimentos relacionados às representações gráficas contemplando tanto grandezas discretas quanto contínuas e

conversões de uma representação no registro gráfico para outro registro e vice-versa.

Finalmente, em relação à articulação da TRRS com outros referenciais teóricos, destacamos a possibilidade de emprego da Teoria dos Campos Conceituais, Teoria APOS (Ação, Processo, Objeto e Esquema), Mudança de Quadros, Três Mundos da Matemática, Modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK), entre outros.

Esperamos que este artigo possa servir de inspiração tanto para os pesquisadores do GPEA, quanto para a comunidade de Educação Matemática em nível mais amplo acerca de possibilidades de caminhos de investigação que, com o auxílio da TRRS ainda não foram trilhados e que sinalizam ter potencial de trazer avanços para a área.

Referências

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.

BATTAGLIOLI, Carla dos Santos Moreno. **Sistemas lineares na segunda série do Ensino Médio**: um olhar sobre os livros didáticos. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2008.

BIANCHINI Barbara Lutaif; LIMA, Gabriel Loureiro de Lima. Álgebra Linear: as investigações do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA) subsidiadas por teorias da Didática Francesa. In: **SEMINÁRIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA – LADIMA**, III., 2021. Evento online. Resumo expandido não publicado.

BIANCHINI, Barbara Lutaif; LIMA, Gabriel Loureiro de; MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. O Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA): mapeamento de algumas de suas produções. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 01-28, 2019.

BIEMBENGUT, Maria Salett. Mapeamento como princípio metodológico para a pesquisa educacional. In: MACHADO, Nilson José; CUNHA, Maria Ortegoza da. **Linguagem, conhecimento, ação**: ensaios de epistemologia e didática. São Paulo: Escrituras, 2003. p. 01-11.

CASTRO, Edson Eduardo. **Um estudo exploratório das relações funcionais e suas representações no terceiro ciclo do Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2011.

CONCEIÇÃO JUNIOR, Fernando da Silva. **Uma abordagem funcional para o ensino de inequações no Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2011.

CRUZ, Patricia de Souza Ferreira da. **Pensamento Algébrico e os Significados do Sinal de Igualdade: o uso da oralidade e da narrativa nas aulas de Matemática.** Dissertação (Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2016.

DIAS, Regina Aparecida Xavier Gomes. **Análise do conhecimento de professores sobre o ensino de inequações.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2014.

DINIZ, Michele Jesus. **A multiplicação nos livros do professor usados nos anos iniciais do Ensino Fundamental em uma cidade de Minas Gerais.** Dissertação (Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2015.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Ed.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.** São Paulo: Papirus, 2008. p. 3-11.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais.** São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. Sémiosis, pensée humaine et activité mathématique. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 6, n. 1, p. 126-143, 2010.

GONÇALVES, Renata Siano Gonçalves. **Um estudo com os números inteiros usando o programa Aplusix com alunos de 6ª série do**

Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2007.

GREGORUTTI, Juliana de Lima. **Construção dos Critérios de Divisibilidade com alunos de 5ª série do Ensino Fundamental por meio de Situações de Aprendizagem.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2009.

JORDÃO, Ana Lucia Infantozzi. **Um Estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2011.

MELO, José João de. **Docência de inequações no Ensino Fundamental da cidade de Indaiatuba.** Dissertação (Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2007.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. **Equação e seus multissignificados no ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico.** Tese (Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2007.

RODRIGUES, Salete. **Uma análise da aprendizagem de produtos notáveis com o auxílio do programa Aplusix.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2008.

SANTOS, Adriana Tiago Castro dos. **O Ensino da Função Logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do software GeoGebra.** Tese (Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2011.

SANTOS, Claudia Pereira dos. **Função seno: um estudo com o uso do software Winplot com alunos do Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2013.

SILVA, Alexandre de Paula. **Conceito de função: atividades introdutórias propostas no material de Matemática do ensino fundamental da rede pública estadual de São Paulo.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Pontifícia

Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2008.

SILVA, Raquel Santos. **Estudo da reta em Geometria Analítica**: uma proposta de atividades para o Ensino Médio a partir de conversões de registros de representação semiótica com o uso do software GeoGebra. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2014.

SILVA, Umberto Almeida. **Análise da abordagem de função adotada em livros didáticos de Matemática da Educação Básica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2007.

SOUZA, Claudia Vicente de. **A função exponencial no Caderno do Professor de 2008 da Secretaria do Estado de São Paulo**: análise de atividades realizadas por alunos da 2ª série do Ensino Médio. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2010.

VAZ, Rosana Aparecida da Costa. **SARESP/2005**: uma análise de questões de Matemática da 7ª série do Ensino Fundamental, sob a ótica dos níveis de mobilização de conhecimentos e dos Registros de Representação Semiótica. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2008.

Barbara Lutaif Bianchini: Licenciada (1978) e Bacharel (1978) em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Mestrado em Educação Matemática (1992) e Doutorado em Psicologia da Educação pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2001). Professora Associada da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Líder do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica - GPEA da PUC-SP, credenciado no CNPq e vice-líder do Grupo de Pesquisa em Matemática na Formação Profissional. Atua como professora no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP desde 2003.

Gabriel Loureiro de Lima: Bacharel (2001), licenciado (2005) e mestre (2004) em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas. Doutor em Educação Matemática (2012) pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professor do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP. Líder do Grupo de Pesquisa A Matemática na Formação Profissional e vice-líder do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica, ambos sediados na PUC-SP. Coordenador do Grupo de Trabalho Ciências Básicas e Matemática na Engenharia, vinculado à Associação Brasileira de Educação em Engenharia e vice coordenador do Grupo de Trabalho Educação Matemática no Ensino Superior da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.