

# O PENSAMENTO COMPUTACIONAL ENVOLVENDO A CONSTRUÇÃO DE FRACTAIS COM O GEOGEBRA

## Computational Thinking involving the construction of fractals with GeoGebra

Lara Martins Barbosa

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

### Resumo

Este artigo tem como objetivo apresentar e discorrer sobre aspectos do pensamento computacional que emergiram a partir do desenvolvimento de atividades que propunham a exploração e construção de fractais no *software* GeoGebra. As atividades foram propostas durante sessões de experimento de ensino a discentes do curso de Matemática da UNESP, Campus Rio Claro, SP. A empiria se deu por meio de sessões de ensino em que os seguintes procedimentos metodológicos de registro foram utilizados: filmagens de todas as sessões de ensino; captação da tela do computador; roteiro impresso das atividades; entrevistas após cada sessão; e escrita de diários de campo. Os resultados indicam que os diferentes métodos adotados para a construção dos fractais viabilizaram a manifestação de cinco aspectos do pensamento computacional, a saber: pensamento algorítmico; decomposição e generalização; padrões e abstração; representação e automação; e avaliação. Concluímos e apontamos indícios de que os aspectos podem se manifestar em conjunto e se complementarem.

**Palavras-chave:** Pensamento Computacional; Geometria Fractal; Sessões de Ensino; GeoGebra.

### Abstract

This article presents and discusses the affordances of computational thinking that emerged from the development of activities that proposed the exploration and construction of fractals in GeoGebra software. The activities were proposed during teaching experiment sessions to students of the Mathematics course at UNESP, Campus Rio Claro, SP. The studying empirical occurred through teaching sessions in which the following methodological procedures of registration were used: footage of all teaching sessions was used; computer screen capture; printed script of activities; interviews after each session; and writing field diaries. The results

indicate that the different ones adopted for constructing fractals enabled the manifestation of five aspects of computational thinking, namely: algorithmic thinking; decomposition and generalization; patterns and abstraction; representation and automation; and evaluation. We identify evidence that the affordances can manifest together and complement each other.

**Keywords:** Computational Thinking; Fractal Geometry; Teaching Sessions; GeoGebra.

### Introdução

A geometria fractal tem sido tema de diversos estudos nas subáreas de Matemática e Educação Matemática. Trabalhos nesses campos apresentam como tal geometria vem sendo abordada em diversos contextos de ensino e aprendizagem, sejam voltados para a formação continuada de professores da Educação Básica (ALMEIDA, 2006; BALDOVINOTTI, 2011), como motivação e introdução a conteúdos matemáticos (FARIA, 2012; MÉDICE JÚNIOR, 2014; MOREIRA 2017) ou então relacionados a elementos históricos da geometria fractal, assim como definições e construções de fractais utilizando diferentes métodos (BARBOSA, 2005; EBERSON, 2004).

Sinclair et al. (2016) argumentam que geometrias não euclidianas podem ser utilizadas como contraexemplos de um determinado conceito ou teorema da geometria euclidiana, tornando o ensino de Matemática mais produtivo. Na pesquisa apresentada neste artigo, a geometria fractal foi explorada a partir do estudo e construção de quatro fractais (Triângulo, Tetraedro e Tapete de Sierpinski e Esponja de Menger) associados ao conceito de pensamento computacional (PC) e com o uso do *software* GeoGebra.

Com o intuito de promover a inserção do PC no currículo escolar, inúmeras iniciativas têm surgido. Organizações como a *Computer Science Teachers Assosiation (CSTA)*, *The Royal Society*, *International Society for Technology in Education (ISTE)* fomentam ações que auxiliam à implementação de programas que estimulam o PC no ambiente escolar.

Assim, a questão que norteou este estudo foi: “Quais aspectos do PC emergem de estudantes de graduação em Matemática ao explorarem a geometria fractal com o *software GeoGebra?*”. Para buscar respostas à questão norteadora, foram realizadas sessões de experimentos de ensino que visaram a construção dos fractais já citados. Nesse contexto, o objetivo deste artigo é apresentar e discorrer sobre aspectos do PC que emergiram a partir do desenvolvimento de atividades que propunham a exploração e construção de fractais no *software GeoGebra*.

Na pesquisa de mestrado, cujo recorte estamos tratando aqui, os procedimentos metodológicos de registro utilizados para a produção dos dados foram: filmagens de todas as sessões de ensino, captação da tela do computador, roteiro impresso das atividades, entrevistas após cada sessão, e escrita de diários de campo. Assim, os dados que serão aqui discutidos são provenientes de videogravações do ambiente, captações da tela do computador, respostas das atividades e observações registradas nos diários de campo.

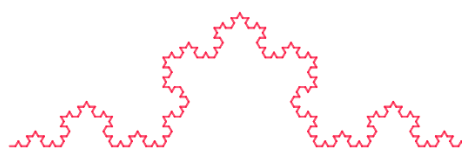
A seguir, abordamos alguns pontos acerca dos aportes teóricos com os quais dialogamos ao longo deste artigo.

### Estruturas fractais

Não se sabe ao certo quando a geometria fractal surgiu de fato, o que se tem são registros dos estudos de matemáticos, como o alemão Karl Weierstrass (1815 - 1897) e o sueco o sueco Helge von Koch (1870 - 1924), que investigavam determinadas funções, seus comportamentos e chegaram a construções que hoje chamamos de fractais. Um dos primeiros fractais descritos e definidos a partir de concepções geométricas recebeu o nome de Curva de Koch

(BARROS, 2017) e está representado na Figura 1.

Figura 1 - Curva de Koch



Fonte: Elaboração própria dos autores

A Curva de Koch aplicada às arestas de um triângulo equilátero gera o fractal que recebe o nome Floco de Neve. Esse fractal é gerado a partir de uma construção iterativa que se inicia com um triângulo equilátero (iteração zero). Na segunda iteração, cada aresta é dividida em três segmentos congruentes, os segmentos centrais serão base de novos triângulos equiláteros e posteriormente serão retirados. O mesmo processo é realizado em cada um dos novos segmentos. Assim, a cada iteração vão se criando curvas autossimilantes. A Figura 2 apresenta as primeiras iterações do fractal mencionado.

Figura 2 - Iterações do Floco de Neve



Fonte: Elaboração própria dos autores

O nome “fractais”, derivado do latim *fractus* surgiu em 1975 com o matemático Benoit Mandelbrot (1924 - 2010). Sua investigação se iniciou a partir de questões como: “Qual seria o comprimento da costa da Grã-Bretanha?”, em que procurava por simetrias através de escalas. Para Mandelbrot, o objetivo da geometria fractal é aproximar concepções de geometria das formas, objetos e fenômenos naturais. Um de seus livros clássicos (MANDELBROT, 1983) leva o título “A Geometria Fractal da Natureza<sup>1</sup>”, obra que deu ao matemático o título de pai dos fractais.

Em relação à definição de fractal, partindo da óptica matemática, não existe uma definição universalmente aceita. Há uma série de definições informais e o próprio

<sup>1</sup> The Fractal Geometry of Nature.

Mandelbrot reconhece a falta de rigor do seu tratado e faz o seguinte questionamento:

Devemos definir, de maneira rigorosa o que é uma figura fractal, para depois decidir se um objeto real é fractal conforme algum modelo? Pensando que tal formalismo seria prematuro, eu adotei um método diferente baseado em uma caracterização aberta, intuitiva, e com procedimentos sucessivos<sup>2</sup>. (MANDELBROT, 1993, p. 13, tradução nossa).

Mesmo que não se tenha uma definição universalmente aceita pelos matemáticos sobre o que seria um fractal, existem características e propriedades básicas que são empregadas na identificação de um objeto e figura fractal, como a autossemelhança, a complexidade infinita e a dimensão diferente da topológica e euclidiana (SABOGAL; ARENAS, 2011).

A autossemelhança pode ser “visualizada nas semelhanças identificadas através das escalas, de modo que partes menores dos objetos que vão compondo os níveis de um fractal se assemelham com o todo” (FARIA, 2012, p. 34). A complexidade infinita está “associada às infinitas iterações que ocorrem na construção de um fractal, pois ele é regido por um padrão que repete sua estrutura própria por uma quantidade ilimitada de vezes e que ocorre algébrica e geometricamente” (FARIA, 2012, p. 35). A dimensão fractal “representa o nível de irregularidade de um fractal” (BALDOVINOTTI, 2011, p. 31) fazendo com que tal dimensão possa “assumir valores fracionários, o que diferencia dos valores inteiros encontrados para as dimensões euclidianas” (BALDOVINOTTI, 2011, p. 31).

Desse modo, propondo uma abordagem didática, dizemos que “os fractais são formas geométricas que repetem sua estrutura em escalas cada vez menores” (STEWART, 1996, p. 12). E ainda, “quando variamos a ‘escala de observação’, dentro de certos limites e continuamos a encontrar o

mesmo tipo de geometria, dizemos estar diante de uma estrutura fractal” (RICINERI, 1990, p. 84).

A seguir, apresentamos fundamentos do PC que nortearam a análise dos dados deste estudo.

### Aspectos do pensamento computacional

O termo pensamento computacional, tradução do inglês *computational thinking*, foi evidenciado em 2006 por Jeannette M. Wing. Para essa autora, o PC é “Uma habilidade fundamental, não mecânica. Uma habilidade fundamental é algo que todo ser humano deve saber para atuar na sociedade moderna<sup>3</sup>” (WING, 2006, p. 35, tradução nossa, grifo do autor). Para Wing, o PC também envolve processos de resolução, abstração e decomposição de problemas, projeção de sistemas, compreensão de comportamentos, pensamentos recursivos e leva em consideração o raciocínio heurístico. Assim como o conceito de fractal, não há um consenso entre os pesquisadores sobre a definição de PC. O que se tem são encaminhamentos na busca de entender as especificidades desse pensamento e como ele pode ser incorporado no currículo escolar.

As organizações *International Society for Technology in Education* (ISTE) e *Computer Science Teachers Assosiation* (CSTA) vêm trabalhando na identificação de conceitos e concepções do PC e em sua operacionalização. Pesquisadores dessas organizações estabeleceram uma definição para o termo voltado para o contexto de Educação Básica. Eles defendem que o PC é um processo de resolução de problemas e nesse processo podem ser identificados nove aspectos: coleta de dados, análise de dados, representação de dados, decomposição do problema, abstração, algoritmos e procedimentos, automação, paralelização e simulação. (ISTE/CSTA, 2011). Na mesma direção, Brennan e Resnick (2012) apontam sete aspectos que estão presentes no PC e acreditam fazer parte da lógica de

<sup>2</sup> ¿Hace falta definir de manera rigurosa lo que es una figura fractal para luego decir que un objeto real es fractal si lo es la figura que conforma su modelo? pensando que tal formalismo sería prematuro, he adoptado un método distinto basado en

una caracterización abierta, intuitiva, y procediendo por toques sucesivos.

<sup>3</sup> *Fundamental, not rote skill.* A fundamental skill is something every human being must know to function in modern society.

programação: sequências, loops, paralelismos, eventos, condicionais, operadores e dados. Já Gadanidis (2017) defende a presença de cinco aspectos do PC que estão presentes no processo de ensino e aprendizagem de Matemática: agenciamento, acesso, abstração, automação e audiência.

A partir dos aspectos apresentados nesses diferentes estudos, podemos notar que Brennan e Resnick (2012) apontam aspectos que, de certa forma, estão voltados para um ambiente de programação de códigos, ou seja, computacional. Já os aspectos mencionados em ISTE/CSTA (2011) e Gadanidis (2017) estão voltados para um ambiente educacional.

Neste estudo, após a interpretação e comparação dos aspectos apresentados por Brennan e Resnick (2012); ISTE/CSTA (2011) e Gadanidis (2017), chegamos em cinco (Quadro 1) que consideramos presentes em um contexto na qual se trabalha a construção de fractais no GeoGebra.

**Quadro 1** - Aspectos relacionados ao pensamento computacional

Aspecto	Definição
<b>Pensamento algorítmico</b>	Representa os passos lógicos de um determinado processo, indicando as diversas ações e decisões que devem ser executadas para resolver um dado problema de forma eficaz.
<b>Decomposição e generalização</b>	Ato de dividir dados, problemas e processos em componentes menores e mais fáceis de serem solucionados a fim de encontrar uma solução geral.
<b>Padrões e abstração</b>	Ação de encontrar uma solução, dar significado a ela e fazer com que ela seja válida para diferentes problemas.
<b>Representação e automação</b>	Representar o conhecimento por meio de uma ferramenta.
<b>Avaliação</b>	Forma de análise, apreciação e julgamento dos resultados obtidos.

Fonte: Adaptado de BARBOSA (2019)

Ao definirmos tais aspectos, buscamos categorizá-los de acordo com as atividades propostas nas sessões de experimento de ensino. Julgamos que a decomposição e generalização devem ser analisadas de forma conjunta, uma vez que, ao se trabalhar com fractais, a partir do momento que se decompõe tais objetos levando em conta suas iterações, é possível generalizar várias características, como a quantidade de figuras, perímetro, área, volume e a própria lei de formação de cada um. Já a representação e automação serão analisadas em conjunto, pois consideramos que o *software* GeoGebra foi utilizado para resolver as atividades, potencializando o processo de automação.

A seguir, apresentamos os participantes da pesquisa e como se constituíram as sessões de ensino.

### Os participantes e as sessões de ensino

Os participantes deste estudo foram graduandos do curso de Matemática<sup>4</sup> da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Campus Rio Claro - SP, que estavam cursando a disciplina de Geometria Euclidiana Plana no segundo semestre de 2017.

Uma oficina, de exploração e construção do Fractal Árvore Pitagórica, foi realizada com toda a turma da disciplina. Após a oficina, convidamos os alunos para participarem de sessões de experimento de ensino que visavam abordar a exploração e construção de outros fractais.

Steffe e Thompson (2000, p. 273, tradução nossa) destacam que

Um experimento de ensino envolve uma sequência de sessões de ensino (Steffe, 1983). Uma sessão de ensino inclui um agente de ensino, um ou mais alunos, uma testemunha das sessões de ensino e um método de gravação do que acontece durante a sessão. Esses registros, se disponíveis, podem ser usados na preparação de sessões subsequentes, bem como na realização de uma análise conceitual retrospectiva do experimento de ensino. Estes

<sup>4</sup> Na UNESP, Campus Rio Claro – SP, no curso de Matemática, não há necessidade de fazer uma opção formal pela modalidade licenciatura ou bacharelado, pois concluídas

as disciplinas exigidas em uma delas, se recebe o título correspondente, podendo realizar uma complementação posterior para obtenção do título na outra modalidade.

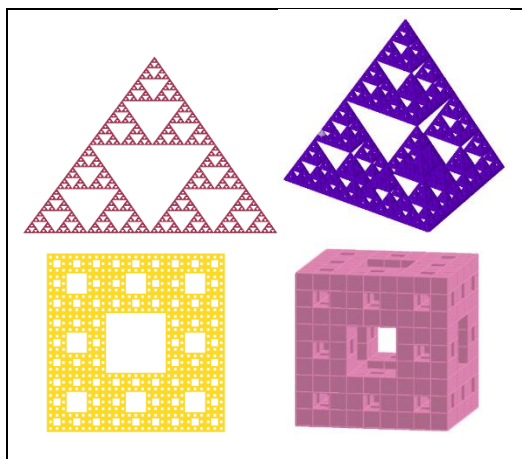
elementos são pertinentes para todos os experimentos de ensino<sup>5</sup>.

Vale mencionar que o que estamos chamando de experimento de ensino neste estudo é uma “adaptação” do que Steffe e Thompson (2000) sugerem como metodologia, uma vez que durante as sessões não se contou com uma testemunha e que o período do experimento foi inferior a um semestre ou um ano, como estabelecido pelos pesquisadores.

No total, seis alunos efetivamente aceitaram o convite para participar das sessões de ensino. Os discentes trabalharam em duplas durante quatro sessões, que totalizaram quatro atividades matemáticas propostas. Cada atividade foi investigada pelas duplas em sessões distintas de aproximadamente duas horas de duração. A opção de trabalhar em duplas se deu pelo fato de concordamos que “dois alunos trabalhando juntos [podem produzir] mais verbalização do que apenas um” (MAZZI, 2014, p.41).

Cada sessão de ensino contou com a exploração e construção de um fractal. As atividades foram propostas na seguinte ordem: Triângulo, Tetraedro e Tapete de Sierpinski e Esponja de Menger, fractais apresentados na Figura 3.

Figura 3 - Fractais explorados no estudo



Fonte: Adaptado de BARBOSA (2019)

Tais fractais foram escolhidos por serem ditos geométricos<sup>6</sup> e a ordem proposta para as construções foi articulada com o objetivo de explorar o fractal no plano (2D) e posteriormente no espaço (3D).

As atividades foram elaboradas a partir de uma proposta pensando na manipulação, exploração e investigação dos padrões fractais por parte dos alunos, com o objetivo de criarem generalizações e indicarem características comuns nos fractais trabalhados. Dessa forma, as atividades tinham propostas comuns, variando apenas em relação ao fractal a ser analisado e à janela do GeoGebra em que foram explorados, mais especificamente Janela de Visualização 2D ou 3D. Em todas elas, os alunos realizaram experimentação-com-GeoGebra (MAZZI, 2014) e, também, houve momentos em que os estudantes escreviam suas observações, respondendo alguns questionamentos propostos em uma folha de atividade que continha perguntas relacionadas as iterações, comprimento, área ou volume e dimensão.

A seguir, apresentamos parte dos dados produzidos e fazemos uma análise dos aspectos que emergiram durante as sessões de ensino de uma das duplas.

### Apresentação e análise dos dados

Devido a quantidade restrita de páginas deste artigo, optamos por apresentar os dados obtidos a partir das quatro sessões de ensino de uma das três duplas que participaram da pesquisa. As conclusões a que chegamos abarcam características que de forma geral foram comuns às duplas, sendo assim, tal escolha não influencia na análise aqui apresentada.

À procura de uma resposta à pergunta diretriz da investigação em destaque: “*Quais aspectos do Pensamento Computacional emergem de estudantes de graduação em Matemática ao explorarem a Geometria Fractal com o software GeoGebra?*”, construímos diagramas apoiados teórica e metodologicamente nos estudos de Schoenfeld (1992) e Wilkerson et al. (2016)

<sup>5</sup> A teaching experiment involves a sequence of teaching episodes (Steffe, 1983). A teaching episode includes a teaching agent, one or more students, a witness of the teaching episodes, and a method of recording what transpires during the episode. These records, if available, can be used in preparing subsequent episodes as well as in conducting a

retrospective conceptual analysis of the teaching experiment. These elements are germane to all teaching experiments.

<sup>6</sup> Um fractal é considerado geométrico quando sua construção é realizada a partir de recursos geométricos, como pontos, segmentos e polígonos (BESSA JUNIOR, 2011).

e que mostram evidências da presença de aspectos do PC durante as construções dos fractais.

Os diagramas estão estruturados da seguinte maneira: as linhas horizontais se referem aos aspectos do PC, já as colunas representam o tempo de execução da construção do fractal durante a sessão de ensino. Cada divisão nas colunas representa um minuto e as células coloridas em azul indicam o aspecto identificado naquele determinado minuto. Foi considerado para análise o momento em que as duplas iniciam uma construção e a terminam com sucesso<sup>7</sup>.

Ao longo das construções, dois recursos do GeoGebra foram utilizados por todas as duplas durante as atividades, o *Criar uma Nova Ferramenta* e o *Controle Deslizante*. A possibilidade de criação de novas ferramentas pelo usuário é útil quando se tem o objetivo de repetir diversas vezes

uma mesma construção e o uso de um controle deslizante garante dinamicidade às construções, possibilitando realizar variações, manualmente ou automaticamente, em objetos. Por esse motivo, o momento em que tais recursos foram utilizados estão em destaque nos diagramas nas cores amarela e laranja, sendo a primeira referente a criação da nova ferramenta e a segunda indica a criação do controle deslizante.

Na primeira sessão de ensino, a qual teve como atividade final a construção do Triângulo de Sierpinski, a dupla aqui considerada levou 21 minutos para concluí-la, até a quarta iteração. Esses 21 minutos de manipulação no *software* se transformaram no diagrama apresentado na Figura 4, que revela os aspectos do PC que emergiram a cada minuto de trabalho.

**Figura 4** - Aspectos do PC que emergiram da construção do Triângulo de Sierpinski

Pensamento algorítmico																															
Decomposição e Generalização																															
Padrões e Abstração																															
Representação e Automação																															
Avaliação																															

Amarelo: Momento de criação da nova ferramenta. Laranja: Momento de criação do controle deslizante.

Fonte: Adaptado de BARBOSA (2019)

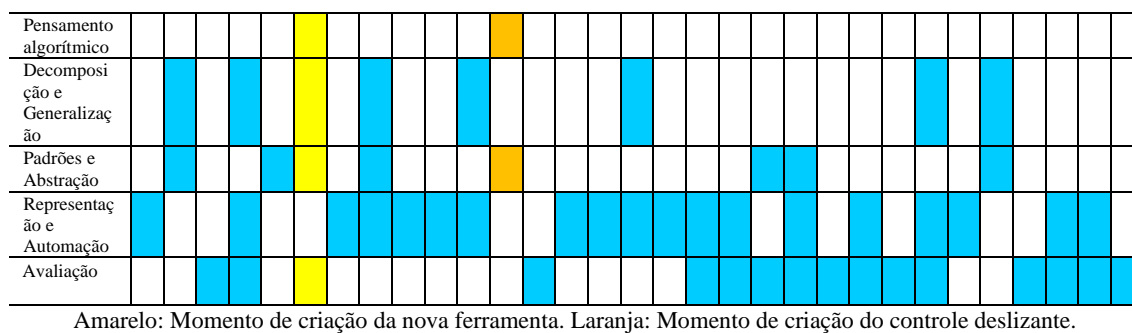
Analisando o diagrama, notamos que a **representação e automação** emergiu em quase todo o momento de construção, o que pode ser identificado em falas como “*Selecione tudo e faz direto!*” ou então “*Será que dá para selecionar várias de uma vez? Ah, dá sim!*”, pronunciadas em diversos momentos. Note que os momentos de **avaliação** aparecem apenas duas vezes antes da criação do controle deslizante. E os momentos de **decomposição e generalização** apenas uma vez. Acreditamos que tal característica se dê pelo

fato da criação do controle se relacionar diretamente com a programação destinada a exibição dos objetos, o que faz com que a avaliação passe a ser realizada de forma rotineira.

Na segunda sessão de ensino, que teve como atividade final a construção do Tetraedro de Sierpinski, a dupla levou 31 minutos para construir três iterações do fractal. O diagrama a seguir (Figura 5) destaca os aspectos do PC que emergiram durante cada minuto dessa construção.

<sup>7</sup> O sucesso na construção indica a criação do fractal juntamente com um *GIF* que faz com que as iterações do fractal sejam identificadas.

**Figura 5 - Aspectos do PC que emergiram da construção do Tetraedro de Sierpinski**



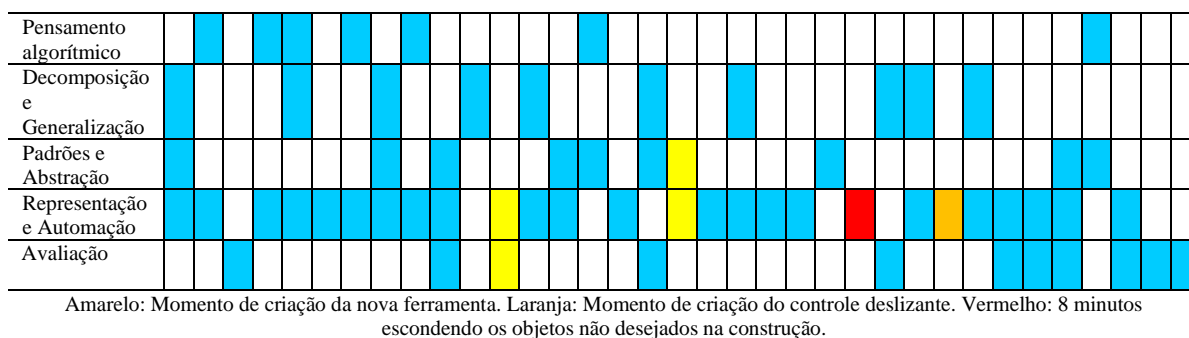
Fonte: Adaptado de BARBOSA (2019)

O diagrama aponta que o **pensamento algorítmico** emergiu apenas durante os momentos de criação da ferramenta e do controle deslizante, indicando que os passos lógicos e a dinamicidade da construção foram pensados durante esses momentos. Já a **representação e automação** se fez presente praticamente durante todo o tempo de criação. O processo de **avaliação** se intensificou nos 14 minutos finais da construção, momento em que três iterações do fractal já haviam sido construídas e a

dupla finalizou a atividade condicionando os objetos que seriam exibidos a cada iteração de acordo com o valor do controle deslizante.

Na terceira sessão de ensino, que teve como atividade final a construção do Tapete de Sierpinski, a dupla levou 42 minutos para construir três iterações do fractal. Esses 42 minutos de manipulação no *software* se transformaram no diagrama apresentado na Figura 6, que destaca os aspectos do PC que emergiram a cada minuto.

**Figura 6 - Aspectos do PC que emergiram da construção do Tapete de Sierpinski**



Fonte: Adaptado de BARBOSA (2019)

Diferente das análises anteriores, nessa terceira atividade o **pensamento algorítmico** emergiu em mais momentos se comparado às outras sessões. Um diferente comando foi utilizado pela dupla nessa construção, a ferramenta *Homotetia*. Acreditamos que tal pensamento tenha se intensificado pela mudança de estratégia utilizada, interferindo nas tomadas de decisões. A **avaliação** emergiu com maior frequência nos minutos finais da construção e logo após a criação do controle deslizante, momento em que a exibição dos objetos

começa a ser condicionada. Nota-se que **representação e automação** é evidenciada durante toda a construção.

Na quarta e última sessão de ensino, que teve como atividade final a criação da Esponja de Menger, a dupla levou 14 minutos para concluir a construção e geração do *GIF* com uma iteração. Esses 14 minutos de manipulação no *software* se transformaram no diagrama apresentado na Figura 7, que destaca os aspectos do PC que emergiram a cada minuto.

**Figura 7** - Aspectos do PC que emergiram da construção da Esponja de Menger

Pensamento algorítmico															
Decomposição e Generalização															
Padrões e Abstração															
Representação e Automação															
Avaliação															

Laranja: Momento de criação do controle deslizante.

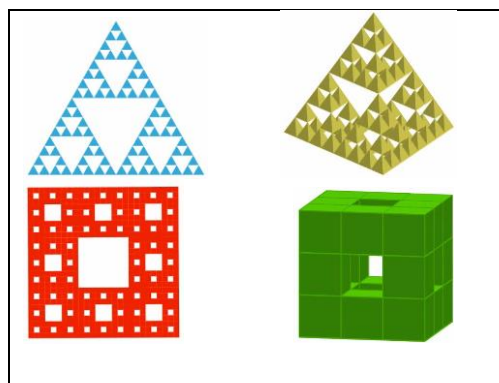
Fonte: BARBOSA (2019)

Ressaltamos que neste diagrama não há destaque para a criação de uma nova ferramenta pois tal método não foi utilizado. Devido à dificuldade da dupla em manipular uma grande quantidade de objetos no *software*, após várias tentativas de construção, eles optaram por construir apenas uma iteração do fractal, não sendo necessária a criação de uma nova ferramenta, visto que tal criação só faz sentido quando o objetivo é reproduzir ações anteriores.

Destacamos, que a **decomposição e generalização**, e a **avaliação**, foram os únicos aspectos que emergiram nos minutos finais da construção do fractal. Evidenciamos, que ao final dessa atividade os alunos se frustraram por terem concluído a construção com apenas uma iteração e alegaram que o *software* GeoGebra ainda apresenta falhas ao se trabalhar com uma quantidade considerável de objetos visíveis.

O resultado final das construções dos fractais criados nas quatro sessões de ensino descritas pode ser visto na Figura 8.

**Figura 8** - Construções concluídas



Fonte: Adaptado de BARBOSA (2019)

A figura apresenta a quarta iteração do Triângulo de Sierpinski, a terceira iteração do Tetraedro, a terceira iteração do Tapete e a primeira iteração da Esponja de Menger, respectivamente. A seguir, apresentamos algumas considerações finais acerca do estudo realizado.

### Considerações finais

De maneira geral, o **pensamento algorítmico** se fez presente nos momentos de criação de estratégias eficazes e eficientes voltadas para a construção de iterações dos fractais. Assim, esse aspecto emergiu durante a identificação e elaboração de sequências de eventos para alcançar uma solução para as atividades propostas.

Nas ocasiões em que as duplas refletiam e consideravam os elementos presentes nos fractais, o aspecto **decomposição e generalização** pôde ser notado. Na busca por soluções em termos genéricos, os alunos notaram que os fractais compartilhavam características comuns e que métodos de construção poderiam ser aplicados em diferentes situações. Relacionando esses métodos de construção com a identificação de propriedades comuns e essenciais dos fractais explorados, o aspecto **padrões e abstração** emergiu, auxiliando na descoberta de uma relação entre as construções e as ferramentas utilizadas no GeoGebra.

Consideramos, que o uso de tais ferramentas do *software* contribuiu para a **representação e automação**, visto que a automatização pelos meios computacionais favoreceu os processos de criação e representação de elementos da geometria fractal, como o caso em que a criação e aplicação de novas ferramentas permitiu que



ações recursivas fossem executadas de modo mecânico. Ao analisar o aspecto **avaliação**, acreditamos que ele emergiu durante os momentos de análise de decisões e resultados obtidos durante os processos de criação relativos à eficiência e utilização dos recursos disponíveis no GeoGebra. Tais momentos se evidenciaram nos minutos finais das construções.

Assim, consideramos que a partir dos dados e da construção dos diagramas é possível encontrar indícios de que os aspectos, na maioria das vezes, não se manifestam de maneira isolada, elas são miscíveis e podem se complementar e/ou se fortificar.

## Referências

- ALMEIDA, A. A. O. **Os Fractais na formação docente e sua prática na sala de aula**. 2006. 221f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.
- BALDOVINOTTI, N. J. **Um estudo de fractais geométricos na formação de Professores de Matemática**. 2011. 204f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2011.
- BARBOSA, L. M. **Aspectos do Pensamento Computacional na Construção de Fractais com o software GeoGebra**. 2019. 168f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2019.
- BARBOSA, R. M. **Descobrendo a Geometria Fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- BARROS, V. F. **Aplicação de Curvas Fractais em Elementos Convencionados para o Projeto de FSS Miniaturizada e com Estabilidade Angular**. 2017. 114f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica e da Computação) – Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017.
- BESSA JUNIOR, F. A. **Uma Abordagem do Infinito no Caminho da Cardinalidade: Um Estudo Endereçado aos Professores de Matemática do Ensino Básico**. 2011. 107f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.
- BRENNAN, K.; RESNICK, M. New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. **AERA 2012**, Vancouver, Canadá, 2012. Disponível em: <[http://web.media.mit.edu/~kbrennan/files/Brennan\\_Resnick\\_AERA2012\\_CT.pdf](http://web.media.mit.edu/~kbrennan/files/Brennan_Resnick_AERA2012_CT.pdf)>. Acesso em: 01 jul. 2018.
- EBERSON, R. R. **Um Estudo sobre a construção de Fractais em ambientes computacionais e suas relações com transformações geométricas no plano**. 2004. 177f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.
- FARIA, R. W. S. **Padrões Fractais: Contribuições ao processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos**. 2012. 197f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2012.
- GADANIDIS, G. Five Affordances of Computational Thinking to Support Elementary Mathematics Education. **Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching**, v.36 n.2 p.143-151, 2017.
- ISTE/CSTA. **Computational Thinking Teacher Resource**. 2ed., 2011. Disponível em: <[https://id.iste.org/docs/ct-documents/ct-teacher-resources\\_2ed-pdf.pdf?sfvrsn=2](https://id.iste.org/docs/ct-documents/ct-teacher-resources_2ed-pdf.pdf?sfvrsn=2)>. Acesso em: 26 set. 2019.
- MANDELBROT, B. **Les objets fractals. Forme, hasard et dimension**. Tusquets editores, S. A, 1993.
- MANDELBROT, B. **The fractal geometry of nature**. New York: WH Freeman and Co., 1983.
- MAZZI, L. C. **Experimentação-com-GeoGebra: revisitando alguns conceitos da análise real**. 2014. 136f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2014.
- MÉDICE JÚNIOR, F. **Fractais: Motivando a Matemática no Ensino Médio**. 2014. 67f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2014.

MOREIRA, V. S. S. S. **Geometria Fractal na Educação Básica**. 2017. 78f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

SABOGAL S., ARENAS G. **Una Introducción a la geometría Fractal**. Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, 2011. Apostila.

SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), **Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning**, p. 334-370, 1992. New York: MacMillan.

SINCLAIR, N.; BARTOLINI M. G. B.; VILLIERS, M.; JONES, K.; KORTENKAMP, U.; LEUNG, A.; OWENS, K.; Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team

Report. **ZDM Mathematics Education**. n. 48, p. 691-719, 2016.

STEWART, I. **Os Números da Natureza: a realidade irreal da imaginação matemática**. Rio de Janeiro: Rocco, 1996.

STEFFE, L.; THOMPSON, P.W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. **Research design in mathematics and science education**. Hillsdale, NJ, 2000.

WILKERSON, M. H., ANDREWS, C., SHABAN, Y., LAINA, V., & GRAVEL, B. E. What's the technology for? Teacher attention and pedagogical goals in a modeling-focused professional development workshop. In the **Journal of Science Teacher Education**, 27(1), p. 1-23, 2016.

WING, J. M. Computational thinking. **Communications of the ACM**, New York, v. 49, n. 3, p. 33-35, 2006.

---

**Lara Martins Barbosa:** Doutoranda em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (IGCE - UNESP - Campus Rio Claro) e mestre pelo mesmo programa. Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU). [lara-barbosa@hotmail.com](mailto:lara-barbosa@hotmail.com)

**Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva:** Professor Associado do Departamento de Educação da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), Campus São José do Rio Preto, SP (IBILCE). Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP (IGCE). Docente e coordenador Adjunto do Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos da UNESP (IBILCE-FEIS-FEG). Possui Graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela UNESP de Rio Claro (2002), Mestrado em Educação Matemática pela UNESP de Rio Claro (2006) e Doutorado em Education Studies pela The University of Western Ontario (2012), (Western University), do Canadá. [ricardo.scucuglia@unesp.br](mailto:ricardo.scucuglia@unesp.br)