O CONCEITO DE FUNÇÃO NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: A IMPORTÂNCIA DO ENRIQUECIMENTO DA IMAGEM CONCEITUAL E O SEU FAVORECIMENTO POR MEIO DA MODELAÇÃO

The Function Concept in Mathematics Teacher Training: the importance of development the concept image and its favoring through modeling

Jerson Sandro Santos de Souza
Rogério Fernando Pires
Leandro de Oliveira Souza

Resumo

O presente artigo visa a tecer reflexões sobre a importância de o professor de matemática apropriar-se de um repertório mais amplo e complexo de informações e representações, se a intenção for propiciar um ensino de funções que realmente favoreça a aprendizagem. Nesse sentido, trabalhou-se com a hipótese de que o desenvolvimento, no professor, da capacidade de utilizar o conceito de função de diversas maneiras e em diferentes contextos é essencial para possibilitar a superação, por parte dos alunos, dos principais obstáculos à aprendizagem desse conceito. Seguindo os pressupostos da pesquisa bibliográfica, buscou-se, por meio do confronto de diferentes contribuições teóricas, convergências que sinalizassem para formas menos estáticas de abordar o conceito de função, mais integradas a ciências e que possibilitassem uma gama de diferentes contextos. A modelação apresentou-se como uma excelente alternativa. À vista disso, discutiu-se o potencial de duas atividades de modelação, que podem ser trabalhadas em cursos de Licenciatura em Matemática ou de formação continuada. Concluiu-se que o enriquecimento das imagens conceituais dos professores de matemática pode ser considerado o estopim de um processo de renovação do ensino e aprendizagem do conceito de função. Com imagens conceituais desenvolvidas, professores são capazes de trabalhar esse tema para além de problemas típicos e contextos compartimentados. Isso garante ao aluno e possível futuro professor um leque de possibilidades para compreender em profundidade o referido conceito, formando uma base para aquilo que ele pode vir a ensinar.

Palavras-chave: Conceito de Função; Modelação; Imagem Conceitual; Formação de Professores de Matemática.

Abstract

In this paper, it aims to reflect on the importance of the mathematics teachers appropriating of a broader and complex repertoire of information and representations, if intentions of the teaching of functions are to provide support students learning. In this sense, we have worked on the hypothesis that the development in teachers' ability to use the concept of function in different ways and in different contexts is essential to make it possible for students to overcome the main obstacles to their learning concept. Following theoretical assumptions of bibliographical research, we sought, through the confrontation of different theoretical contributions, convergences that signalized to less static ways of approaching the concept of function, more integrated with sciences and that enabled a range of new contexts. The modeling has presented itself as an excellent alternative. In light of this, we discussed the potential of two modeling activities, which can be worked on in Mathematics or in teaching development courses. It was concluded that the enrichment of mathematics conceptual images of teachers could be considered as the trigger for a process of renewal of teaching and learning concepts of function. With conceptual images developed, teachers would be able to work on this theme beyond typical problems and compartmentalized contexts. This guarantees to students and future teachers a range of possibilities to understand the concept in-depth, forming a basis for what they could teach.

Keywords: Function Concept; Modeling; Concept Image; Mathematics Teacher Training.

Introdução

Embora nem todos os alunos precisem estudar funções em um nível avançado, há determinadas competências, necessárias à compreensão de fenômenos naturais e problemas sociais, cujo desenvolvimento depende, em certa medida, do trabalho com aspectos fundamentais desse conceito. Nesse sentido, Watson e Harel (2013) sugerem que, no âmbito escolar, noções de modelagem, de interpretação, de tradução e de transição entre diferentes representações sejam trabalhadas, tratando as funções como objeto que possibilite a atuação sobre problemáticas e informações. Para agir sobre os objetos, conceituando-os, é preciso não só raciocinar sobre o que seria invariante sob tais ações, mas também desenvolver um repertório mais amplo e complexo de informações e representações – condições que nos apontam a melhor forma de construir um contexto que favoreça a aprendizagem do conceito de função.

Quando se ensina Matemática, múltiplas formas de representações de funções podem ser observadas: nas comunicações verbais ou escritas, de modo que palavras são empregadas para exemplificar e descrever os fenômenos; na comunicação por demonstrações, que ocorre de maneira independente de contextos; nos símbolos matemáticos (numerais, símbolos operatórios, letras, variáveis...); nos exercícios aritméticos, equações, sistemas de equações; nas tabelas, diagramas geométricos, gráficos e planos. É importante que se entenda que as formas básicas de representações matemáticas e a tradução de uma forma para outra desempenham papéis centrais nas didáticas relacionadas ao assunto (NITSCH et al., 2014).

Compreender o conceito de função requer alternar os significados e os níveis de objetivação. A consolidação de conceitos, de acordo com Watson e Harel (2013), exige que haja uma coordenação dos níveis mais básicos do conhecimento. Em outras palavras, ensinar funções para que haja compreensão conceitual exige ir além de problemas típicos. Neste ponto de vista, atentando para o domínio docente, espera-se que os professores saibam, no mínimo, traduzir de forma flexível uma equação para uma outra representação de função (gráfica, numérica, tabular, em língua materna...) e vice-versa. Além disso, os docentes precisam perceber o conceito de função para além dos formalismos e dos tratamentos algébricos, pois, para que esse conceito possa ser utilizado como objeto que possibilite a atuação sobre a realidade, seus aspectos formais exigem uma teia de significados.

Em contrapartida, o processo de ensino e aprendizagem de funções se depara desde o início com um grave problema. Uma das principais fontes de informação do professor sobre os conteúdos a serem ministrados, os livros didáticos, geralmente tratam o conceito de função de maneira estática e fragmentada. Muitas vezes, eles não promovem a interlocução entre as diferentes representações nem consideram os múltiplos contextos em que esse conceito poderia ser estudado.

De acordo com o exposto, é razoável inferir que as principais dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de função estão diretamente relacionadas ao contexto limitado onde esse conceito é trabalhado. Porque aposta exclusivamente em problemas-padrão constantes nos livros didáticos, a abordagem tradicional dificulta o entendimento dos contras e prós de cada uma das diferentes representações de função e não enfatiza a importância da transição entre essas representações, ou seja, inviabiliza a aprendizagem do conceito, já que “A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação” (DUVAL, 2012, p.282).

Levando em conta as preocupações supracitadas, o presente artigo visa a discutir uma abordagem alternativa para o ensino de funções: a modelação. Essa alternativa possibilita uma gama de novos contextos, evidencia, na prática, a importância de se articular as várias representações de função, bem como defende a apresentação dos conteúdos matemáticos em uma ordem inversa: de aplicações práticas para o formalismo. Discutiu-se, neste sentido, duas atividades de modelação baseadas em experimentos, que podem ser exploradas em cursos de formação de professores. E trabalhou-se com a hipótese de que o desenvolvimento, no professor, da capacidade de utilizar o conceito de função de diversas maneiras e em diferentes contextos é essencial para possibilitar a superação, por parte dos alunos, dos principais obstáculos à aprendizagem desse conceito.

Metodologia

Optou-se pela realização de uma pesquisa bibliográfica, pois esse tipo de metodologia permite “ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente” (GIL, 2008, p.50). Essa característica torna a pesquisa bibliográfica ideal para os fins deste artigo, já que as inúmeras facetas que o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função assume são quase impossíveis de serem contempladas diretamente.

A pesquisa bibliográfica é uma modalidade de estudo e análise de documentos decorrentes de fontes científicas, como livros, monografias, dissertações, teses e artigos científicos. Ela pauta-se, portanto, na contribuição de diferentes autores sobre o tema; entretanto, mesmo que os documentos já tenham recebido tratamento analítico, “a pesquisa bibliográfica não é mera repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto, mas propicia o exame de um tema sob novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras” (MARCONI; LAKATOS, 2003, p.183). Em suma, a pesquisa bibliográfica implica um “conjunto ordenado de procedimentos de busca por soluções, atento ao objeto de estudo, e que, por isso, não pode ser aleatório” (LIMA; MIOTO, 2007, p.38).

Considerando os pressupostos mencionados, realizou-se, inicialmente, a seleção e análise de diferentes textos científicos que apresentassem discussões de natureza psicológica, histórico-epistemológica e didática sobre o conceito de função. Em seguida, por meio do confronto das várias perspectivas oriundas desses textos, buscou-se convergências que sinalizassem para formas menos estáticas de abordar o conceito de função, mais integradas a ciências e que possibilitassem ao aluno a oportunidade de se posicionar de maneira crítica no processo de construção dos seus próprios conhecimentos funcionais.

Matemática e Ciências

Dominar o formalismo matemático é, comumente, um pré-requisito para a compreensão na ciência; no entanto, este formalismo pode atuar como uma barreira que precisa ser superada quando se ensina. De acordo com Michelsen (2006), uma das fontes do problema é que muitas vezes os professores presumem que as bases dos conceitos matemáticos devem ser apreendidas antes de estudar ciências. Por se basear numa visão linear e não dialética, esta organização curricular deve ser objeto de discussão e reflexão no âmbito das pesquisas educacionais. Parece sensato conceber que, ao ensinar, as instruções motivem e despertem o interesse dos estudantes, principalmente, em tecnologia, ciências naturais, nas questões sociais e em formas científicas de pensar – algo que o paradigma mencionado tem dificuldade de propiciar.

Um dos paradigmas estudado por Michelsen (2006) está voltado para a visão de que matemática e ciências podem ser ensinadas como disciplinas relacionadas, pelas quais os sujeitos tentariam descrever fenômenos mediante modelos ao agir e lidar com eles. Atentando para esse paradigma, o autor propõe um novo currículo de matemática e ciências, que seja descrito de maneira integrada: uma alternativa aos currículos tradicionais. Entretanto, assim como a organização curricular anterior, esta tem suas limitações.

Quanto ao processo de ensino e aprendizagem de funções, por exemplo, é preciso ter cuidado ao introduzir funções no contexto de situações realistas. Uma abordagem utilitarista, que não exige estudar funções como uma classe de objetos, pode desenvolver um repertório de funções para usar em situações de modelagem, mas deixar outras áreas descobertas (WATSON; HAREL, 2013). Ademais, deve-se também levar em conta que ensinar Matemática integrada a ciências pode ser complexo. Isso porque será acrescentado ao processo uma carga extra de Matemática e de Matemática em um contexto.

Transferir o conhecimento matemático formal para um novo contexto é um grande desafio. Assim como Michelsen (2006), também admitimos que é um trabalho árduo para estudantes aplicar conceitos ideais e procedimentos aprendidos em Matemática em situações novas, inesperadas e imprevistas, tanto dentro quanto fora do contexto escolar. O agravante didático é ensinar vários tópicos conjuntamente, o que exigiria do professor planejamento e preparação diferenciados. Mas esse desafio precisa ser enfrentado dentro de um contexto de renovação do ensino da Matemática, pois, como acrescentam Ausubel et al. (1980), uma aprendizagem significativa pressupõe conceitos trabalhos em contextos variados – que requeiram máxima transformação do conhecimento adquirido –, nos quais questões e problemas são formulados de maneira nova e não familiar.

Modelagem

Embora pareça, a modelagem matemática não é uma ideia recente. Ela esteve sempre presente na criação das teorias científicas e, em especial, na criação das teorias matemáticas. O desenvolvimento científico ao longo do tempo apresentou inúmeras situações onde a modelagem teve um papel fundamental, como por exemplo, no desenvolvimento da equação $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, apresentada por D’Alembert no século XVIII, como modelo matemático para resolver o problema das cordas vibrantes.

A História da Matemática mostra que muitas ideias matemáticas surgiram a partir da busca de soluções para problemas práticos ligados a outras ciências ou ao dia-a-dia das pessoas. Nos dias de hoje, isso não é diferente, já que a Matemática vem sendo empregada em diferentes áreas do conhecimento, como na Biologia, na Economia, na Química, etc.

Diante desse cenário, surgem dois questionamentos: 1) o que é modelagem matemática? 2) de que modo ela pode ser utilizada como metodologia de ensino?

A resposta para a primeira questão é dada por Bassanezi (2006) ao salientar que a modelagem matemática consiste no processo de transformar situações da realidade em problemas matemáticos, cujas soluções são validadas com base nos contextos que deram origem aos problemas. O principal objetivo desse processo é a obtenção de modelos, que são um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procuram traduzir de alguma forma um fenômeno ou um problema. Eles costumam se apresentar de duas maneiras distintas: os dinâmicos, que simulam a variação do estágio do fenômeno modelado, por exemplo, o crescimento de uma população; e os estáticos, que representam a forma de um objeto, por exemplo, a forma geométrica de um alvéolo produzido pelas abelhas.

A resposta da segunda questão decorre de contribuições teóricas de pesquisadores da área de Educação Matemática que defendem que o ensino da Matemática deve privilegiar aspectos da modelagem matemática, tais como como D'Ambrosio (1993), Barbosa (2001), Jacobini e Wodewotzki (2001). A ideia basilar, nesse contexto, é partir de problemas concretos e interessantes para os aprendizes, levando em conta seus conhecimentos prévios, na tentativa de promover um diálogo entre construção e aplicação de conceitos dentro e fora da própria Matemática. Tal perspectiva rompe com os moldes tradicionais do ensino da Matemática, que privilegia a resolução de exercícios e problemas típicos dentro de contextos previsíveis e compartimentados.

Quanto ao ensino da Matemática, Bassanezi (2006) acrescenta que a apresentação dos assuntos como algo pronto e completo acaba conduzindo a um ensino desvinculado da realidade e até mesmo do processo histórico de construção da Matemática. Segundo esse mesmo autor, um teorema é normalmente apresentado aos estudantes seguindo rigorosamente a seguinte ordem: "enunciado → demonstração → aplicações"; quando poderia ser feita uma construção na ordem inversa, mais significativa, partindo de situações (internas ou externas à Matemática) que possam estimular a construção de um novo conhecimento, a formulação de hipóteses, a validação dessas hipóteses, novos questionamentos e, por fim, chegar ao enunciado do teorema.

Uma alternativa para a construção do conhecimento matemático por parte dos alunos, nessa ordem inversa sugerida por Bassanezi (2006), pode ser a utilização da modelagem matemática. Além de favorecer a construção do conhecimento, a modelagem ainda propicia ao educando o desenvolvimento de certas habilidades, algumas das quais foram descritas por Blum e Niss (1989), e apresentadas como seis argumentos em defesa do ensino da Matemática por meio da modelagem. Esses argumentos são:

1) Argumento formativo – enfatiza aplicações matemáticas e a resolução de problemas como processos para desenvolver certas capacidades e atitudes nos estudantes, tornando-os explorativos, criativos e habilidosos na resolução de problemas.

2) Argumento de competência crítica – focaliza a preparação dos estudantes para a vida real como cidadãos atuantes na sociedade, competentes para formar juízos próprios e reconhecer e entender exemplos representativos de aplicações de conceitos matemáticos.

3) Argumento de utilidade – enfatiza que a instrução matemática pode preparar o estudante para utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas.

4) Argumento intrínseco – considera que a inclusão da modelagem, da resolução de problemas e de aplicações fornecem ao estudante um rico arsenal para entender e interpretar a matemática em todas as suas facetas.

5) Argumento de aprendizagem – garante que os processos aplicativos facilitam ao estudante compreender melhor os argumentos matemáticos, guardar os conceitos e os resultados e valorizar a própria Matemática.

6) Argumento de alternativa epistemzlógica – a modelagem também se encaixa no Programa Etnomatemática, que propõe um enfoque epistemológico alternativo associado a uma historiografia mais ampla. Parte da realidade e chega, de maneira natural e através de um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural, à ação pedagógica.

Embora haja todos esses argumentos favoráveis à utilização da modelagem matemática no ensino, ela não está livre de entraves, obviamente. Bassanezi (2006) enfatiza que com seu emprego, principalmente em cursos regulares, corre-se o risco de se deparar com alguns obstáculos, tais como:

1) Obstáculos instrucionais – nos cursos que apresentam um programa a ser cumprido, a modelagem pode ser um processo demorado, não dando tempo de cumprir o programa todo.

2) Obstáculos aos estudantes – o uso da modelagem foge da rotina que os estudantes estão acostumados, isso pode fazer com que eles se percam no processo e se tornem apáticos nas aulas.

3) Obstáculos para os professores – muitos professores não se sentem preparados para desenvolver um trabalho com modelagem em seus cursos, por falta de conhecimento do processo ou por medo de se depararem com situações embaraçosas ao aplicar a Matemática em áreas que desconhecem.

Considerando esses obstáculos, é recomendado que sejam feitas algumas adaptações que tornem possível a utilização da modelagem como metodologia de ensino, sem perder a sua linha mestra, que é a pesquisa e a posterior criação de modelos pelos alunos. Além disso, o professor não pode se esquecer de que há um currículo estabelecido pelo sistema educacional a ser cumprido. Esse método que, por um lado, utiliza a modelagem matemática e, por outro, se preocupa em atender o programa do curso é denominado *modelação* (modelagem em Educação).

Segundo Biembengut e Hein (2014), na modelação, diferente da modelagem, o professor pode escolher determinados modelos com os quais deseja trabalhar, modelos que atentem para os conteúdos que fazem parte do programa do curso, o que facilita o cumprimento do currículo inicialmente proposto. Além disso, a recriação dos modelos escolhidos pelo professor é feita em sala de aula juntamente com os alunos, de acordo com o nível em questão. Com a modelação tem-se, portanto, uma oportunidade de unir o formalismo oriundo das abordagens tradicionais com o caráter investigativo e crítico das abordagens pautadas em contextos de situações realistas.

A imagem conceitual de função dos professores

O conceito de função é um tema amplamente debatido por pesquisadores da área de Educação Matemática que se interessam em pesquisar sobre os processos de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos. A justificativa para tamanho interesse na temática pode residir no fato de que esse conceito está presente na Matemática de todo o Ensino Médio e, ainda, é conhecimento base de disciplinas essenciais nos cursos de exatas, como Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear e Análise.

Por causa dessa presença marcante, tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior, o conceito de função se constitui como um ponto nevrálgico no ensino de Matemática, uma vez que é constatado por meio de pesquisas (ver Grande (2013) e Pires (2014)) que os estudantes desses dois níveis de ensino apresentam dificuldades em conceber função e, também, em reconhecer uma relação funcional em suas diversas formas de representação.

Em face a esse contexto, surgem inquietações: se os estudantes apresentam tanta dificuldade em conceber função e em reconhecer uma relação como funcional, será que o problema não está somente na aprendizagem, mas também no ensino? A maneira de conceber esse objeto matemático pelos estudantes não é reflexo daquilo que é ensinado pelo professor?

Motivados por esses questionamentos, nos debruçamos sobre pesquisas que tratam das concepções de professores que atuam tanto no nível médio quanto no superior acerca do conceito de função. Realizando a busca na literatura especializada, foi possível perceber que essas já eram preocupações de Alexander Norman em 1992 nos Estados Unidos, quando realizou uma pesquisa com professores do Ensino Secundário a fim de identificar os saberes desses sujeitos sobre função e também verificar como esse conhecimento se manifesta em sala de aula.

Em busca de desvelar os saberes dos professores acerca do objeto matemático em questão, Norman (1992) investigou que tipo de compreensão ou entendimento os professores participantes da pesquisa apresentavam. Para tanto, ele analisou três aspectos: 1) a exemplificação e caracterização de função dadas pelos professores; 2) a capacidade de utilizar as noções de função de diversas maneiras e em diferentes contextos; 3) a expressão do raciocínio funcional.

Para analisar esses três aspectos, o autor se apoiou nas ideias de Tall e Vinner (1981), que discutem o Conceito Imagem e o Conceito Definição (aqui chamaremos também de imagem do conceito e definição do conceito).

De acordo com Tall e Vinner (1981), a imagem do conceito é uma entidade não verbal associada na mente com o nome de um conceito, e pode ser uma representação visual, caso o conceito tenha representações visuais, como também pode ser uma coleção de impressões e experiências.

As formas verbais surgem como uma espécie de fase posterior. Por exemplo, ao ouvirmos a palavra mesa, a imagem de certa mesa pode ser evocada por nossa mente, ou podemos nos lembrar de uma reunião que aconteceu ao redor de uma mesa, refeições realizadas em uma mesa, enfim, experiências vivenciadas ao estar sentado à mesa. São as experiências que dão significado à palavra mesa e a palavra mesa, por sua vez, recria imaginativamente essas experiências, ela as sintetiza e as representa. Portanto, sem representações visuais, impressões e experiências as representações verbais não passariam de meros formalismos sem sentido e sem utilidade.

Quando ouvimos a palavra função, recordamos da expressão y = f(x), e nossa mente poderá visualizar o gráfico de uma função, como também podemos recorrer a alguma função específica como y = senx, y = logx etc. Sendo assim, falar de um conceito significa relacionar uma imagem ao seu nome.

Segundo essa perspectiva teórica, decorar a definição de um conceito não denota que o indivíduo tenha compreendido o seu significado. Para que a compreensão ocorra, é necessário que se associe uma série de figuras mentais, propriedades e processos ao nome do conceito, ou seja, é necessário o desenvolvimento de uma estrutura cognitiva que nutra de significados o conceito em construção.

Durante a abordagem pedagógica, no processo de formação do conceito, a definição vai modelar a imagem do conceito de tal maneira que ela se encaixe perfeitamente na sua definição. A imagem do conceito é modelada por experiências vivenciadas em sala de aula, situações de ensino apresentadas em livros-texto, como também por tarefas cognitivas realizadas pelo indivíduo; ou seja, diferentes conjunturas podem contribuir para que a imagem do conceito seja modelada de acordo com a definição.

A pesquisa realizada por Norman (1992) contou com a participação de dez professores norte-americanos que lecionavam no Ensino Secundário e estavam cursando o mestrado em Educação Matemática. Os dados da pesquisa foram produzidos e coletados por meio de uma entrevista com questões formuladas de modo a ajudar o pesquisador a entender como os saberes desses professores se manifestam quando precisam demonstrar seus conhecimentos.

Como resultados, Norman (1992) salienta que os professores participantes apresentaram diversas lacunas na compreensão do conceito de função, as quais se manifestaram de diferentes formas em cada um dos sujeitos. Contudo, a análise das entrevistas permitiu realizar observações que possibilitaram fazer algumas generalizações, tais como: os professores são sensíveis às definições informais de função que são utilizadas para determinar a funcionalidade das relações; preferem as representações gráficas às representações numéricas e simbólicas; alguns exibem um simples conceito de fixação quando interpretam funções; não têm construída uma forte conexão entre suas definições informais e o que entendem por definição matematicamente formal; prontamente, identificam exemplos-padrão de funções como tais, mas nas situações mais complexas às vezes dependem de inapropriados e incorretos testes de funcionalidade; têm dificuldade de imaginar e identificar situações que apresentam uma relação funcional; conhecem bem a evolução do conceito de função que aparecem nos livros; sentem-se confortáveis com a abordagem tradicional, para a introdução e desenvolvimento do conceito de função nas definições instrumentais.

Norman (1992) encerra seu trabalho destacando que o conceito de função é central na Matemática, por isso é essencial que os educadores matemáticos voltem suas atenções para determinar o que os professores sabem sobre funções e como esse conhecimento se manifesta em sala de aula.

Num panorama mais atual, considerando o contexto brasileiro, Pires (2014) realizou uma pesquisa que teve como um de seus objetivos investigar as concepções de função manifestadas por professores do Ensino Médio e do Ensino Superior. Participaram da pesquisa dez professores: oito lecionavam Matemática no Ensino Médio (todos licenciados) e dois atuavam no curso de licenciatura em Matemática. Os dados foram coletados por meio de uma entrevista e da análise de quatro atividades criadas pelos professores, que eles julgaram adequadas para discutir as noções de função com seus alunos.

Após a apuração das informações coletadas junto aos professores dos dois segmentos de ensino, a pesquisa realizada por Pires (2014), fundamentada nas ideias defendidas por Tall e Vinner (1981), traz resultados que de certa forma se assemelham aos achados de Norman (1992). Os principais resultados encontrados por Pires (2014) foram: predominância das funções afim e quadrática nas produções; presença maciça de situações e atividades encontradas em livros didáticos; preferência pela representação gráfica de uma função; presença da compartimentalização do conhecimento, principalmente naqueles que atuavam no Ensino Médio, ou seja, reconheciam que uma relação era funcional só se conseguissem associá-la a uma função afim, quadrática, periódica etc.; dificuldade de imaginar situações com contextos diferentes daqueles apresentados nos livros; crença no poder das operações formais em expressões algébricas, ou seja, apesar de preferirem a representação gráfica de uma função para analisar o seu comportamento, toda validação de uma situação com a qual se deparavam tinha de ser feita algebricamente; visão de função como processo e não como objeto, ou seja, função, para muitos, é uma ferramenta que serve para resolver problemas e não um objeto matemático; conhecimento abrangente acerca dos materiais didáticos e dos currículos a serem cumpridos.

Diante dessas circunstâncias, Pires (2014) inferiu que grande parte dos professores que participaram do estudo apresentavam uma imagem conceitual que muitas vezes não pareciam ter sido modeladas pela definição do conceito. Isso fica bastante evidente quando o autor, analisando as produções dos professores participantes da pesquisa, destaca que é possível perceber a predominância maciça das funções afim e quadrática, como se o conceito de função se limitasse a esses dois tipos de função.

Fazendo uma análise dos resultados das duas pesquisas, é possível perceber que, apesar dos 22 anos que separam a realização de ambas, a diferença no local de realização e a diferença no perfil dos participantes, ambos os estudos apresentam resultados bastante semelhantes, o que permite afirmar que é necessário se investir nas investigações sobre as concepções de função dos professores, na tentativa de descobrir e compreender com mais clareza os diferentes problemas oriundos do ensino e da aprendizagem desse conceito.

Dadas as limitações das duas pesquisas, a discussão aqui empreendida não é suficiente para levantar hipóteses nem para afirmar que a formação dos professores de Matemática é deficitária no que tange ao conceito de função. Contudo, ela possibilita realizar uma reflexão acerca da temática no sentido de ressaltar que existem problemas na compreensão desse conceito por parte de quem ensina Matemática.

Assim, trazer à baila discussões sobre as concepções de função daqueles que ensinam Matemática pode ser o caminho para a compreensão de diversos problemas de aprendizagem dos estudantes, muitos dos quais foram apontados pelas pesquisas. Dessa forma, será possível trilhar novos caminhos na busca de compreender melhor esses problemas e, assim, propor alternativas que possibilitem, se não superar, ao menos amenizar os entraves presentes no ensino e na aprendizagem de função.

O trabalho com experimentos e o enriquecimento da imagem conceitual

Uma imagem conceitual restrita ao contexto dos livros, que só permite conceber função em casos-padrão, pouco enriquecida em suma, deve ser, como apontam as duas pesquisas supracitadas, o principal ponto de discussão quando o assunto em pauta for a aprendizagem do conceito matemático de função. No caso da formação daquele que ensina Matemática, esse ponto nevrálgico atinge seu ápice, assumindo a qualidade de gênese do processo que culmina na não compreensão do conceito de função pelo aprendiz. Certamente, se o professor de matemática não conseguiu compreender função em sua integralidade, como um objeto matemático, isso o impedirá de auxiliar o aluno a compreendê-lo como tal.

Mas por que o enriquecimento da imagem conceitual é tão importante para a aquisição do conceito de função?

A imagem conceitual permite a assimilação da definição conceitual formal de função; quanto mais enriquecida for a imagem conceitual, mais capaz ela será de suportar a compreensão da definição formal, daí a importância de se desenvolver a imagem conceitual. Por outro lado, é a definição conceitual formal que modela a imagem conceitual, tornando-a coerente com a epistemologia da disciplina – o que desprende o conceito da exclusividade de impressões pessoais imediatas, que podem estar em desacordo com a definição formal. Nessa perspectiva, a aquisição de conceitos matemáticos deve combinar, numa ação recíproca, a definição conceitual e a imagem conceitual (ANDRADE; SARAIVA, 2012).

É verdade que uma pessoa pode saber utilizar um conceito em determinados contextos sem saber defini-lo, já que um conceito transcende as diferentes formas de representá-lo. Ou saber defini-lo exatamente como está no livro, mas acabar se contradizendo em situações cujo uso da definição é essencial. Nessas duas situações há falta de diálogo entre definição conceitual e imagem conceitual. Nelas tem-se apenas um simulacro de conceito, que pode ser útil em situações restritas, mas que a qualquer momento pode se mostrar inviável para auxiliar a interpretação de situações que envolvam relações funcionais.

Tall e Vinner (1981) destacam que o ensino da Matemática não deve visar apenas à construção formal, mas ao enriquecimento das imagens conceituais dos aprendizes; quer dizer, a aquisição da estrutura formal do conteúdo é necessária, pois deixa a imagem conceitual mais elaborada, mas não é suficiente para a aprendizagem. O ensino da Matemática deve, portanto, buscar, por meio do enriquecimento da imagem conceitual, uma relação dialética entre definição conceitual e imagem conceitual.

A ausência dessa relação dialética é fruto do trabalho pautado em contextos lineares, onde problemas típicos são apresentados e respostas típicas são exigidas. Esses contextos estimulam o exercício de algumas partes da imagem conceitual, enquanto outras são negligenciadas dado o alcance limitado da abordagem exemplo–definição–exercício, o que contribui para a construção de um conceito instável. Sem o diálogo, uma imagem conceitual fragmentada pode ser formada e uma definição memorizada e coexistirem paralelamente, mas quando esses aspectos conflitantes forem evocados simultaneamente, como consequência de alguma solicitação externa, podem gerar uma situação ambígua, privando o conceito de qualquer utilidade.

Imagine, por exemplo, um indivíduo que tenha sido apresentado ao conceito de função pela primeira vez. O professor enunciou a definição formal de função, trabalhou com aqueles problemas típicos apresentados nos livros didáticos e discutiu as características de tipos específicos de funções, em especial, as funções afim e quadrática. Discorreu ainda sobre as diferentes formas de representá-lo, dando ênfase às representações gráfica e algébrica. Quanto a esta última, um trabalho intensivo com fórmulas foi realizado. Ora, se o aprendiz só conseguir reconhecer que uma relação é funcional se for capaz de enquadrá-la como uma função afim ou quadrática, se tiver dificuldade de conceber função em contextos distintos daqueles presentes nos livros e se entender função como um processo, uma ferramenta de cunho algébrico para resolver problemas, e não como um objeto matemático, temos apenas consequências do contexto limitado no qual o conceito foi trabalhado.

Ou seja, o alcance de um conceito depende do teor da imagem conceitual que o suporta. Como os contextos apresentados nos livros são estáticos e contribuem pouco para a construção de um campo de significados para o conceito de função, outras possibilidades para o enriquecimento da imagem conceitual devem ser empreendidas. Nesse contexto, o trabalho com experimentos, que oferece um privilegiado contexto para a modelação e para o diálogo entre matemática e ciências, se apresenta como uma excelente alternativa.

A fim de compreender a importância do diálogo entre definição conceitual e imagem conceitual para a aprendizagem significativa do conceito de função, Souza (2017) desenvolveu, junto a vinte alunos de primeiro ano do Ensino Médio, três sequências didáticas baseadas em experimentos. O pesquisador pretendeu, por meio do trabalho com experimentos, construir um ambiente de aprendizagem que favorecesse a ampliação da restrita imagem conceitual dos sujeitos, para que eles pudessem utilizar conscientemente as definições que enunciaram e articular as múltiplas representações de função. Esse ambiente, onde toda a terminologia relacionada ao conceito de função surgiu como uma ferramenta prática para lidar com problemas com referência na realidade, propiciou, de fato, ampliação da substância da imagem conceitual dos sujeitos, que se refletiu no uso da definição.

Os resultados da pesquisa "sugerem a evolução do uso da definição: de uma definição inerte, abandonada de qualquer raciocínio logo após enunciada, para uma definição operacional, utilizada como fonte orientadora do pensamento funcional" (SOUZA, 2017, p.5). Além do mais, os sujeitos mostraram, no teste final, que sabiam transitar entre as várias representações de função, coisa que não aconteceu no teste de sondagem, evidenciando que a assimilação da definição formal também favoreceu a articulação das múltiplas representações desse conceito.

Apesar de não desconsiderarmos a importância da aula expositiva para a aprendizagem escolar, há alguns aspectos relativos ao processo de ensino e aprendizagem do conceito de função que depende de algo a mais, dada a profusão de termos abstratos que orbitam o referido conceito. Entendemos que a lacuna deixada pela abordagem tradicional pode ser preenchida com atividades práticas, nas quais algumas aplicações do conceito de função são desenvolvidas mediante a resolução de problemas com referência na realidade.

Nessas atividades, os contras e prós das representações podem ser facilmente percebidos, revelando assim os limites de ação de cada uma delas. Ademais, o caráter dinâmico e interativo de atividades práticas alavanca a disposição para aprender significativamente o conceito de função. Em atividades baseadas em situações concretas, em que há manipulação de materiais e o trabalho em grupo, o aprendiz tem a oportunidade de trocar informações com seus colegas, o que possibilita, de outro modo, o enriquecimento de suas imagens conceituais, tendo em vista a exposição a outros pontos de vista e o intercâmbio de significados estabelecido.

A seguir discutiremos dois experimentos[1] que podem ser trabalhados em cursos de Licenciatura em Matemática ou em cursos de formação continuada. São simples, mas fornecem possibilidades para o trabalho em sala de aula, provendo pontos de partida para discussões acerca da natureza do conceito de função, dos limites de cada uma de suas representações e do papel da definição para a construção do conceito como um todo.

[1] Os experimentos discutidos são adaptações dos experimentos disponibilizados pela coleção M³ Matemática Multimídia, desenvolvida pela Unicamp. Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/>. Acesso em: 15 nov. 2019.

Experimento 1: Caixa de Papel

Quadro 1 – Descrição do experimento 1: Caixa de Papel

Objetivo	Discutir com os alunos o conceito de volume aliado ao comportamento de funções.
Conteúdos abordados	Polinômios: funções polinomiais, gráficos e propriedades; Geometria espacial: problemas de otimização; Unidades de medida.
Duração	Uma aula dupla
Materiais necessários	1) folha de papel A4; 2) régua de 30 cm; 3) lápis; 4) tubo de cola; 5) tesoura.
Problema	Dada uma folha A4, qual a medida de x para que a caixa, sem tampa, obtida pela dobradura dos cantos (figura 1), tenha o maior volume possível?

Fonte: Os autores

Primeiramente, os alunos devem fazer, com o auxílio de régua, quadrados de lado x nos quatro cantos da folha A4. Cada equipe pode confeccionar 10 caixas, escolhendo 10 valores diferentes para x, com x variando entre 1 cm e 10 cm. Cortando-se um dos lados de cada um dos quadrados e colando-se as faces desses quadrados é possível montar as caixas. Observe a figura 1.

Figura 1 – Procedimento para a construção das caixas

Fonte: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1367>

Depois da confecção das 10 caixas, colocando-as uma ao lado da outra, os grupos devem discutir e tentar descobrir qual delas tem maior volume, baseando-se apenas na percepção visual. Feito isso, devem numerá-las em relação ao volume, 1 para o maior volume e 10 para o menor. Essa numeração serve de registro para a verificação da percepção visual dos alunos acerca do volume das caixas.

Após a ordenação das caixas com base nas suas percepções visuais, os alunos têm de calcular algebricamente o volume das caixas, efetuando o produto das medidas das três dimensões dela. Esses produtos servem de base para uma segunda numeração; o maior volume calculado é representado por 1 e o menor volume calculado por 10. Neste momento, eles comparam a percepção visual que tiveram do volume com o seu valor real.

Com os dados obtidos, uma tabela contendo quatro colunas deve ser feita no caderno: a da primeira numeração (percepção visual), a da segunda numeração (cálculo algébrico), a da altura (os valores de x) e a do volume (produto das três dimensões).

Após a confecção e preenchimento da tabela, os grupos devem esboçar o gráfico do volume da caixa em função de sua altura x, em um sistema de eixos de coordenadas. Pautando-se apenas nos 10 valores, algumas respostas diferentes serão dadas à pergunta: qual x resultará no maior volume possível? Ficará claro que apenas 10 valores de x não são suficientes para uma resposta precisa. Nesse momento entra em cena a importância da representação algébrica. Por meio de manipulações algébricas e com o auxílio de um software de calculadora gráfica, evidencia-se que os gráficos elaborados com os dez pontos é parte do gráfico da função $y = 4x^3 - 102x^2 + 630x$.

O valor máximo para o volume é de aproximadamente 1144,167 cm³, proveniente da escolha x = 4,056 cm. A maioria dos alunos podem chegar à resposta aproximada x = 4 cm, o que depende das escolhas feitas para x. No geral, os contras e prós de cada representação serão evidenciados. A tabela para organizar os dados, primeira tentativa para entender o comportamento do fenômeno; o gráfico para visualizar como se dá a relação entre as duas variáveis; a representação algébrica, que confere generalidade e precisão.

No final, pode-se discutir sobre a divergência entre a intuição e o cálculo matemático, atentando para a precisão que este último pode alcançar. Além disso, pode-se solicitar uma explicação, por meio da definição, do motivo pelo qual a relação entre as grandezas altura (x) e volume (v) é funcional

Experimento 2: Dinamômetro[2] com elástico

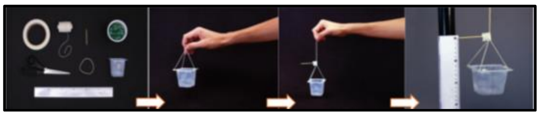
Quadro 2 – Descrição do experimento 2: Dinamômetro com Elástico

Objetivo	Verificar se um elástico comum obedece à lei de Hooke; construir um gráfico através de dados obtidos experimentalmente; conhecer uma aplicação da função afim.
Conteúdos abordados	Comportamento linear e função afim.
Duração	Uma aula dupla
Materiais necessários	1) elástico de látex (aproximadamente 20 cm); 2) 60 cm de barbante; 3) tesoura; 4) um copo plástico; 5) 30 bolas de gude de mesmo tamanho; 6) régua graduada de 30 cm; 7) fita adesiva; 8) um palito de dente.
Problema	Analisando o gráfico construído, vocês diriam que o elástico obedece exatamente à Lei de Hooke? Isto é, será que a variação de comprimento em um elástico também é proporcional à força aplicada sobre ele? Por quê?

Fonte: Os autores

A princípio, utilizando os materiais mencionados (figura 2), os participantes devem construir um dinamômetro.

Figura 2 – Materiais e construção do dinamômetro



Fonte: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1006>

Para tal, eles devem fazer o seguinte: 1) dividir o barbante em três pedaços de 20 cm cada; 2) fazer três furos devidamente espaçados no copo plástico e amarrar um pedaço de barbante em cada um deles; 3) juntar as extremidades dos barbantes e dar um nó, de modo que os copos fiquem bem equilibrados; 4) amarrar uma das extremidades do elástico no ponto de junção dos barbantes (nó); 5) ainda no nó, fixar um palito de dentes perpendicularmente ao elástico usando uma fita adesiva, de forma a obter um ponteiro; 6) com uma fita adesiva, fixar bem a outra extremidade do elástico na mesa (ou em outros objetos que propiciem situações análogas), próximo a uma de suas pernas, deixando-o pendurado; 7) prender a régua na perna da mesa, de modo a deixar o palito de dentes alinhado com o zero (a perna da mesa precisa ser perpendicular ao chão).

O objetivo deste experimento é saber se a variação de comprimento em um elástico é proporcional à força aplicada sobre ele. Para tanto, os alunos devem anotar em uma tabela de duas colunas – números de bolas de gude (n) e variação do comprimento do elástico em mm (ΔL) – qual é a variação do comprimento do elástico do dinamômetro em função do número de bolas de gude que ele está suportando (a variação do comprimento é dada pela indicação do ponteiro do dinamômetro), para uma só bola, para duas, três, até finalizar com trinta bolas de gude.

Com os dados da tabela, deve-se construir um gráfico cartesiano colocando o número de bolinhas de gude (n) no eixo das abscissas e a deformação do elástico (ΔL) no eixo das ordenadas.

Os gráficos construídos revelarão que para um número pequeno de bolinhas de gude suportadas o comportamento não é linear e, portanto, não é proporcional à força exercida. Sendo assim, a primeira conclusão é que o elástico não obedece exatamente à Lei de Hooke. Porém, a partir de um certo número de bolinhas, o gráfico tomará a forma aproximada de uma função afim. Neste momento, a seguinte questão pode ser proposta aos alunos: Analisando o gráfico construído, vocês diriam que o elástico obedece exatamente à Lei de Hooke? Por quê?

Os dados coletados e tabelados podem ser inseridos em um software de calculadora gráfica para se obter uma reta que melhor se ajuste aos dados fornecidos, bem como uma equação que permita saber qual seria a variação sofrida pelo elástico para trinta e uma ou mais bolas de gude. Esse procedimento pode ser realizado por cada equipe, e depois comparados. A pergunta acima pode suscitar discussões sobre os motivos das defasagens que ocorrem entre as situações experimentais e os modelos ideais.

Este experimento pode proporcionar aos alunos o entendimento da importância do conceito de função, no que se refere ao fornecimento de um instrumento de previsão. Ficará claro que as situações experimentais têm certas limitações; por exemplo, o gráfico só ficará linear a partir de certo valor, e a partir de um determinado número de bolas de gude o elástico ficará muito rígido e o gráfico novamente não será mais uma reta, pois o elástico estará prestes a se romper. Se a lei de Hooke fosse realmente aplicada sobre o elástico, deveríamos ter um gráfico linear, mas o que teremos será apenas uma aproximação razoável.

[2] O dinamômetro é um instrumento constituído basicamente por uma mola de constante *k* conhecida e usa a lei de Hooke para medir forças através da variação de comprimento sofrida. Essa lei nos permite calcular a deformação que uma mola sofre ao se aplicar uma determinada força sobre ela, podendo ser equacionada da seguinte maneira: $F = k.\Delta L$, onde F é a força aplicada sobre o corpo elástico, k é uma constante característica da mola que traduz sua rigidez e ΔL é a deformação linear causada.

Isso se dá pelo fato de não se estar trabalhando em situações ideais, isto é, o material do elástico não sofre deformações plásticas permanentes (a constante característica k da borracha não permanece constante com a variação da força aplicada sobre ela). A ideia de fórmula será reforçada com esse experimento. Além do mais, ele permite perceber a necessidade de transcender as limitações físicas imediatas para se compreender um fenômeno físico como um todo.

Considerações finais

As duas situações experimentais discutidas podem fornecer inúmeras possibilidades para o enriquecimento da imagem conceitual dos envolvidos. Mas atividades práticas não precisam e não devem ser restritas ao contexto do que é necessário conhecer sobre funções para se lecionar no Ensino Médio. Para se enfatizar a generalidade e a abrangência do conceito de função, nos cursos de formação de professores de matemática, pode-se trabalhar com situações não restritas ao contexto das funções reais de uma variável real, como é o caso de funções de variável complexa, funções do plano nele mesmo e transformações topológicas. Segundo Garcia, "o professor necessita de um conhecimento profundo que vá além da Matemática escolar para poder criar oportunidades de interação, discussão e investigação na sala de aula, e mudanças no currículo" (2009, p.49).

Além do mais, o contexto dos livros não deve ser visto como um vilão, pois é só mais um contexto e como qualquer outro tem suas limitações; o problema é trabalhar exclusivamente nele. A heterogeneidade de contextos é fundamental para o enriquecimento da imagem conceitual e a consequente formação de um conceito estável. "Por centrar-se na particularidade de casos isolados ou homogêneos, a aprendizagem multicontextual facilita a abstração dos atributos comuns, acentua o poder de generalização e aplicabilidade (transferência) do conceito resultante, e é dotada de maior estabilidade" (AUSUBEL et al., 1980, p.94).

Enfim, se a linguagem matemática utilizada pelos professores no ensino de funções sofre mais influência das experiências vivenciadas no ensino médio do que daquelas vivenciadas na Licenciatura, como afirmam Zuffi e Pacca (2002), então o enriquecimento de suas imagens conceituais pode ser considerado o estopim de um processo de renovação do ensino e aprendizagem do conceito de função. Ora, professores com imagens conceituais desenvolvidas podem proporcionar ambientes de aprendizagem mais ricos, utilizando a ideia de função de diferentes maneiras e em múltiplos contextos. Nessas condições, o conhecimento manifestado pelo professor em sala de aula favorecerá ao aluno e possível futuro professor um leque de possibilidades para compreender em profundidade o referido conceito, formando uma base para aquilo que ele pode vir a ensinar – isso mostra o caráter cíclico desse fenômeno.

Referências

ANDRADE, J. M.; SARAIVA, M. J. Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 15, n. 2, p. 137-169, jul. 2012.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática e os professores: a questão da formação. **Bolema**, Rio Claro, v. 14, n. 15, p. 5-23, 2001.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2006.

BIEMBENGUT, M. S; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2014.

BLUM, W.; NISS, M. Mathematical problem solved, modelling, applications, and links to other objects. In: ______; ______; HUNTLEY, I. (Eds.). **Modelling, applications and applied problem resolved**. Chinchester: Ellis Horwood Ed., 1989.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática: um programa. **Educação Matemática em Revista**, SBEM, Blumenau, n. 1, p. 5-11, 1993.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

GARCIA, V. C. Função: o professor conhece este conceito? **VIDYA**, v. 29, n. 2, p. 43-52, jul./dez., 2009.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6.ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GRANDE, A. L. **Um estudo epistemológico do teorema fundamental do cálculo voltado ao seu ensino**. 2013. 324f. Tese (Doutorado em

Educação: Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

JACOBINI, O. R.; WODEWOTZKI, M. L. L. Modelagem matemática aplicada no ensino de estatística nos cursos de graduação. **Bolema**, Rio Claro, v. 14, n. 15, 2001.

LIMA, T. C. S.; MIOTO, R. C. T. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. **Revista Katálysis**, Florianópolis, v. 10, n. esp., p. 37-45, 2007.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5.ed. São Paulo: Atlas 2003.

MICHELSEN, C. Functions: a modelling tool in mathematics and Science. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 269-280, 2006.

NITSCH, R.; FREDEBOHM, A.; BRUDER, R.; KELAVA, A.; NACCARELLA, D.; LEUDERS, T.; WIRTZ, M. Students' competencies in working with functions in secondary mathematics education: empirical examination of a competence structure model. **International Journal of Science and Mathematics Education**, n. 13, p. 657-682, 2014.

NORMAN, A. Teachers' mathematical knowledge of the concept of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Eds.). **The concept of function**: aspects of epistemology and pedagogy, MAA Notes n. 25, Washington, DC: Mathematical Association of America, 1992, p. 215-232.

PIRES, R. F. **Função:** concepções de professores e estudantes dos ensinos médio e superior. 2014. 440f. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

SOUZA, J. S. S. **O conceito de função:** da operacionalização da definição à aprendizagem significativa. 2017. 159 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2017.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 12, n. 2, p. 151-169, 1981.

WATSON, A.; HAREL, G. The role of teachers' knowledge of functions in their teaching: a conceptual approach with illustrations from two cases. **Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education**, v. 13, n. 2, p. 154-168, 2013.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. A. O conceito de função e sua linguagem para os professores de matemática e de ciências. **Ciência & Educação**, v. 8, n. 1, p. 1-12, 2002.

Jerson Sandro Santos de Souza: Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Amazonas (UFAM), professor efetivo da Secretaria Municipal de Educação de Manaus (SEMED-Manaus) e da Secretaria de Estado de Educação e Qualidade de Ensino do Amazonas (SEDUC-AM).

Rogério Fernando Pires: Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), Professor Adjunto do Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP) da Universidade Federal de Uberlândia (Campus Ituiutaba); professor colaborador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da UFSCar e durante quinze anos atuou como professor de Matemática nas redes municipal de ensino de Salto de Pirapora e estadual de São Paulo.

Leandro de Oliveira Souza: Doutor e Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul (Unicsul). Tem mais de 10 anos de experiência lecionando e atuando como professor e coordenador de escolas públicas e particulares de educação básica. Foi professor na Universidade Federal do Amazonas (UFAM) e atualmente é professor da Universidade Federal de Uberlândia (UFU/ICENP). É membro eleito da Diretoria Nacional Executiva da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) no triênio (2019-2022).