

UMA TRAJETÓRIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM PARA O TRABALHO COM VETORES POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A learning-teaching trajectory to teach vectors through Problem Solving

*Fernanda Felix
Brunna Leonardi Caciolato
Edilaine Regina dos Santos*

Resumo

Neste artigo, apresentamos um relato sobre a experiência da elaboração de uma trajetória de ensino e aprendizagem para o trabalho com vetores com alunos do Ensino Médio por meio da Resolução de Problemas. Essa experiência deu-se no âmbito do estágio curricular obrigatório do curso de Matemática de uma universidade pública do Estado do Paraná¹ durante o primeiro semestre de 2016. A elaboração dessa proposta possibilitou às futuras professoras, entre outras coisas, uma visão geral do trabalho que poderia ser desenvolvido com os alunos e suporte para agir diante de determinadas situações tendo em vista a aprendizagem matemática dos alunos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Trajetória de ensino e aprendizagem. Resolução de Problemas. Vetores.

Abstract

In this paper we present an experience report of planning a learning-teaching trajectory to teach the high school students vectors through Problem Solving. This experience occurred in the context of the curricular internship from a State University of Paraná Math Teacher Education course during the first semester of 2016. The proposal planning provided prospective teachers, among other things, an overview of the work that could be developed with the students and support to deal with certain situations in order to assist in the mathematical learning of students.

Keywords: Mathematics Education. Learning-teaching trajectory. Problem Solving. Vectors.

Introdução

De um modo geral, o contato de alunos do Ensino Médio com o trabalho com vetores ocorre via estudo de tópicos da Física, mesmo este sendo considerado um conceito matemático (CHAGAS, 2014).

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p.77),

[...] é desejável, também, que o professor de Matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico

¹ Nessa universidade, durante o primeiro semestre letivo, os estagiários da turma do 4º ano do curso (da qual faziam parte as duas primeiras autoras do artigo), em duplas, elaboraram duas oficinas sobre conteúdos de Matemática do Ensino Médio, sob a orientação de um professor do departamento de Matemática dessa mesma instituição (terceira autora), a serem ministradas durante o segundo semestre letivo em uma escola pública. Essas oficinas foram realizadas aos sábados, com duração de 4 horas cada uma.

(coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas). [...] A inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de Matemática viria a corrigir a distorção causada pelo fato de que é um tópico matemático importante, mas que está presente no ensino médio somente nas aulas de Física.

Tendo isso em vista, e levando também em consideração uma solicitação de um professor de Matemática de uma escola pública paranaense,² elaboramos uma trajetória de ensino e aprendizagem para o trabalho com vetores a ser desenvolvida por meio da Resolução de Problemas³ com alunos do 1º ano do Ensino Médio. Tal proposta de trabalho foi elaborada objetivando que os alunos: elaborassem estratégias para resolver problemas relacionados a vetores a partir da leitura, análise e interpretação de informações apresentadas nos enunciados desses problemas, compreendessem o conceito de vetor e suas representações e realizassem adição com vetores.

Neste artigo, apresentamos um relato sobre a experiência da elaboração dessa trajetória. Em um primeiro momento, são apresentadas algumas considerações a respeito de trajetória de ensino e aprendizagem, e, na sequência, aspectos acerca do desenvolvimento da trajetória e a proposta elaborada, além de considerações finais.

Trajétoria de ensino e aprendizagem: algumas considerações

Nos últimos anos, alguns autores (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001a, 2001b, 2002; GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000; GRAVEMEIJER, 2005; CLEMENTS, SARAMA, 2004) têm apontado a utilização de trajetórias de ensino e aprendizagem pelos professores como uma

possibilidade de planejamento do trabalho a ser realizado com os alunos em sala de aula.

De modo geral, segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2001a, 2001b, 2002), uma trajetória de ensino e aprendizagem apresenta três aspectos entrelaçados:

- um esquema do assunto, com indicações de quais conteúdos ou conceitos deve ou pode ser ensinado;
- uma trajetória de aprendizagem, o que proporciona uma visão geral do processo de aprendizagem dos alunos;
- uma trajetória de ensino, contendo indicações didáticas para o ensino e como esse pode ser relacionado com o processo de aprendizagem.

Um dos principais objetivos de uma trajetória de ensino e aprendizagem refere-se a possibilitar que o professor, por meio de uma rota imaginada, tenha uma visão geral do que poderá desenvolver no trabalho com os alunos em sala de aula (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001a, 2001b, 2002; GRAVEMEIJER, TERWEL, 2000).

Nesse sentido pode-se dizer que a elaboração dessa trajetória conta com um aspecto relacionado ao pensamento antecipatório (CLEMENTS; SARAMA, 2004) no que se refere ao fato de tentar fazer conjecturas a respeito do que pode ocorrer em sala de aula e de como ele, como professor, pode agir diante dessas ocorrências. Por meio disso, o professor, segundo Canavarro (2011, p.13),

[...] fica mais apto a explorar todo o potencial da tarefa para as aprendizagens matemáticas dos alunos e a tomar decisões acerca de como estruturar as apresentações e gerir as discussões com base em critérios relacionados com a aprendizagem matemática.

Entretanto, vale destacar que modificações durante a execução da proposta podem ser realizadas, pois, conforme Rossetto (2016, p.90),

[...] por mais que o planejamento seja detalhado, podem ocorrer imprevistos que exijam novas decisões. Mesmo que o professor desenvolva um plano para sala de aula, ele

² Durante o início do ano letivo de 2016, o professor da turma de alunos do 1º ano do Ensino Médio em que as estagiárias realizariam o estágio de regência indicou *vetores* como um conteúdo a ser trabalhado em uma das oficinas.

³ A utilização dessa abordagem de ensino deu-se por opção das estagiárias e pelo fato de ser uma das tendências em Educação Matemática indicadas no plano de estágio do curso de Matemática. A oficina foi elaborada e desenvolvida tendo como base a perspectiva “ensinar através da Resolução de Problemas” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009).

poderá ser repensado, modificado, pois as interações professor-aluno e as observações do professor fazem com que isso ocorra.

Pode-se dizer que a trajetória de ensino e aprendizagem pode ser vista então como um recurso a mais que o professor pode utilizar tanto para o planejamento do trabalho a ser realizado com os alunos como para o desenvolvimento desse trabalho em sala de aula, servindo como um “quadro de referência” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001a).

A elaboração da trajetória para o trabalho com vetores

A opção por utilizar uma trajetória de ensino e aprendizagem para o planejamento dessa oficina de estágio deu-se pelo motivo de acreditarmos que esta nos poderia dar mais segurança e auxílio em relação à sua preparação, pois, ao elaborar a trajetória, poderíamos ter a oportunidade de refletir acerca de algumas situações que poderiam ocorrer em sala de aula.

Para tanto, iniciamos, com a seleção dos problemas, a definição dos objetivos para o trabalho com os alunos, além de estudarmos o conteúdo do tema. Tendo isso em vista, delineamos um possível encaminhamento para o planejamento da oficina, elaborando: dúvidas que os alunos poderiam ter e como iríamos esclarecer cada uma delas, uma possível discussão a partir da resolução do problema visando à formalização do conteúdo pretendido. Esse processo levou a muitas idas e vindas.

Durante a elaboração da trajetória, imaginávamos-nos no dia da oficina conduzindo o trabalho com os alunos e pensávamos: “será que os alunos terão dúvidas aqui?”. Então, elaborávamos perguntas que eles poderiam nos fazer e logo já tentávamos pensar em possíveis encaminhamentos. Levando isso em consideração, organizamos possíveis diálogos com os alunos com o intuito de orientar o desenvolvimento da oficina. Vale destacar que isso, inicialmente, não foi algo fácil, tendo em vista que, para tanto, foi necessário nos colocar no papel dos alunos. Cabe salientar também que nem sempre uma trajetória de ensino e aprendizagem precisa envolver pos-

síveis diálogos entre professor e alunos, mas essa opção nos propiciou mais segurança e confiança para a realização dessa proposta.

Tínhamos consciência de que no dia da realização do trabalho com os alunos poderiam aparecer resoluções, dúvidas e comentários diferentes do que havíamos planejado. Contudo, imaginávamos que o estabelecimento de algumas hipóteses do que poderia acontecer poderia nos auxiliar a agir mais rapidamente e conscientemente diante de determinadas situações tendo em vista a aprendizagem matemática dos alunos.

A seguir, apresentamos a trajetória de ensino e aprendizagem elaborada para o trabalho com vetores por meio da Resolução de Problemas. Essa trajetória compreende os enunciados dos problemas a ser utilizados “visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009, p.7), objetivos em relação ao trabalho com esses problemas e uma possível resolução para cada uma deles, além de uma proposta de formalização do conteúdo pretendido. Cabe salientar que a proposta aqui apresentada refere-se ao que foi planejado para o desenvolvimento da oficina, e por isso algumas ações estão descritas como ações no futuro.

Quadro 1 – Problema 1.

Lucas desce de um ônibus e caminha até o ponto A pretendendo chegar ao ponto B. Como Lucas não conhece a região, pede informações a um desconhecido, que também está em A. Essa pessoa pega seu celular, que recebe sinal de GPS, e acessa um aplicativo que exibe a figura abaixo. Como o desconhecido está apressado, ele apenas informa ao Lucas: “Ande três quadras, vire na esquina e ande mais duas quadras”. Analise e responda a questão abaixo:

Essas informações são suficientes para Lucas chegar ao ponto B em uma única tentativa? Justifique sua resposta.

Fonte: adaptado de Oliveira (2014).

Com esse problema, tem-se a intenção de: definir direção e sentido, discutir o significado de grandeza escalar e vetorial, conceituar vetor.

Uma possível resolução para esse problema é a seguinte: “Não”. Informar apenas quantas quadras serão percorridas de A até B não é suficiente para que Lucas chegue ao seu destino. Provavelmente ele se perguntou: “Vou andar três quadras para onde?”, ou seja, faltou informar para o Lucas em que direção e que sentido ele deveria andar. Olhando para o mapa, podemos perceber que ele deveria seguir na direção horizontal no sentido leste por três quadras e depois ir para a direção vertical seguindo o sentido norte para chegar até o ponto B.

Depois de os alunos resolverem o problema, pediremos para que algumas resoluções sejam apresentadas no quadro para que possamos fazer uma discussão sobre elas, tirar as dúvidas existentes e comparar as respostas para chegar a um consenso sobre a resolução do problema.

Para esse momento, temos a seguinte trajetória hipotética de encaminhamento de aula:⁴

P: “Vocês acham que o Lucas vai poder chegar ao ponto B com essas informações?”.

A: “Não”.

P: “Por quê?”.

A: “Porque ele não disse para qual lado ele deveria seguir, se era para direita ou para a esquerda”.

P: “E saber apenas se era para a direita ou para a esquerda bastaria para o Lucas chegar ao seu destino?”.

A: “Não”.

P: “O que vocês acham que o Lucas ainda precisaria saber?”.

A: “Depois de seguir para a direita, chegando à esquina, ele deveria saber para qual lado ele deveria seguir, se era para cima ou para baixo”.

P: “Para essa questão de localização, usamos as palavras direção e sentido”.

A: “Mas, professora, o que é direção e sentido?”.

P: “Direção é o que ‘determina o curso’ (LEITHOLD, 1994, p.784). Por exemplo, horizontal vertical, diagonal, etc.”.

P: “E sentido é o que ‘determina o destino’ (LEITHOLD, 1994, p.784). Por exemplo: norte (para cima), sul (para baixo), leste (para a direita), oeste (para a esquerda)”.

P: “Olhando para o mapa, qual a direção que o Lucas deveria seguir?”.

A: “Três quadras na direção horizontal”.

P: “E qual o sentido ele teria de seguir?”.

A: “Para leste”.

P: “Muito bem! Depois de andar as três quadras, qual direção e qual sentido ele terá de seguir?”.

A: “Ele terá que ir para a direção vertical e para o sentido norte”.

Resolvido o problema poderemos comentar:

P: “Só saber a distância que deveria percorrer era suficiente para que Lucas chegasse ao seu destino?”.

A: “Não, ele precisava saber também a direção e o sentido”.

P: “Quando não precisamos da direção e do sentido, estamos nos referindo a uma grandeza escalar. Grandezas escalares são aquelas que ficam completamente caracterizadas fornecendo-se apenas um número real associado a uma unidade de medida, por exemplo: comprimento, área, volume, temperatura, etc. (LISOVSKI, 2014; OLIVEIRA, 2014)”.

P: “Como no caso do Lucas era necessário informar, além da distância, uma direção e um sentido, então nesse caso usamos uma grandeza chamada vetorial. Grandezas vetoriais são aquelas que ficam completamente caracterizadas fornecendo-se, além do número e de uma unidade de medida, a direção e o sentido, por exemplo: velocidade, aceleração, força, etc. (LISOVSKI, 2014; OLIVEIRA, 2014)”.

A: “Por que usamos a palavra ‘vetorial’ se estamos nos referindo à direção e ao sentido? Qual a relação disso?”.

P: “Porque a representação matemática de grandezas vetoriais é definida por vetor. Vetor é um objeto matemático associado a grandezas vetoriais, ou seja, grandezas que têm medida, direção e sentido (LISOVSKI, 2014; OLIVEIRA, 2014)”.

Na sequência, apresentamos a proposta de trabalho com o problema 2.

⁴ Essa trajetória hipotética de encaminhamento de aula simula um possível diálogo entre as estagiárias, representadas pela sigla P, e os alunos, representados pela sigla A.

Quadro 2 – Problema 2.

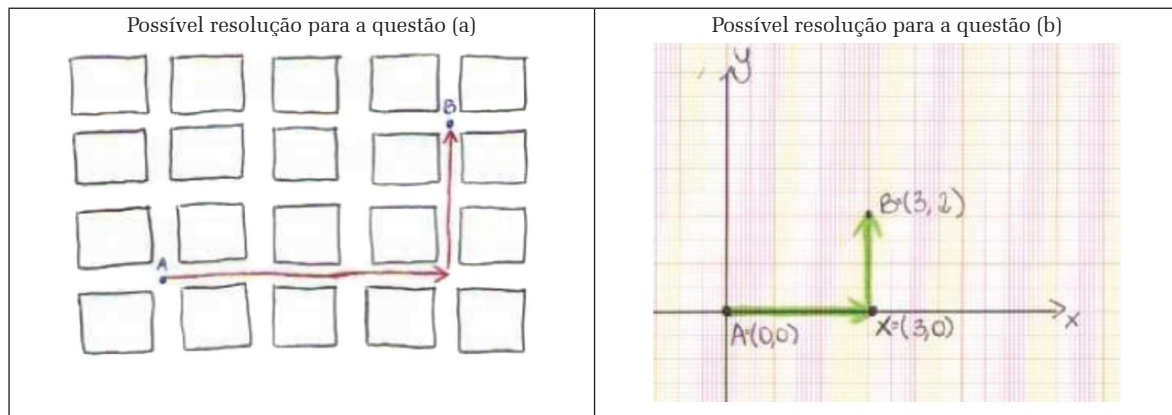
Ainda sobre a tarefa anterior, responda às questões a seguir:
 a) Como podemos representar o caminho percorrido por Lucas saindo de A e chegando a B?
 b) Como você representaria, no plano cartesiano, esse caminho percorrido por Lucas?

Fonte: as autoras.

Por meio do trabalho com esse problema, têm-se como objetivos: definir segmento orientado e trabalhar as representações de um vetor.

Uma possibilidade de resolução para esse problema é apresentada no quadro a seguir:

Quadro 3 – Possível resolução para o problema 2.



Fonte: as autoras.

Pediremos para que as resoluções diferentes sejam expostas no quadro para que todos os alunos possam visualizar as produções. E, após, conversaremos a respeito delas e das dúvidas existentes.

Para esse momento, em relação ao item (a), temos a seguinte trajetória hipotética de encaminhamento de aula:

P: “Como você representou a ida de Lucas até o ponto B?”.

A: “Com linhas”.

P: “Podemos utilizar outra nomenclatura para isso?”.

A: “Reta, professora?”.

P: “Uma reta não seria algo bem longo, onde você não consegue ver nem o começo e nem o final?”.

A: “Seria, professora”.

P: “E, nesse caso do Lucas, podemos ver onde ele começa e onde ele termina o seu caminho?”.

A: “Podemos”.

P: “Então, nesse caso, devemos chamar de segmento de reta, porque o caminho que ele percorreu não é a reta toda, e sim ‘um pedaço’ dela. Por isso usamos esse nome”.

A: “Ah, entendi!”.

P: “No caminho percorrido por Lucas, além de sabermos o caminho que ele percorreu, o que mais precisamos saber?”.

A: “A direção e o sentido?”.

P: “Sim. Quando um segmento de reta tem uma direção e um sentido, nós o chamamos de segmento orientado. Dois pontos distintos X e Y no espaço determinam uma reta. Essa reta determina uma direção no espaço. Não precisamos da reta toda para determinar essa direção, o segmento da reta entre os pontos X e Y, que é a parte da reta compreendida entre esses dois pontos, serve muito bem para determinar essa direção. Esse segmento de reta pode ser facilmente orientado provendo um sentido através de uma seta onde um dos pontos é o ponto inicial e o outro, o ponto final” (OLIVEIRA, 2014, p.9).

P: “Tendo isso em vista, podemos falar em como representar geometricamente um vetor: um vetor pode ser representado geometricamente por um segmento de reta orientado, indicado através de uma seta. Por exemplo, um vetor pode ser representado por \overrightarrow{AX} , onde o ponto A é o ponto inicial e o ponto X é o ponto final, e a seta indica esse sentido. O caminho que o Lucas fez do ponto A na direção horizontal e sentido leste até um ponto que chamamos de X pode ser representado por:



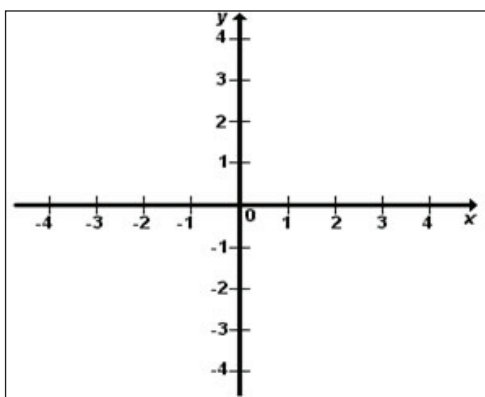
Como o ponto inicial é A e o ponto final é X, denotamos por \overrightarrow{AX} e depois o caminho que ele fez na direção vertical e sentido norte podemos denotar por \overrightarrow{XB} , pois o ponto inicial é X e o ponto final é B (OLIVEIRA, 2014)”.
 Na sequência, temos a seguinte trajetória hipotética de encaminhamento de aula para a abordagem do item (b) do problema:

P: “O que vocês entendem por plano cartesiano?”

A: “Sabemos que tem a reta x e a reta y e uma corta a outra”.

P: “Com base nisso, podemos dizer que: ‘define-se plano cartesiano como sendo o plano contendo um sistema formado por dois eixos, Ox, horizontal, e Oy, vertical, perpendiculares entre si’ (NASCIMENTO, 2014, p.23), como indicado na imagem a seguir:”

Figura 1 – imagem para auxiliar na formalização do conteúdo.



Fonte: as autoras.

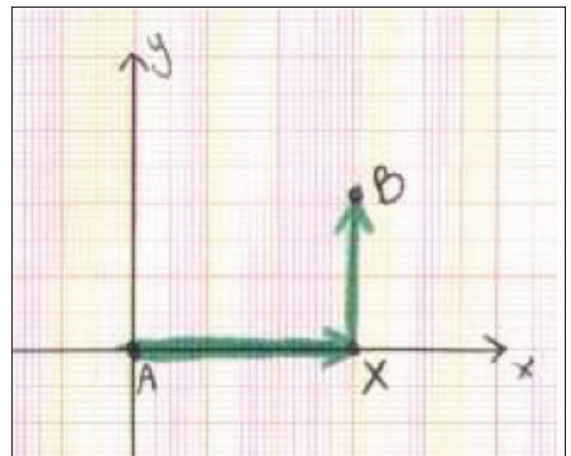
P: “E, nesse plano, você conseguiu representar o caminho percorrido por Lucas?”

A: “Sim, professora”.

P: “E como você fez isso?”.

A: “Eu peguei o desenho que eu tinha feito na letra (a) desenhei de novo, mas coloquei no plano cartesiano usando setas, ou seja, vetores”.

Figura 2 – Possível resolução do aluno.



Fonte: as autoras.

P: “E você acha que precisaria de mais alguma coisa no desenho?”.

A: “Não, eu desenhei certo”.

P: “Pelo que vimos anteriormente, como eram representados os vetores?”.

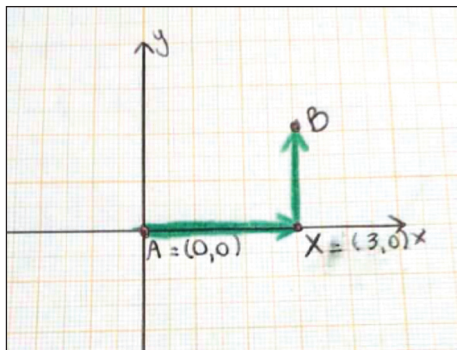
A: “Por segmentos de reta que podemos indicar por \overrightarrow{AX} , em que o ponto A é o ponto inicial e o ponto X é o ponto final”.

P: “Sempre que fizemos representações no plano cartesiano devemos indicar as coordenadas dos pontos”.

A: “Professora, mas como se faz isso?”.

Mostraremos então representando na resolução do aluno colocando no ponto A e no ponto X os valores que representam as abscissas e as ordenadas correspondentes, indicando como par ordenado. Por exemplo: (0,0).

Figura 3 – Imagem para auxiliar na formalização do conteúdo.



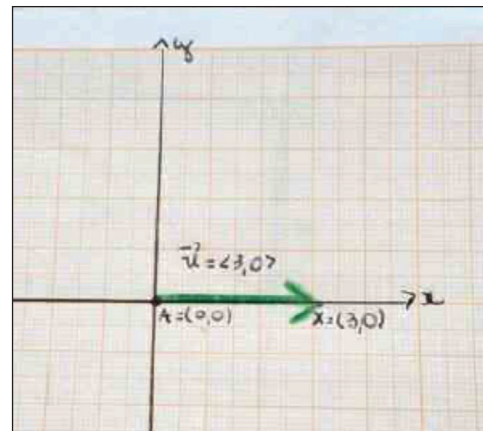
Fonte: as autoras.

P: “Um par ordenado (x,y) representa um ponto no plano. A cada ponto P desse plano, associam-se números reais (x,y) que são as coordenadas cartesianas do ponto, onde é usual indicarmos por $P = (x,y)$. Esse ponto P é a imagem geométrica do par ordenado. O par $(0,0)$, chamamos de origem do sistema (NASCIMENTO, 2014)”.

P: “Além de representar um vetor por segmentos de reta em que indicamos, por exemplo, \overline{AX} , em que o ponto A é o ponto inicial e o ponto X é o ponto final, que é representação geométrica, podemos também representá-lo de outra maneira”.

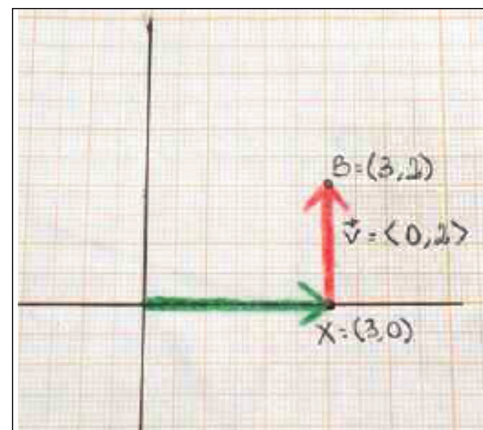
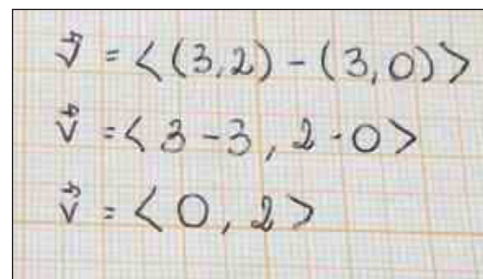
P: “Um vetor pode ser representado por uma única letra, com uma seta em cima (VENTURI, 2015). O vetor \overline{AX} pode ser representado, por exemplo, por \vec{v} . Além disso, um vetor no plano cartesiano pode ser representado por um par ordenado de números reais, denotado por $\langle x, y \rangle$, em que x e y são chamados de componentes de vetor. Essa notação $\langle x, y \rangle$ é utilizada para representar o par ordenado de vetor e para não confundir com para ordenado de um ponto (LEITHLOLD, 1994). Se o ponto inicial de um vetor estiver na origem do sistema de coordenadas cartesianas, então o vetor é representado algebricamente pelas coordenadas do ponto final (Figura 4). Caso o ponto inicial do vetor não coincida com a origem do sistema de coordenadas cartesianas, então as componentes dele são obtidas fazendo a subtração entre as coordenadas do ponto final e do ponto inicial (Figura 5) (NASCIMENTO, 2014; OLIVEIRA, 2014; LISOVSKI, 2014; VENTURI, 2015)”.

Figura 4 – Imagem para auxiliar na formalização do conteúdo.



Fonte: as autoras.

Figura 5 – Imagem para auxiliar na formalização do conteúdo.



Fonte: as autoras.

Na sequência, apresentamos a proposta de trabalho com o problema 3.

Quadro 4 – Problema 3.

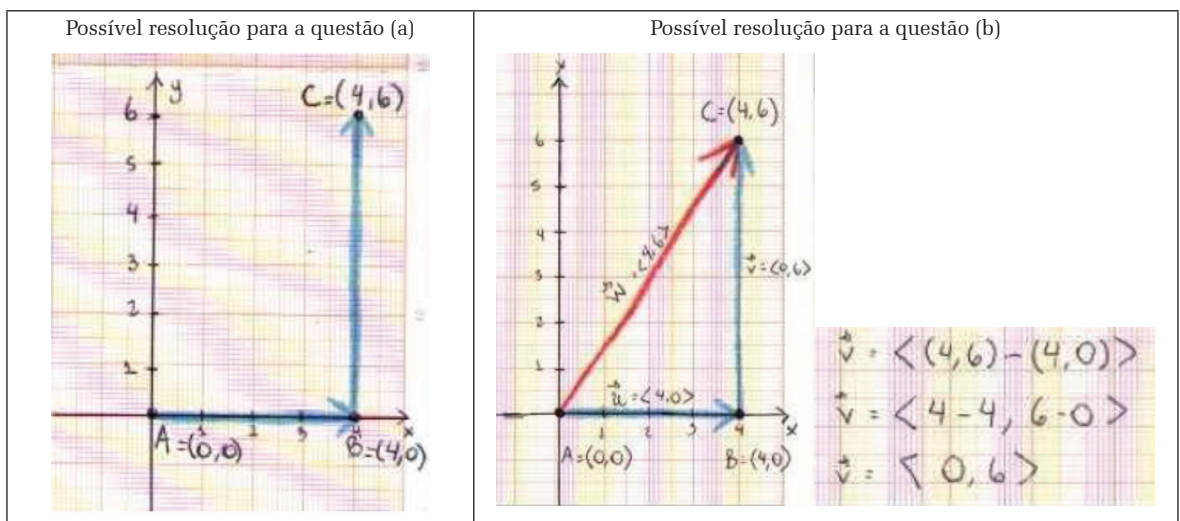
Em uma gincana para alunos do Ensino Médio, foi dada a um aluno a tarefa de medir o deslocamento de uma formiga que se movimenta em uma parede plana e vertical. A formiga realiza dois deslocamentos sucessivos:
 1) um deslocamento de 4 unidades de medida na direção horizontal, para leste;
 2) um deslocamento de 6 unidades de medida na direção vertical, para norte;
 A partir dessas informações responda os itens a seguir:
 a) Em qual ponto a formiga estará no final dos dois deslocamentos? Represente no plano cartesiano o caminho percorrido pela formiga.
 b) Usando a resolução anterior, represente, no mesmo plano cartesiano, o deslocamento feito pela formiga, supondo a origem do plano cartesiano como o ponto de partida do deslocamento da formiga.

Fonte: adaptado de UDESC (1998).

Com esse problema, tem-se a intenção de: representar geometricamente a adição de vetores e trabalhar a adição com vetores por meio de suas componentes.

Uma possível resolução para esse problema é apresentada no quadro a seguir:

Quadro 5 – Possível resolução para o problema 3.



Fonte: as autoras.

Usaremos o item (a) apenas para o aluno construir um caminho que o auxiliará na resolução do item (b).

Na sequência, temos a seguinte trajetória hipotética de encaminhamento de aula:

A: “Professora, nessa tarefa devemos fazer a mesma coisa que no problema 2?”

P: “Foi solicitado fazer o mesmo que no problema 2?”

A: “Na questão (a) sim, mas na (b) pede algo diferente”.

P: “E o que seria esse algo diferente?”.

A: “Nesse problema, pede o deslocamento da formiga. É isso mesmo?”.

P: “Isso”.

A: “Mas, professora, o que é deslocamento?”.

P: “O deslocamento é o segmento de linha reta que liga a sua posição inicial à posição final de algo que se move (KNIGHT, 2009), que, nesse caso, seria a formiga”.

P: “O que você fez para chegar a essa conclusão?”.

A: “Eu tive que desenhar um vetor indo para a direita, e outro indo para a cima”.

Caso não seja apresentada alguma resolução em que os alunos tenham colocado as componentes dos vetores \vec{u} e \vec{v} , por exemplo, faremos as seguintes questões:

P: “Faltou algo?”.

A: “Acho que não, professora”.

P: “Como representamos os vetores mesmo?”.

A: “Ah! Eles têm componentes”.

P: “Isso mesmo. Então deixaremos um tempo para que coloquem as componentes do vetor \vec{u} e do vetor \vec{v} , que são essenciais para a continuação dessa tarefa”.

Caso eles já tenham colocado as componentes dos vetores, podemos continuar a trajetória a partir daqui:

P: “E quais são componentes desses vetores que você desenhou?”.

A: “Esse primeiro vetor chamei de \vec{u} . Ele é o $\langle 4,0 \rangle$. O segundo, chamei de \vec{v} . Ele é o $\langle 0,6 \rangle$ ”.

P: “E como você fez isso?”.

A: “Como o primeiro está na origem, só coloquei as componentes iguais às do ponto final, e como o segundo não está na origem, fiz as coordenadas do ponto final menos as do ponto inicial”.

P: “Agora que você tem isso, como você pode representar o deslocamento da formiga?”.

A: “É só seguir a definição de deslocamento e desenhar um segmento de reta do ponto inicial A até o ponto final C”.

P: “E com isso, em qual ponto a formiga chegou?”.

A: “No ponto (4,6)”.

P: “E será que esse ponto tem alguma relação com as componentes que você encontrou anteriormente?”.

A: “Eu estou vendo que o primeiro número do vetor \vec{u} é igual ao primeiro número do ponto, e o segundo número do vetor \vec{v} é igual ao segundo número do ponto”.

P: “Muito bem! Agora você sabe me dizer por que isso acontece?”.

A: “Não sei, professora”.

P: “Isso acontece porque estamos somando os vetores \vec{u} e \vec{v} . ‘Algebricamente, adicionamos dois vetores adicionando suas respectivas coordenadas’ (NASCIMENTO, 2014, p.38). Por exemplo, considerando $\vec{u} = \langle 4,0 \rangle$ e $\vec{v} = \langle 0,6 \rangle$,

temos que $\vec{u} + \vec{v} = \langle 4+0, 0+6 \rangle = \langle 4,6 \rangle$, na qual podemos chamá-lo de $\vec{w} = \langle 4,6 \rangle$ ”.

Depois do desenvolvimento da oficina, que ocorreu em setembro de 2016, pudemos realizar algumas análises. Percebemos que a elaboração da trajetória nos fez pensar em cada detalhe dela, e isso nos auxiliou na condução do trabalho com os alunos.

Em alguns momentos, por mais que as ações dos alunos e as discussões com eles não ocorressem como planejado, entendemos que o que foi planejado por meio da trajetória ofereceu suporte para que pudéssemos proceder com mais astúcia diante de uma dificuldade ou dúvida dos alunos e agir como mais confiança diante dos imprevistos.

Acreditamos que a elaboração de uma trajetória foi importante para a nossa formação como professoras, pois, a partir dela, tivemos mais segurança no trabalho com a Resolução de Problemas.

Considerações finais

Neste artigo, relatamos sobre a experiência da elaboração de uma trajetória de ensino e aprendizagem para o trabalho com vetores com alunos do Ensino Médio por meio da Resolução de Problemas. O intuito, ao escrever este artigo, foi o de compartilhar uma proposta elaborada nessa perspectiva de trajetória, que se apresenta como uma possibilidade para o planejamento de professores para ensinar conteúdos matemáticos através da Resolução de Problemas.

Acreditamos que a elaboração dessa proposta oportunizou, em um primeiro momento, um caminho hipotético de condução de aula que nos auxiliou, por meio de conjecturas, a ter uma visão geral do que poderíamos desenvolver com os alunos e de como poderíamos agir diante de determinadas situações. Em outro momento, propiciou suporte para lidarmos com segurança e agilidade com aquilo que não havíamos imaginado.

Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na sala de aula através da resolução

- de problemas. *Boletim GEPEN*, Rio de Janeiro, ano 33, n.55, jul./dez. 2009.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*. Brasília: MEC, 2006.
- CANAVARRO, A. P. Ensino Exploratório da Matemática: práticas e desafios. *Educação e Matemática*, Lisboa, n.115, p.11-17, nov./dez. 2011.
- CHAGAS, A. S. *O GeoGebra como ferramenta de auxílio no ensino de vetores no Ensino Médio*. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.
- CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. Learning Trajectories in Mathematics Education. *Mathematics Thinking and Learning*, v.6, n.2, p.81-89, 2004.
- GRAVEMEIJER, K. P. E. O que torna a matemática tão difícil e o que podemos fazer para a alterar?. *Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas*. Lisboa: APM, 2005. p.83-101.
- GRAVEMEIJER, K. P. E.; TERWEL, J. Hans Freudenthal: A mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, v.32, n.6, p.777-796, 2000.
- KNIGHT, R. D. *Física uma abordagem estratégica*. 2.ed. Porto Alegre: Bookman, 2009.
- LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. 3.ed. São Paulo: Harbra, 1994.
- LISOVSKI, L. *Um tratamento vetorial para conceitos de geometria analítica do Ensino Médio usando o GeoGebra*. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.
- NASCIMENTO, W. F. *O ensino de vetores na primeira série do Ensino Médio com auxílio do geoplano, da malha quadriculada e do GeoGebra*. 2014. Dissertação (mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2014.
- OLIVEIRA, F. P. *Vetores: uma abordagem para o Ensino Médio*. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2014.
- ROSSETTO, H. H. P. *Trajatória hipotética de aprendizagem sob um olhar realístico*. 2016. Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.
- VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. A Learning-teaching trajectory as a hold for teaching primary-school mathematics in the Netherlands. In: TZAKAKI, M. *Didactics of Mathematics and Informatics in Education*, 2001b, Thessaloniki, Aristotle University of Thessaloniki/University of Macedonia, Thessaloniki, p.21-39. Disponível em: <http://www.fisme.science.uu.nl/staff/marjah/download/vdHeuvel_2001_Thessaloniki_trajectory.pdf>. Acesso em: 28 fev. 2013.
- VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. Learning-teaching trajectories with intermediate attainment targets. In: VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. *A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*. Rotterdam: Sense Publishers, 2001a, p.13-22. Disponível em: <<https://www.sensepublishers.com/media/161-children-learn-mathematics.pdf>>. Acesso em: 7 nov. 2012.
- VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. *Realistic Mathematics Education: Work in progress*. In: LIN, F. L. (Ed.). *Common Sense in Mathematics Education*. Proceedings of The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education, 2002, Taipei, Taiwan, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, p.1-42. Disponível em: <<http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/4966.pdf>>. Acesso em: 28 fev. 2012.
- VENTURI, J. J. *Álgebra vetorial e geometria analítica*. 10.ed. Curitiba: Livrarias Curitiba, 2015.

Fernanda Felix – Universidade Estadual de Londrina (UEL). Graduanda em Matemática. E-mail: fernanda_pdp@yahoo.com.br

Brunna Leonardi Caciolato – Universidade Estadual de Londrina (UEL). Graduada em Matemática. E-mail: brunnhacaciolato@hotmail.com

Edilaine Regina dos Santos – Universidade Estadual de Londrina (UEL). Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática. E-mail: edilaine.santos@uel.br