

O PENSAMENTO ALGÉBRICO SEGUNDO A TEORIA DA OBJETIVAÇÃO: ANÁLISE DE EPISÓDIOS DE TRABALHO CONJUNTO NO 5.º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

The algebraic thinking according to the theory of objectivation: analysis of joint working episodes in the 5th year of primary education

Jéssica Goulart da Silva

Ricardo Fajardo

Resumo

Neste artigo apresenta-se a análise das aprendizagens algébricas evidenciadas em episódios de trabalho conjunto com um trio de estudantes do 5.º ano do Ensino Fundamental. Para tanto, recorre-se às camadas de generalidade do pensamento algébrico da Teoria da Objetivação. Analisaram-se as aprendizagens algébricas em episódios de trabalho conjunto, seguindo os movimentos recursivos da Análise Textual Discursiva e considerando as unidades de análise: episódios de trabalho conjunto e aprendizagem algébrica. Como resultados, evidenciaram-se indícios de aprendizagem algébrica dos estudantes no trabalho conjunto, tanto em uma camada factual quanto contextual de compreensão. E a regularidade das sequências revelou-se mais facilmente objetivada pelos estudantes. No entanto, após algumas intervenções da pesquisadora, a relação covariacional das sequências veio à tona. Diante disso, considerou-se importante que pesquisas futuras visem investigar outras possibilidades de intervenções dos professores no trabalho conjunto com os estudantes, com vistas à emergência do pensamento algébrico covariacional.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem de Álgebra; Anos Iniciais do Ensino Fundamental; Pensamento algébrico covariacional; Trabalho conjunto.

Abstract

This article presents the analysis of algebraic learning evidenced in episodes of joint work with a trio of students from the 5th year of elementary school. For this purpose, the layers of generality of algebraic thinking of the Theory of Objectification are used. Algebraic learning was

analyzed in episodes of joint work, following the recursive movements of Textual Discursive Analysis and considering the units of analysis: episodes of joint work and algebraic learning. As a result, evidence of students' algebraic learning in joint work was evidenced, both in a factual and contextual layer of understanding. And the regularity of the sequences proved to be more easily objectified by the students. However, after some interventions by the researcher, the covariational relationship of the sequences came to the fore. Given this, it was considered important that future research aims to investigate other possibilities of interventions by teachers in working together with students, with a view to the emergence of covariational algebraic thinking.

Keywords: Algebra teaching and learning. Early Years of Elementary School. Covariate algebraic thinking. Joint Work.

Introdução

Nesta produção visamos enfocar a temática do pensamento algébrico nos Anos Iniciais (AI) do Ensino Fundamental (EF)¹, tendo em vista a seguinte questão de pesquisa: se e como indícios de aprendizagem algébrica são evidenciados por estudantes do 5.º ano do EF em episódios de trabalho conjunto que abrangem o pensamento algébrico covariacional, adaptados segundo a Teoria da Objetivação (TO), de Luis Radford? Diante disso, neste trabalho, apresentamos e analisamos as aprendizagens algébricas em episódios de trabalho conjunto com um trio de estudantes

¹ Abrange do 1.º ao 5.º ano do EF.

do 5.º ano do EF². E abordamos, já na introdução, entendimentos relacionados ao pensamento algébrico e à aprendizagem algébrica, segundo a TO de Luis Radford.

Radford (2006, p. 2) compreende pensamento algébrico sob a ótica da TO e considera-o como uma “[...] forma particular de refletir matematicamente [...]”. O autor concebe a aprendizagem de Álgebra como a tomada de consciência de objetos algébricos e sistemas de pensamento algébrico, o que ocorre dentro de um processo coletivo de reflexão – um trabalho conjunto.

Assim, conforme Radford (2009), para levar os estudantes ao encontro de formas de pensamento algébrico – que constitui a aprendizagem algébrica –, é necessário compreender que esse pensamento apresenta diferentes sedimentações conceituais de distintas camadas de generalidade, a saber: Pensamento Algébrico Factual, Pensamento Algébrico Contextual e Pensamento Algébrico Padrão. Para Radford (2009), tal generalidade, além de poder ser expressa pela linguagem verbal (oral e escrita), pode manifestar-se via linguagem não verbal, gestual.

Sendo assim, no presente artigo, de forma geral, objetivamos apresentar a análise das aprendizagens algébricas evidenciadas em episódios de trabalho conjunto com um trio de estudantes do 5.º ano do EF, seguindo, de forma específica, estes objetivos: 1) identificar tarefas que abrangem pensamento algébrico covariacional de pesquisas em que se considera o pensamento algébrico nos AI do EF; 2) adaptar e desenvolver essas tarefas com estudantes do 5.º ano do EF, seguindo o *design* de trabalho conjunto em sala de aula de Luis Radford; 3) identificar e analisar os indícios de aprendizagem algébrica dos estudantes, segundo as camadas de generalidade de Radford.

Pensamento algébrico segundo a Teoria da Objetivação: entendimentos necessários

Na TO, pensamento é compreendido como uma *praxis cogitans* mediatizada, ou seja, é “[...] uma reflexão mediatizada de acordo com a forma ou modo de trabalho dos indivíduos” (RADFORD, 2011, p. 316). Tal reflexão é compreendida como “[...] um movimento dialético entre a realidade histórica e culturalmente constituída e o indivíduo que a retrata e/ou a modifica conforme suas próprias interpretações subjetivas, ações e sentimentos” (p. 317). Já a natureza mediada do pensamento refere-se ao fato de a TO compreender os artefatos – objetos feitos por seres humanos, itens de interesse cultural ou histórico – “como parte constitutiva e consubstancial do pensamento, uma vez que pensamos com e por meio de artefatos culturais” (p. 316).

Além disso, convém considerar que o pensamento não é meramente gerado ao longo do trabalho humano, pois as formas de trabalho dos indivíduos imprimem sua marca no pensamento e modificam o saber. Essas formas que o trabalho conjunto assume dependem dos Sistemas Semióticos de Significação Culturais (SSSC), definidos em Radford (2018) como superestruturas simbólicas dinâmicas que englobam concepções culturais sobre o mundo e os indivíduos. De maneira mais específica, os SSSC reúnem ideias sobre coisas no mundo, sobre a verdade, sobre os indivíduos; métodos de pesquisa; e meios legítimos de representação do conhecimento, o que se constitui como “matéria-prima” cultural a partir da qual os sujeitos desenham as ideias do que eles são.

Dessa interação, são geradas novas formas de trabalho e modos de conhecer, com base na dimensão histórico-cultural específica. O autor compreende que o pensamento algébrico tem as seguintes camadas de generalidade: Pensamento Algébrico Factual, Pensamento Algébrico Contextual e Pensamento Algébrico Padrão, que serão descritas e exemplificadas a seguir.

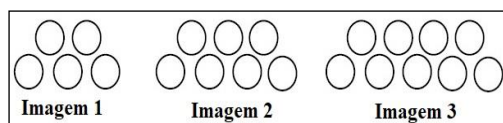
Para descrever essas camadas de generalidade do pensamento algébrico, em Radford (2009) constam as estratégias de estudantes da *Grade 9*³, trabalhando em

² Na dissertação da primeira autora (SILVA, 2019) foram analisadas as aprendizagens algébricas em episódios de trabalho conjunto com dois trios de estudantes do 5.º ano do EF. Este artigo é um recorte dessa dissertação.

³ Optamos por um exemplo no Ensino Médio estadunidense (primeiro ano) para poder evidenciar as três camadas de generalidade, já que nos AI do EF não se aborda

grupos de duas ou três pessoas em uma tarefa que trata de generalização de padrões e, na sua primeira parte, consiste em desenhar as imagens 4 e 5 de uma sequência e descobrir o número de círculos nas imagens 10 e 100. A segunda parte consiste em escrever uma mensagem para um aluno de outra turma, indicando como descobrir o número de círculos em qualquer imagem, e, em seguida, escrever uma fórmula algébrica para o número de círculos na imagem n (Figura 1).

Figura 1 – A sequência da tarefa de generalização do padrão



Fonte: Radford (2009, p. 6, tradução Babylon)

A camada de Pensamento Algébrico Factual, segundo Radford (2009), envolve pensar algebricamente a indeterminação, o desconhecido (a incógnita), mas de maneira implícita. Gestos e palavras constituem a essência semiótica dos estudantes. Assim, eles conseguem responder a primeira parte da tarefa representada na imagem 2, ou seja, conseguem desenhar as imagens 4 e 5, pois percebem que o número de círculos aumenta em dois, de uma imagem a outra. Os estudantes também são capazes de objetivar uma regularidade: “[...] a relação entre o número da imagem e o número de círculos nas suas linhas” (RADFORD, 2009, p. 7)⁴. Contudo, identificar a regularidade não é suficiente para que consigam determinar o número de círculos nas imagens 100, 1 000 ou 10 000, ou seja, apenas essa identificação não garante uma generalização.

Na camada de Pensamento Algébrico Contextual, exposta em Radford (2009), a tarefa exige que os alunos vão além de imagens particulares e lidem com um novo objeto: uma figura geral. Desse modo, a indeterminação torna-se parte do discurso explícito da camada de pensamento algébrico, e os alunos são capazes de desenvolver a segunda parte da atividade, ou seja, construir uma mensagem (fórmula) que

possa ser utilizada para calcular o número de círculos de qualquer imagem. Assim, as fórmulas começam a ser expressas de forma perceptual, baseadas em termos-chave, como “superior” e “inferior”, conforme o seguinte exemplo: “[...] Você tem que adicionar um círculo a mais do que o número da imagem na linha superior e adicionar um círculo a mais do que a linha superior na parte inferior” (RADFORD, 2009, p. 9)⁵.

Na camada de Pensamento Algébrico Padrão, conforme abordado em Radford (2009), há uma mudança drástica no modo de designação dos objetos. O estudante conseguirá escrever uma fórmula para representar o número de círculos da imagem n da seguinte forma: $(n + 1) + (n + 2)$. Esta expressão é mais evoluída do que a utilizada pelo estudante na camada de pensamento algébrico contextual, uma vez que agora a linguagem tem maior poder de síntese – a linguagem simbólica algébrica, baseada em sinais alfanuméricos.

Metodologia

Nossa pesquisa tem uma abordagem qualitativa, com dados predominantemente descritivos, interpretativos e com ênfase no significado, conforme Bogdan e Biklen (1994). A produção desses dados se caracteriza, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), como naturalista ou de campo, pois eles provêm do território dos sujeitos da pesquisa – no nosso caso, diretamente da sala de aula da primeira autora (pesquisadora) com estudantes do 5.º ano do EF.

O movimento metodológico inicial da pesquisa, de acordo com Moraes e Galiuzzi (2016), abrange a constituição do *corpus* – seleção dos dados a serem analisados. Os dados que constituem o *corpus* desta pesquisa resultaram de episódios de trabalho conjunto em sala de aula, constituídos pelas produções verbais, orais e escritas, e não verbais – gestuais – dos estudantes e da pesquisadora, ao resolverem tarefas que visam à emergência do pensamento algébrico covariacional.

generalização algébrica, que abrange o Pensamento Algébrico Padrão.



⁴ Texto original: “[...] relationship between the number of the figure and the number of circles in its rows” (RADFORD, 2009, p. 7).



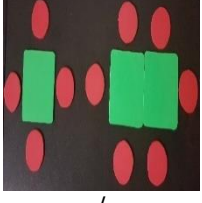
⁵ Texto original: “[...] You have to add one more circle than the number of the figure in the top row, and add one more circle than the top row to the one on the bottom” (RADFORD, 2009, p. 9).

Tais tarefas foram selecionadas ao longo da constituição do referencial teórico. Demos preferência às que envolvem a generalização de seqüências, cuja abordagem enfoca a covariação (variação entre duas grandezas), uma vez que, conforme a *Base Nacional Comum Curricular* (BRASIL, 2017), essa ideia deve ser abordada desde o 5.º ano do EF. Após a seleção dessas tarefas, seus

enunciados foram adaptados, considerando os propósitos da pesquisa e seguindo a estrutura de tarefas proposta por Radford (2015), que abrange sua organização em seqüência e sua abordagem com o uso de artefatos. Assim, no Quadro 1 organizamos os enunciados adaptados para a pesquisa, os artefatos produzidos e o material utilizado na produção.

Quadro 1 – Enunciado das tarefas, artefatos e adaptações

Tarefas	Enunciados adaptados	Artefatos produzidos / Material de produção
<p>Tarefa1 (Ta1)</p>	<p>Para seu aniversário, Carlos recebeu um cofrinho com R\$ 1,00 dentro. Ele deposita no cofrinho R\$ 2,00 por semana. No final da primeira semana, ele tem R\$ 3,00. No final da segunda semana, ele tem R\$ 5,00, e assim por diante.</p> <p>a) No final da semana 4, quanto ele tem depositado no cofrinho? Como você descobriu? b) No final da semana 5, quanto ele tem depositado no cofrinho? Como você descobriu? c) No final da semana 10, quanto ele tem depositado no cofrinho? Como você descobriu? d) No final da semana 15, quanto ele tem depositado no cofrinho? Como você descobriu? e) No final da semana 25, quanto ele tem depositado no cofrinho? Como você descobriu? f) Apresente uma forma de sempre saber o valor em R\$ no cofrinho a cada semana.</p>	 <p>/</p> <p>*Papel Cartão; *Folha branca; *Cartolina verde e azul; *Caneta hidrográfica preta.</p>
<p>Tarefa2 (Ta2)</p>	<p>Suponha que você estivesse em um abrigo para cães e quisesse contar todos os olhos e caudas dos cachorros que viu.</p> <p>Número de Caudas</p> <p>a) Se tivesse 1 cão, quantas caudas haveria? Como você descobriu? b) Se tivesse 2 cães, quantas caudas haveria? Como você descobriu? c) Se tivesse 3 cães, quantas caudas haveria? Como você descobriu? d) Se tivesse 10 cães, quantas caudas haveria? Como você descobriu? e) Se tivesse 15 cães, quantas caudas haveria? Como você descobriu? f) Se tivesse 25 cães, quantas caudas haveria? Como você descobriu? g) Apresente uma forma de sempre saber o número de caudas.</p> <p>Número de Olhos</p> <p>a) Se tivesse 1 cão, quantos olhos haveria? Como você descobriu? b) Se tivesse 2 cães, quantos olhos haveria? Como você descobriu? c) Se tivesse 3 cães, quantos olhos haveria? Como você descobriu? d) Se tivesse 10 cães, quantos olhos haveria? Como você descobriu? e) Se tivesse 15 cães, quantos olhos haveria? Como você descobriu? f) Se tivesse 25 cães, quantos olhos haveria? Como você descobriu? g) Apresente uma forma de sempre saber o número de olhos.</p> <p>Número Total de Olhos e Caudas</p> <p>a) Se tivesse 1 cachorro, qual seria o número total de olhos e caudas? Como você descobriu? b) Se tivesse 2 cachorros, qual seria o número total de olhos e caudas? Como você descobriu? c) Se tivesse 3 cachorros, qual seria o número total de olhos e caudas? Como você descobriu? d) Se tivesse 10 cachorros, qual seria o número total de olhos e caudas? Como você descobriu? e) Se tivesse 15 cachorros, qual seria o número total de olhos e caudas? Como você descobriu? f) Se tivesse 25 cachorros, qual seria o número total de olhos e caudas? Como você descobriu? g) Apresente uma forma de sempre saber o número total de olhos e caudas.</p>	 <p>/</p> <p>*Cartão; *EVA branco; *Caneta hidrográfica preta; *Velcro.</p>

<p>Ta3 (Ta3)</p>	<p>Uma cobra está em fase de crescimento; no dia 1, ela tem 2 partes do seu corpo formadas; no dia 2, ela tem 3 partes do corpo formadas; no dia 3, ela tem 4 partes do corpo formadas.</p> <p>a) No dia 4, ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu? b) No dia 5, ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu? c) No dia 6, ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu? d) No dia 10, ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu? e) No dia 15, ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu? f) No dia 25, ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu? g) Apresente uma forma de sempre saber o número de partes formadas.</p>	 <p style="text-align: center;">/</p> <p>*EV A amarelo; *Folha branca; *Cartolina vermelha; *Caneta hidrográfica preta.</p>
<p>Ta4 (Ta4)</p>	<p>Suponha que você tenha uma corda e queira cortá-la em pedaços iguais.</p> <p>a) Se você fizer 1 corte na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu? b) Se você fizer 2 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu? c) Se você fizer 3 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu? d) Se você fizer 4 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu? e) Se você fizer 15 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu? f) Se você fizer 25 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu? g) Apresente uma forma de sempre saber quantos pedaços de corda terá.</p>	 <p style="text-align: center;">/</p> <p>*Folha sulfite A4; *Linha rosa.</p>
<p>Ta5 (Ta5)</p>	<p>Em um restaurante, 1 mesa tem 4 cadeiras, 2 mesas têm 6 cadeiras, e 3 mesas têm 8 cadeiras.</p> <p>a) Quantas cadeiras terá em 4 mesas? Como você descobriu? b) Quantas cadeiras terá em 5 mesas? Como você descobriu? c) Quantas cadeiras terá em 10 mesas? Como você descobriu? d) Quantas cadeiras terá em 15 mesas? Como você descobriu? e) Quantas cadeiras terá em 25 mesas? Como você descobriu? f) Apresente uma maneira de sempre saber o número de cadeiras das mesas.</p>	 <p style="text-align: center;">/</p> <p>*EVA verde e vermelho.</p>

Fonte: Silva (2019, p. 60)

Após definirmos as tarefas, estabelecemos o modo de encaminhamento delas no trabalho conjunto em sala de aula, adaptado de Radford (2015), a saber: 1.º o primeiro momento foi o de apresentação da tarefa e dos artefatos aos estudantes pela pesquisadora; 2.º os estudantes trabalharam

em trio. Depois, a pesquisadora visitou o trio, fazendo questionamentos e intervenções aos estudantes. Por fim, a pesquisadora convidou o trio para uma discussão geral, em que eles expuseram suas ideias e discutiram sobre o que foi produzido, conforme ilustrado na Figura 2.

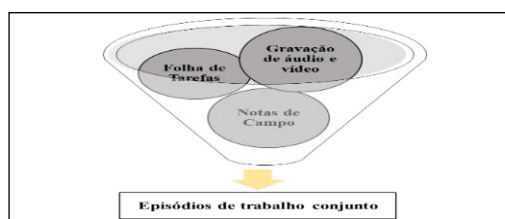
Figura 2 – Trabalho conjunto na sua implementação em sala de aula



Fonte: Adaptado de Radford (2015, p. 556, tradução Babylon)

Após isso, determinamos a forma como os dados seriam capturados, ou seja, os instrumentos de produção de dados que foram empregados para constituir os episódios de trabalho conjunto: 1) gravação de áudio e vídeo – gravação dos grupos compostos de três estudantes em sala de aula⁶; 2) folha de tarefa do estudante – com respostas às tarefas; 3) notas de campo – comentários escritos pela pesquisadora após a aula sobre o que aconteceu na aula com os estudantes e entendimentos matemáticos percebidos, que foram também considerados por Radford (2015), conforme Figura 3.

Figura 3 – Produção de dados



Fonte: Silva (2019, p. 64)

Inicialmente, realizamos as transcrições na íntegra; posteriormente, elas foram retomadas, juntamente com as gravações de áudio e vídeo, buscando “[...] recortes da aula que são representativos do fenômeno investigado” (CARVALHO, 2011, p. 33), constituindo-se nossos episódios de trabalho conjunto. Dessa forma, inicialmente, trabalhamos com a transcrição fiel da linguagem oral e gestual, bem como de ações realizadas durante a aula. Além disso, na transcrição, utilizamos as codificações que constam no Quadro 2.

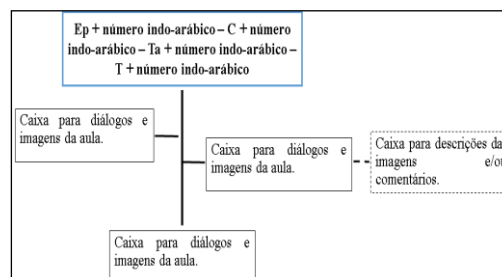
Quadro 2 – Demais codificações para a pesquisa

Codificação	Significado
Ep + número indo-arábico	Para se referir aos episódios. Por exemplo: Ep1 para indicar Episódio 1.
C + número indo-arábico	Para se referir às cenas. Por exemplo: C1 para indicar Cena 1.
E + número indo-arábico	Para se referir aos estudantes de forma individual. Por exemplo: E1 para indicar o Estudante 1.
T + número indo-arábico	Para se referir aos estudantes de forma coletiva. Por exemplo: T1 para indicar Trio 1.
P	Para se referir à pesquisadora (primeira autora)

Fonte: Silva (2019, p. 66).

Esses episódios foram divididos em cenas (trechos). Na Figura 4, expomos a forma de organização dos episódios de trabalho conjunto da pesquisa.

Figura 4 – Organização dos episódios de trabalho conjunto



Fonte: Silva (2019, p. 67).

Notemos que, conforme consta na Figura 4, as produções gestuais são descritas e ilustradas. Além disso, as produções verbais e não verbais da pesquisadora ficam à esquerda, as produções verbais e não verbais dos estudantes ficam à direita, e as produções entre ambos ficam na caixa do meio. Cabe destacar que descrições das imagens, bem como comentários, ficam em caixas com o contorno pontilhado.

Uma vez definido o *corpus* da pesquisa, iniciamos o ciclo da análise, conforme a Análise Textual Discursiva (ATD) de Moraes e Galiazzi (2016), em três movimentos recursivos, a saber: a “unitarização”, a “categorização” e a “construção de metatextos”.

A “unitarização” é o movimento inicial da análise e consiste no recorte ou fragmentação de textos, a partir da discriminação de unidades base. Tais unidades base podem ser Unidades de Contexto (UC), entendidas como fragmentos amplos de textos que delimitam o contexto de análise, e Unidades de Análise (UA), compreendidas como elementos discriminantes de sentidos ou significado da pesquisa, que buscam representar aspectos significativos do fenômeno analisado. Tendo em vista o fenômeno investigado, nesta pesquisa definimos como unidades, a saber: UC – Episódios de trabalho conjunto e UA – Aprendizagem algébrica.

O movimento posterior, a “categorização”, consiste em construir relações entre as unidades anteriormente

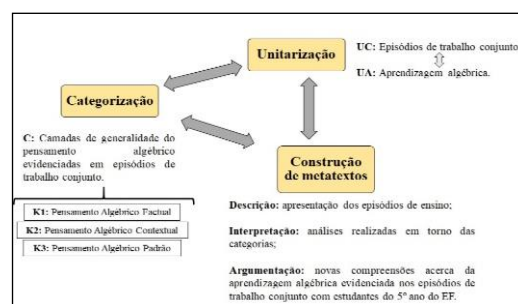
⁶ A câmera foi conduzida por um voluntário.

mencionadas, combinando-as e classificando-as, visando a constituir categorias e subcategorias. A partir do estabelecimento de relações entre UC e UA consideradas nesta pesquisa, definimos a seguinte categoria (C) elencada *a priori*: Camadas de generalidade do pensamento algébrico, evidenciadas em episódios de trabalho conjunto; essa categoria tem como subcategorias: Pensamento Algébrico Factual (K1); Pensamento Algébrico Contextual (K2); e Pensamento Algébrico Padrão (K3).

O movimento de “construção de metatextos”, que é o terceiro movimento da ATD, concerne à produção de discursos que descrevem, estruturam ou se referem à interpretação do texto, visando à comunicação dos resultados e de outras compreensões decorrentes da análise do fenômeno investigado. As produções escritas na ATD devem ser compostas pelos seguintes elementos básicos: descrição, interpretação e argumentação, assim definidos: a descrição expressa de modo organizado os sentidos e os significados construídos com base nas análises realizadas. Já a interpretação consiste em apresentar as outras relações e inferências estabelecidas pelo pesquisador; envolve a abstração, com vistas a outros entendimentos acerca do fenômeno investigado. Por fim, a argumentação abrange a busca, pelo pesquisador, por níveis mais aprofundados de compreensão do fenômeno investigado.

Portanto, os elementos do movimento de “construção de metatextos” estão organizados nesta pesquisa da seguinte forma: a descrição envolve a apresentação dos episódios de trabalho conjunto; a interpretação abrange análises nas categorias definidas *a priori*; e a argumentação abarca as outras compreensões da aprendizagem algébrica evidenciada nos episódios de trabalho conjunto com estudantes do 5.º ano do EF. Assim, apresentamos um diagrama dos movimentos da ATD, conforme ilustrado pela Figura 5.

Figura 5 – Diagrama da ATD nesta pesquisa



Fonte: Silva (2019, p. 69)

Resultados e Discussões

Nesta seção, trazemos uma síntese de alguns resultados evidenciados na pesquisa, com compreensões gerais acerca do trabalho conjunto com o T2. E, no Quadro 3, apresentamos os episódios de trabalho conjunto, organizados por subcategorias.

Quadro 3 – Episódios de trabalho conjunto organizados por subcategorias de análise

	T2	
	K1	K2
Ta1	Ep2-C1-Ta1-T2; Ep2-C2-Ta1-T2; Ep2-C3-Ta1-T2; Ep2-C4-Ta1-T2 e Ep2-C5-Ta1-T2.	Não identificamos indícios de aprendizagem algébrica em uma camada contextual.
Ta2	Ep4-C1-Ta2-T2.	Ep4-C2-Ta2-T2; Ep4-C3-Ta2-T2 e Ep4-C4-Ta2-T2.
Ta3	Ep6-C1-Ta3-T2.	Ep6-C2-Ta3-T2.
Ta4	Ep8-C1-Ta4-T2.	Ep8-C2-Ta4-T2.
Ta5	Ep10-C1-Ta5-T2; Ep10-C2-Ta5-T2 e Ep10-C3-Ta5-T2.	Ep10-C4-Ta5-T2.

Fonte: Silva (2019, p. 120)

Diante do exposto no Quadro 3, no trabalho conjunto como T2 em torno da Ta1, identificamos apenas indícios de aprendizagem algébrica em sua camada factual. Algo que já era esperado, considerando que a Ta1 marcou o início do trabalho conjunto com esses estudantes. A partir da Ta2, evidenciamos indícios de aprendizagem tanto algébrica factual quanto algébrica contextual. Assim, de forma geral, os estudantes revelaram transitar entre a camada factual e a contextual. Visando

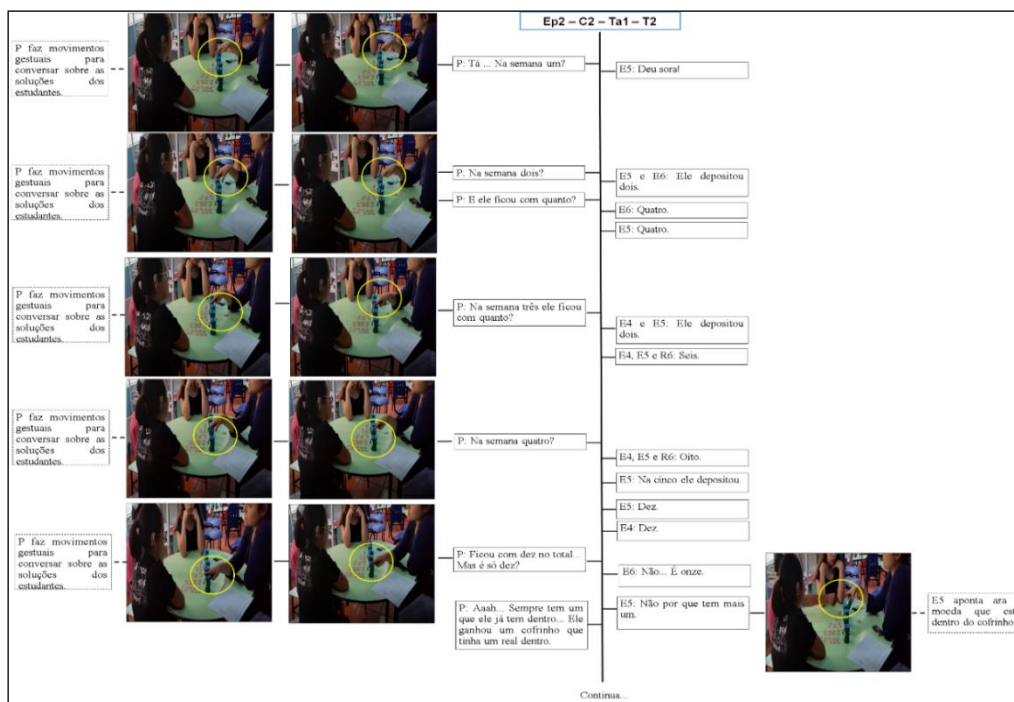
ilustrar tais resultados, trazemos, nas subseções seguintes, alguns episódios de trabalho conjunto.

K1: PENSAMENTO ALGÉBRICO FACTUAL

A exemplo do trabalho conjunto com o T2 em torno da Ta1 na Figura 6, identificamos também indícios de

aprendizagem algébrica dos estudantes em uma camada factual. Após alguns questionamentos de P aos estudantes com relação ao número de moedas até a semana 5, foi possível perceber, pela oralidade desses estudantes, que eles objetivaram a regularidade (adicionar dois a cada semana), conforme exposto na Figura 6.

Figura 6 – Cena 2 de trabalho conjunto com o T2 na Ta1



Fonte: Silva (2019, p. 82)

Diante do ilustrado na Figura 6, P, ao longo da discussão, tentou trazer à tona a covariação entre as semanas e o número de moedas, pois realizou movimentos gestuais, apontando para o cofre 1 (semana 1) e para as moedas que estão à sua frente; para o cofre 2 (semana 2) e para as moedas que estão à sua frente, e assim por diante, até o cofre 5 (semana 5). De forma semelhante à realizada com o T1, os estudantes revelaram, em sua oralidade, a ideia de “depositar dois”, ou seja, compreenderam que estavam sendo adicionados dois reais a cada semana. Quando questionados sobre o número de moedas da semana cinco, E6 respondeu que seriam 11, e não 10 moedas; complementando a resposta de E6, E5 apontou para um dos cofrinhos e disse que havia mais uma moeda dentro dos cofrinhos. Assim, embora não tenham percebido a

covariação entre as moedas e as semanas, o T2 conseguiu modelar o número de moedas até a semana cinco, pois eles perceberam a regularidade de depositar duas moedas por semana e a adição de uma moeda que já estava no cofrinho. Ou seja, a estratégia – na qual o estudante percebe a recorrência entre os termos consecutivos e consegue saber o próximo termo – não muda, mas agora a percebemos por meio da oralidade dos estudantes.

No trabalho conjunto com o T2 em torno da Ta5, notamos indícios de aprendizagem algébrica em sua camada factual. Após mais algumas discussões com P, E4 começa a perceber a relação da lei geral para lidar com tal sequência, o que se evidencia por meio da oralidade, conforme consta na Figura 7.

Figura 7 – Cena 3 de trabalho conjunto com o T2 na Ta5

Ep10 – C3 – Ta5 – T2

P: É que assim... GHI... Lembra que antes tinha um probleminha que era só fazer o dobro... que sempre encontrava o valor... Nesse caso também envolve o dobro mas precisa de mais alguma coisa... Pra sempre acerta o número de cadeiras.

P: ISSO? Mais dois. Então eu sempre faço o que?

P: É o que mais?

P: OH! Vamos ver se dá certo!... Eu tenho. Aqui eu tenho uma mesa... Se eu multiplicar por dois eu vou ter?

P: Dois vezes um dois... Mas aqui são duas ou quatro?

E5: Mais dois.

E6: Vezes dois.

E4: Mais dois.

E4: Duas.

P pega as cadeiras e questiona os estudantes.

P: Então o que eu preciso fazer pra ficar quatro?

P: acena positivamente para E5.

E5 São quatro.

E5: Dois... Mais dois.

E5: Sora acho que entendi!

E4 mostra seu cálculo para P:

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 2 \\ \hline 10 \end{array}$$

P: Isso!

Continua

Fonte: Silva (2019, p. 100)

Segundo ilustrado na Figura 7, P chama atenção para a ideia de dobro, utilizada em outras tarefas, porém, não se trata apenas do dobro. Então, E5 conclui que tem que fazer “mais dois”. P questiona o que sempre deve ser feito para saber o número de cadeiras, E6 fala “vezes dois” e E4 completa “mais dois”. Diante disso, entendemos que E4 estabeleceu uma lei geral (RADFORD, 2018) para lidar com a sequência, embora tampouco deixe explícitas as variáveis envolvidas.

Conforme exposto nesta subseção, ao longo do trabalho conjunto com os estudantes em torno das tarefas, foi possível identificar em vários episódios indícios de aprendizagem algébrica em uma camada factual. No entanto, foi possível perceber, no decorrer das tarefas, uma evolução na aprendizagem algébrica desses estudantes:

aos poucos, as variáveis aparecem de forma explícita, e a ideia de covariação parece ter sido objetivada, constituindo assim uma camada contextual de generalização algébrica, o que será apresentado na subseção seguinte.

K2: PENSAMENTO ALGEBRICO CONTEXTUAL


Nesta subseção trazemos como exemplos os episódios de trabalho conjunto que revelam indícios de aprendizagem algébrica dos estudantes em sua camada contextual. Assim, inicialmente abordamos o Ep4, com a cena 3 para ilustrar.

Na Figura 8, ao conversar com P e demais membros do trio acerca da relação entre número de cães e número de olhos, E6 revela objetivar as variáveis e as operações a serem realizadas.

Figura 8 – Cena 3, de trabalho conjunto com o T2 na Ta2

Ep4 – C3 – Ta2 – T2

E4: Oh professora!
Agora é essa aqui!



Se tivesse 1 cão, quantos olhos haveriam? Como você descobriria?
Se tivesse 2 cães, quantos olhos haveriam? Como você descobriria?
Se tivesse 3 cães, quantos olhos haveriam? Como você descobriria?
Se tivesse 10 cães, quantos olhos haveriam? Como você descobriria?
Se tivesse 15 cães, quantos olhos haveriam? Como você descobriria?
Se tivesse 25 cães, quantos olhos haveriam? Como você descobriria?
Explique uma forma de sempre saber o número de olhos.

E6 mostra suas soluções referente aos itens relacionados ao número de olhos dos cães. E6 questiona sobre o item g.

P: Tá! Mas o número de olhos é quantas vezes maior do que o número de cães?

Alguns instantes de silêncio

P: Óh! Se eu tenho um cãozinho?

E6: Eu tenho dois.

P: Um cãozinho.

E6: Dois olhos.

P: E, o dois é o que do um? Eu tenho quantas vezes mais olhos do que eu tenho cãozinhos?

E6: O dobro dos cãozinhos.

P: Então, se eu souber... Que é só multiplicar por dois os cães eu sempre vou saber o número de olhos... Se eu tiver dois cãozinhos quantos olhos eu vo ter?


E6: Quatro.

P: Quatro... Porque dois vezes dois é quatro... Porque o número de olhos é o dobro de cães... Não é isso?

E6: Sim.

Continua...

P retira os olhos de um dos cães.



Fonte: Silva (2019, p. 108)

Na Figura 8, E6 indaga P a respeito do item g, “Explique uma forma de sempre saber o número de olhos”. P pega um dos cães da mesa, retira-lhe os olhos e começa a fazer indagações a respeito da relação entre olhos e cães, até que E6 conclui que o número de olhos é “o dobro dos cãozinhos”, ao ser questionada por P sobre “quantas vezes eu tenho mais olhos do que eu tenho

cãozinhos?”. Por isso, compreendemos que fica clara a relação covariacional entre as variáveis “número de cães” e “número de olhos”, evidenciada na oralidade de E6.

No trabalho conjunto com o T2 em torno da Ta4, foram evidenciados indícios de aprendizagem algébrica em sua camada contextual. Na Figura 9 trazemos o Ep8, com uma cena que demonstra isso.

Figura 9 – Cena 2 de trabalho conjunto com o T2 na Ta4

Ep8 – C2 – Ta4 – T2

P: Óh!... O que que eu sempre tenho que fazer pra achar o número de pedaços?

Alguns instantes de silêncio

P: Óh!... Vamos dizer que eu tenho o número de cordas... O que eu tenho que fazer com o número de cordas?

E6: Multiplicar.

P: Por quanto?


E4: Por dois.

P: Ah tá!

Alguns instantes de silêncio


P: Aah!... Deixa eu ver

E6: Deu professora.




h) Explique uma forma de sempre saber o número de pedaços de corda que terá.
Se eu pegar a mesma de pedaçosa

P olha as soluções de E6, em especial o item h.



h) Explique uma forma de sempre saber o número de pedaços de corda que terá.
Corta 2 pedaços de corda

P olha as soluções de E6, em especial o item h.



h) Explique uma forma de sempre saber o número de pedaços de corda que terá.
X2 número de corda

E4 mostra resposta ao item h para P.

P: Uhum!

P: Isso!... Isso aí!... Só coloca a data pra profê.

P: Isso!... Vezes dois o número de partes.

E4: Já coloquei nome.

P: Isso!... Vezes dois o número de partes.

Fonte: Silva (2019, p. 116)

Conforme exposto na Figura 9, as discussões desse episódio envolveram o item h, “Explique uma forma de sempre saber o número de pedaços da corda que terei”. P questiona inicialmente sobre o que deve ser feito para resolver o item h; após alguns instantes de silêncio, todos conseguem resolver o item h e, em seus registros escritos, conseguem estabelecer a relação covariacional entre as variáveis “número de cortes” e “número de pedaços”. Cabe destacar que há uma certa mudança para representar a relação covariacional: ao invés de escrever por extenso “multiplicar por dois”, os estudantes escrevem “x2” ou “2x”; no entanto, eles colocam por extenso a variável “número de cortes”. Além do mais, os estudantes focam mais na parte escrita e menos na oralidade.

Considerações Finais

Visando compreender nossa questão de pesquisa – se e como indícios de aprendizagem algébrica são evidenciados por estudantes do 5.º ano do EF em episódios de trabalho conjunto que abrangem o pensamento algébrico covariacional, adaptados segundo a TO, de Luis Radford? –, recorremos à análise das aprendizagens algébricas reveladas em episódios de trabalho conjunto com estudantes do 5.º ano do EF, a partir da categoria “Camadas de generalidade do pensamento algébrico evidenciadas em episódios de trabalho conjunto”, tendo como subcategorias: Pensamento Algébrico Factual; Pensamento Algébrico Contextual; e Pensamento Algébrico Padrão.

A partir das análises realizadas, compreendemos que indícios de aprendizagem algébrica dos estudantes foram evidenciados no trabalho conjunto, tanto em uma camada factual quanto contextual de compreensão. Dessa forma, é relevante notar que a regularidade das sequências é mais facilmente objetivada pelos estudantes. No entanto, ao longo do trabalho conjunto, a relação covariacional das sequências vem à tona, e isso pode estar relacionado com as intervenções de P. Entretanto, convém destacar que tais intervenções acabam sendo repetitivas ao longo do desenvolvimento das tarefas, ou

seja, sempre há as mesmas perguntas e os movimentos gestuais de P.

Portanto, consideramos importante que pesquisas futuras visem aprofundar as discussões acerca das intervenções dos professores no trabalho conjunto com os estudantes, com vistas à emergência do pensamento algébrico covariacional, no âmbito tanto da Educação Básica quanto da Educação Superior. Haja vista que, conforme Radford (2015), na TO as relações de ensino e aprendizagem se concentram não só no estudante como também no professor.

Referências

- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução: M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Batista. Porto: Porto Editora, 1994.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC:** educação é a base. Terceira versão. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria Executiva. Secretaria de Educação Básica, 2017.
- CARVALHO, A. M. P. Uma metodologia de pesquisa para estudar os processos de ensino e aprendizagem em sala de aula. In: SANTOS, Flávia Maria Teixeira dos; GRECA, Ileana Maria (Org.). **A pesquisa em ensino de Ciências no Brasil e suas metodologias.** 2. ed. Ijuí: Ed. Unijuí, 2011. p.13-48.
- MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. **Análise textual discursiva.** 3. ed. Ijuí, RS: Ed. Unijuí, 2016.
- RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In: NORTH AMERICA CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION – PME, 2006, Bergen. Bergen: Bergen University College, 2006. v. 1. Tradução: Babylon.
- _____. Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic

perspective. In: CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 6., Lyon. **Anais ...** Lyon-França, 2009. Disponível em: <www.inrp.fr/editions/cerme6>. Acesso em: 3 set. 2018. Tradução: Babylon.

_____. A origem histórica do pensamento algébrico. In: RADFORD, L. **Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia.** São Paulo: Livraria da Física, 2011. p. 117-154.

_____. Methodological aspects of the theory of objectification. **Perspectivas da Educação Matemática**, Belo Horizonte, v. 8, p.445-567, 2015. Tradução: Babylon.

_____. Semiosis and subjectification: The classroom constitution of mathematical subjects. In: PRESMEG, N. et al. (Ed.). **Signs of signification. Semiotics in mathematics education research.** Cham, Switzerland: Springer, 2018. p. 21-35. Tradução: Babylon.

SILVA, J. G. **O pensamento algébrico sob a ótica da teoria da objetivação: uma análise a partir de episódios de trabalho conjunto no 5.º ano do ensino fundamental.** Trabalho de conclusão de curso (Dissertação) – Universidade Federal de Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2019.

Jessica Goulart da Silva: Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Pampa – Unipampa (2016). Especialista em Metodologia do Ensino de Matemática e Física pelo Centro Universitário Internacional – Uninter (2018). Mestra em Educação Matemática e Ensino de Física pela Universidade Federal de Santa Maria – UFSM (2019). E-mail: jessicagoulartdasilva@gmail.com.

Ricardo Fajardo: Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS (1985), Doutor em Matemática pela University of Rochester - NY (1992). Professor e coordenador do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria – UFSM. E-mail: rfaj@ufsm.br.