ESTRUTURAS CONSTRUÍDAS DE FORMA CRIATIVA: CONTRIBUINDO PARA UMA MUDANÇA NO MODO DE PENSAR A GEOMETRIA.

Maria Laura F. B. Sampaio[1]

Resumo

A sociedade contemporânea vive em constante dinamismo, enfrentando problemas que exigem do ser humano observação, imaginação, criatividade e uma mudança na forma de pensar. Ou seja, exige-se do sujeito um pensamento complexo. Considerando esse contexto, o presente trabalho pretende trazer contribuições para o ensino e aprendizagem de Matemática na educação básica, contemplando conceitos relativos à geometria. Para tanto, apresenta-se a criação de estruturas fractais, que tem como base um processo iterativo simples, contemplando as principais propriedades que caracterizam e que permitem definir este tipo de objeto. São apresentadas estruturas que, para serem descritas, exigem algo mais do que a geometria euclidiana. Desta maneira, convida-se o leitor a fazer relações com diferentes conceitos matemáticos, tendo em vista a promoção e qualificação da aprendizagem do aluno.

Palavras-chave: Educação Matemática. Fractais. Pensamento complexo.

Introdução

Na tentativa de entender o nosso entorno e conseguir descrever certas estruturas que podem ser construídas de forma criativa, por meio de processos iterativos, convidamos o leitor a pesquisar e refletir sobre a necessidade de uma mudança no modo de pensar a geometria. Desta forma, acreditamos contribuir para as propostas de ensino e aprendizagem de Matemática na educação básica, que tem se caracterizado pelo seu caráter linear, disciplinar e especializado, decorrente do pensamento científico clássico.

Segundo Morin (1999, p.199), esse pensamento clássico se edificou sobre três pilares: a "ordem", a "separabilidade", a "razão", tendo a redução do conhecimento de um todo pelo conhecimento das partes que o compõem como conceito-chave do determinismo, ou seja, a ocultação do acaso, do novo, da invenção.

Observando a sociedade contemporânea, que vive em constante dinamismo, enfrentando problemas que exigem um olhar diferenciado e singular, percebemos que não é possível ocultar o novo, o acaso e a própria criatividade do ser humano, o que nos leva a pensar que o maior desafio dos dias atuais está em pensar a complexidade.

Sendo assim, se faz necessário repensar as atividades propostas na educação básica, principalmente nas aulas de Matemática, que acreditamos devam ser desafiadoras, de modo a estimular, no aluno, a observação e a imaginação, podendo contribuir para a (re)construção de conceitos e a não linearidade do pensamento, que são, segundo Demo (2002), características significativas do pensamento complexo.

Pretendemos, neste trabalho, propor a construção de estruturas fractais, contemplando as principais propriedades que as caracterizam e que permitem defini-las, mostrando que é possível imaginar a existência de objetos entre a reta e o plano e entre o plano e o cubo. Tais objetos, para serem descritos, exigem algo mais do que a geometria euclideana simplificada, geralmente abordada na educação básica. Exigem do sujeito uma nova forma de pensamento, que convive com a incerteza e o caos: o pensamento complexo.

Características do pensamento complexo

No momento em que a cultura geral admite a possibilidade de pesquisar a contextualização de toda informação ou de toda idéia, surge a necessidade de colocar em discussão a ordem, a desordem e a organização.

Neste contexto, ocorre o pensamento complexo, que, longe de substituir a idéia de desordem por aquela de ordem ou ser contrário ao pensamento simplificador, que até a metade do século XX caracterizou a cultura científica e técnica, vem complementar um pensamento que separa por um pensamento que reúne, propondo, como principal problema, tratar a incerteza.

Cabe lembrar que, **complexus** significa originariamente "aquilo que é tecido em conjunto". Desse modo, de acordo com Morin (1999, p.209), "o propósito do pensamento complexo é simultaneamente reunir (contextualizar e globalizar), relevar o desafio da incerteza". Logo, no intuito de melhor compreender a necessidade de mudanças no modo de abordar a geometria, acreditamos importante destacar as seguintes características referentes à complexidade:

- **ser dinâmica**, ou seja, indicar um processo que, a par de componentes formalizáveis e controláveis, detém outros estritamente incontroláveis e não formalizáveis;
- **ser não-linear**, de modo a provocar mudanças, não de modo previsível e controlável, mas criativo, surpreendente, arriscado;
- **ser reconstrutiva**, ou seja, ao existir, vai-se reconfigurando conforme o fluxo do tempo e as circunstâncias encontradas.

Tais características podem muito bem ser associadas à escola que a sociedade contemporânea necessita. À ela cabe o papel de preparar as novas gerações para um mundo em mudança permanente e, ao mesmo tempo, preservar e atualizar a cultura dos grupos sociais, podendo trabalhar com o imprevisto, com o dinâmico. Dessa maneira, o conhecimento desenvolvido na educação básica deverá certamente utilizar a abstração, mas partindo da contextualização e observação de diferentes estruturas.

Que tipo de estruturas são os fractais?

Ao observarmos ao nosso redor diferentes fenômenos, percebemos que existe uma infinidade de estruturas que não são possíveis de serem descritas segundo a geometria euclidiana. É o caso do contorno das montanhas, das nuvens, da superfície dos pulmões humanos, das folhas da samambaia, da trajetória das gotículas de água quando penetram na terra e, até mesmo, de estruturas que podem ser construídas colorindo, dobrando e recortando uma simples folha de papel.

Essas estruturas, cuja forma é extremamente irregular ou fragmentada e que têm, essencialmente a mesma estrutura em todas as escalas, denominam-se **fractais**. A origem do termo fractal , introduzido por Mandelbrot, está no radical *fractus*, proveniente do verbo latino *frangere*, que quer dizer quebrar, produzir pedaços irregulares; vem da mesma raiz a palavra fragmentar, em português. (MOREIRA, 1999, p.55)

Para melhor compreender essas estruturas, vamos descrever, a seguir, suas principais características, assim como, os processos matemáticos originais que possibilitam suas construções. São três as principais propriedades que, inicialmente, caracterizam e permitem definir as estruturas **fractais**.

A primeira dessas propriedades está relacionada à aparência dos fractais. Apesar de ser intuitiva e visual, é importante um reconhecimento inicial dessas estruturas. Visualmente, os fractais possuem como característica básica a "auto-similaridade" ou "auto-semelhança", o que, em termos simples, significa dizer que pequenas partes da estrutura repetem sua forma como um todo. Assim, se fizermos uma ampliação de uma região específica de um fractal (mesmo quando ampliada milhares de vezes), iremos encontrar uma réplica do fractal como um todo. Portanto, o sistema é invariante (mantém a mesma forma e estrutura) sob uma transformação de escala.

A segunda propriedade se relaciona à maneira como os fractais são construídos, uma vez que, sempre é utilizado, de uma forma ou de outra, algum tipo de "processo iterativo". Isto significa que, na construção de qualquer fractal, iremos sempre **repetir** um determinado procedimento, infinitamente. De acordo com Eberson (2004),

> *Esta característica básica da construção de fractais é, em grande parte, a responsável pelo grande fascínio que estas figuras provocam pois, na maioria dos casos, os fractais são construídos a partir de "elementos" extremamente simples mas que, apesar disso, dão origem a figuras com extraordinária complexidade e riqueza de detalhes justamente graças às infinitas interações presentes em sua construção. (p.18-19)*

A terceira e última propriedade se relaciona a um espaço teórico dos fractais, visto que se refere à sua dimensão, característica importantíssima do ponto de vista matemático e principal responsável pela grande ruptura que causou na Matemática tradicional. Cabe lembrar que, na geometria euclidiana, pontos não possuem dimensão (ou possuem dimensão zero), às retas atribui-se dimensão um, aos planos, dimensão dois, e ao espaço, dimensão três. Nesta perspectiva, a dimensão de uma figura é representada por um número inteiro, o que nos leva pensar que todas as formas geométricas regulares se encaixam perfeitamente em algumas dessas categorias.

Porém, existem objetos entre a reta e o plano, entre o plano e o cubo, como é o caso de certos fractais, uma vez que as formas geradas não se encaixam nas categorias euclidianas. Esse fato, contribuiu para a (re)construção do conceito de dimensão.

Sendo assim, as estruturas criadas pela geometria fractal acabam por sugerir um outro tipo de análise, a "dimensão fractal", fazendo com que o valor que expressa a dimensão de uma estrutura dita fractal seja, em geral, um valor não-inteiro. Por sua vez, como veremos adiante, este tipo de dimensão quantifica, de certo modo, o grau de irregularidade ou fragmentação da estrutura considerada.

Visando uma melhor compreensão destas estruturas em termos objetivos e concretos, iremos construir alguns exemplos de fractais regulares, em particular, do tipo "iniciador-gerador". Esta família de fractais utiliza processos de construção essencialmente geométricos, semelhantes às construções tradicionais com régua e compasso.

Vamos considerar dois exemplos simples, que existem na literatura, possíveis de serem construídos em sala de aula, mostrando as propriedades apresentadas anteriormente e evidenciando as características de construção iterativa, autosemelhança e cálculo da dimensão.

Construindo fractais

Uma das formas de gerar um fractal baseia-se num processo iterativo simples, do tipo **"iniciador–gerador"**. Esses fractais partem de uma figura inicial chamada de "iniciador" que, em tese, pode ser qualquer figura geométrica regular, porém, em geral, são utilizados segmentos de reta, triângulos ou quadrados. Em seguida, é definido um "gerador", que indica o processo (ou regra) que será aplicado em cada iteração.

Construção nº1

Iremos, inicialmente, construir uma estrutura muito simples, denominada "Conjunto de Cantor" ou "Poeira de Cantor", criada por George Cantor (1845-1918). Essa estrutura aparece citada em praticamente todas as bibliografias relacionadas à geometria de fractais, devido à simplicidade com que ela é construída e às características matemáticas que ela apresenta, servindo como exemplo de um objeto entre o ponto e a reta, ou seja, com dimensão não inteira, como veremos posteriormente.

A estrutura será construída da seguinte maneira: tomamos um segmento de reta e o dividimos em três segmentos congruentes. Em seguida, o pedaço intermediário é retirado. Os dois segmentos restantes são de novo divididos em três segmentos congruentes e os segmentos intermediários, retirados. O processo de dividir os segmentos e de retirar o pedaço intermediário prossegue infinitamente. O "Conjunto de Cantor" criado é o conjunto de segmentos restantes, após infinitas operações terem sido realizadas.

Cabe lembrar que, nesta estrutura, consideramos como "iniciador" o segmento e como "gerador", o processo de dividir os segmentos e de retirar o pedaço intermediário.

Também é importante salientar que, quando nos referimos às infinitas operações, partimos de um enfoque teórico da construção de fractais, visto que, na prática, o processo será repetido até o limite da visualização gráfica possibilitada pelas ferramentas que geram a imagem.

Observemos, a seguir, na Figura 1, o processo **iniciador-gerador** para os primeiros níveis de iteração da construção do Conjunto de Cantor.

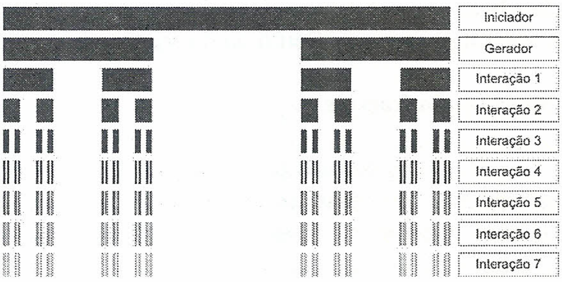


Figura 1 – Construção do Conjunto de Cantor. **Fonte**: Barbosa (2002, p.25)

Podemos perceber, por meio deste exemplo, duas propriedades dos fractais: a construção a partir de um processo iterativo e a propriedade relacionada à aparência dos fractais, a "auto-similaridade" ou "auto-semelhança", já que é possível observar que pequenas partes da estrutura repetem sua forma como um todo.

Vejamos, agora, a terceira propriedade, que considera o aspecto métrico ligado à noção de dimensão. Para simplificar o raciocínio, assumiremos que o comprimento (L), a área (A) e o volume (V) de uma determinada figura são unitários.

Consideremos inicialmente o segmento de reta. Se o segmento for dividido em N partes iguais de comprimento e, então poderemos considerar e como um padrão de escala e assumir que:

$$L = Ne = 1.$$

Consideremos agora a superfície unitária. Se dividirmos novamente a superfície em N partes, cada uma com área ε^2, teremos:

$$A = N\varepsilon^2 = 1.$$

Com o mesmo raciocínio, podemos obter, para o volume unitário, a expressão:

$$V = N\varepsilon^3 = 1.$$

Examinando as expressões anteriores, pode-se notar que o expoente de ε em cada caso reflete a medida da dimensão de similaridade de cada objeto, o que, generalizando, nos fornece $N\varepsilon^D = 1$, em que D é a medida da dimensão.

Utilizando as propriedades dos logaritmos, podemos escrever uma expressão que representa a dimensão (D), como podemos observar a seguir:

$$\log(N\varepsilon^{D}) = \log 1$$

$$\log N + D\log\varepsilon = \log 1$$

$$D\log\varepsilon = -\log N$$

$$D\cdot\left(-\log\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\log N$$

$$D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

Portanto, conseguimos a expressão $D = \log(N)/\log(1/\varepsilon)$, que nos fornece a dimensão de qualquer objeto, inclusive dos fractais construídos por um processo iterativo simples de "iniciador–gerador".

Sendo assim, podemos determinar a dimensão do "Conjunto de Cantor" e perceber que não é inteira, devido ao fato de que, em cada etapa, são obtidos dois novos segmentos com um terço do segmento anterior. Assim, temos que, utilizando uma régua de comprimento e=1/3, necessitamos de um número de segmentos N=2 para a construção da figura. Deste modo, a determinação da dimensão é determinada da seguinte maneira:

$$D = \log 2 / \log 3 \text{ ou seja } D \cong 0{,}6309$$

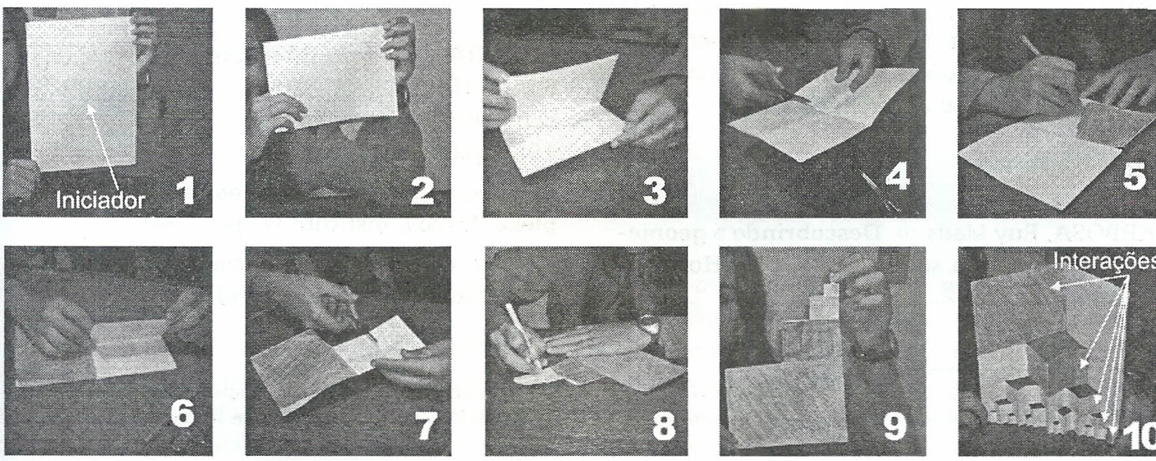
A dimensão fractal do Conjunto de Cantor revela que a estrutura formada jamais preencherá a dimensão de uma linha, possuindo uma dimensão menor do que 1.

CONSTRUÇÃO Nº2

Iremos construir esta estrutura fractal através de uma dobradura. Para auxiliar o leitor na construção e compreensão do processo, a seguir, descreveremos cada passo, apresentando uma sequência de imagens.

Iniciamos a construção da seguinte maneira: tomamos uma folha na posição vertical (imagem 1) e a dobramos ao meio, de modo a obter um retângulo (imagem 2). Em seguida, dividimos o retângulo ao meio (imagem 3) e recortamos verticalmente, na metade da largura, a metade da altura (imagem 4), obtendo dois retângulos. Colorimos um deles e dobramos ao meio o outro (imagem 5 e 6). Repetimos o processo anterior quantas vezes for possível, dividindo o retângulo, cortando até a metade da altura, colorindo um dos retângulos resultantes e dobrando ao meio o outro (imagens 7 e 8). Em seguida, pressionamos as dobras (imagem 9). Abrimos a folha de papel e dobramos novamente ao meio, de modo que os retângulos coloridos fiquem para dentro. Realizamos dobras no papel, de maneira que a folha se assemelhe ao formato de uma escada (imagem 10).

Sequência de imagens



Nesta estrutura consideramos como "iniciador" o retângulo e como "gerador" o processo de dobrar na metade da altura, na metade da largura, recortar até a metade da altura, e dobrar na altura o lado esquerdo.

Para evidenciar a estrutura criada, realizamos uma dobradura que intercala uma dobra para frente e uma dobra para trás, ao longo da altura da folha, em todas as escalas.

A primeira observação é a característica de auto-similaridade da estrutura formada: os cubos formados são obtidos através de uma ampliação da estrutura menor.

Observa-se também que a área pintada na geração seguinte sempre será a metade da área anterior. Nessa estrutura, utilizando uma unidade de área igual a e=1/4, necessitamos de um número de unidades de área N=2 para a construção da figura seguinte. Assim a dimensão será:

$$D = \log 2/\log 4 = \tfrac{1}{2}$$

Considerações finais

A importância do trabalho proposto consiste em fazer um ir-e-vir incessante entre as certezas e as incertezas, entre o elementar e o global, entre o separável e o inseparável. Desta forma, acreditamos interferir na relação pedagógica, visto que, sugerimos uma relação dinâmica não linear, que supõe dois sujeitos autônomos (professor e aluno) em interação naturalmente criativa, desafiadora e provocativa, principalmente quando temos a oportunidade de construir estruturas que nos levam a questionar certas verdades que considerávamos absolutas, como é o caso da dimensão expressa por um número inteiro.

Desta maneira, pretendemos desenvolver essencialmente um pensamento que trata com a incerteza e que é capaz de conceber a organização. Nas palavras de Morin (1991, p.213) "É o pensamento apto a reunir, contextualizar, globalizar, mas ao mesmo tempo a reconhecer o singular, o individual o concreto." Ou seja, o pensamento complexo, que acreditamos, possa esclarecer as estratégias do nosso mundo incerto.

Acreditamos, também, que, propondo atividades envolvendo a construção de estruturas, incentivamos nossos alunos a pensar em outras possibilidades de construção, envolvendo diferentes regras (gerador) e formas (iniciador), reunindo e reorganizando as informações de uma maneira muito própria. Ou seja, por meio dessas atividades, o professor promove um processo de criação que contribui para o desenvolvimento da criatividade do aluno.

Para tanto, segundo Demo (2002, p.137) "O professor precisa aprender a manejar esta arte finíssima: **influir de tal modo que o aluno possa resistir e superar a influência.**" (Grifo do autor.) O que nos leva a pensar que nós, professores, devemos primar pelo cuidado com a aprendizagem do aluno, promovendo relações diversificadas frente aos desafios do conhecimento a ser reconstruído, e não por procedimentos lineares de uma aula reprodutiva.

Referências

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a geometria fractal:** para a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

DEMO, Pedro. **Complexidade e aprendizagem**: a dinâmica não linear do conhecimento. São Paulo: Atlas, 2002.

EBERSON, Ricardo Ronald. **Um estudo sobre a construção de fractais em ambientes computacionais e suas relações com transformações geométricas no plano. 2004.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2004

MOREIRA, Ildeu de Castro. Fractais. In NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Complexidade e caos.** Rio de Janeiro: Editora UFRJ/ COPEA, 1999. p.51- 82

MORIN, Edgar. **Introdução ao pensamento complexo**. Lisboa, Instituto Piaget, 1991.

MORIN, Edgar. **A inteligência da complexidade.** 2.ed. São Paulo: Fundação Peirópolis, 1999.

[1] Licenciada em Matemática – UFRGS, Especialista em Informática na Educação – PUCRS, Mestre em Educação em Ciências e Matemática - PUCRS. Endereço para correspondência: 631, Sierra Vista LN, Valley Cottage, NY. Zip Code 10989 E-mail: laurafsam@optonline.net