

O PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM FORMAÇÃO INICIAL

The geometric thinking of Mathematics teachers in graduation

André Pereira da Costa
Marilene Rosa dos Santos

Resumo

Este estudo analisou o pensamento geométrico de futuros professores de Matemática, em processo de formação inicial, vinculados a uma Instituição de Ensino Superior (IES) no Estado de Pernambuco. Como referencial teórico, utilizamos as dimensões do pensamento geométrico propostas por Câmara dos Santos (1992). A metodologia de abordagem quanti-qualitativa baseou-se na aplicação de um teste diagnóstico sobre o conceito de quadriláteros notáveis. Participaram dessa pesquisa 24 alunos que já haviam cursado disciplinas referentes à Geometria nessa formação. Os resultados indicaram que cerca da metade dos participantes atua na dimensão pragmática. No entanto, cerca de um terço dos discentes trabalha na dimensão relacional, e um quinto, na dimensão aplicativa. Parece, portanto, que a Geometria vivenciada por esses estudantes não favoreceu, de modo significativo, o desenvolvimento de dimensões mais elaboradas do pensamento geométrico.

Palavras-chave: Dimensões. Pensamento Geométrico. Quadriláteros.

Abstract

This study analyzed the geometric thinking of future Mathematics teachers, in the process of initial formation, linked to an Institution of Higher Education (IES) in the State of Pernambuco. As a theoretical reference we use the dimensions

of geometric thinking, proposed by Câmara dos Santos (1992). The methodology of quantitative-qualitative approach was based on the application of a diagnostic test on the concept of notables quadrilaterals. Participated in this study 24 students who had already studied courses related to Geometry in this formation. The results indicated that about half of the participants work in the pragmatic dimension, however, an average of one-third of the students work in the relational dimension, and a fifth in the application dimension. Therefore, it seems that the Geometry experienced by these students did not favor, in a significant way, the development of more elaborate dimensions of geometric thinking.

Keywords: Dimensions. Geometric Thinking. Quadrilaterals.

Introdução

Especialmente nas últimas duas décadas, a Geometria é um dos campos matemáticos investigados em vários estudos brasileiros (GRAVINA, 2000; KOPKE, 2006; LEIVAS, 2009; FRADE, 2012; AMÂNCIO, 2013; CICARINI, 2015; entre outros), em âmbito de pós-graduação, na área de Educação Matemática, relacionados tanto ao seu ensino como a sua aprendizagem. Tais pesquisas são realizadas com diferentes modalidades escolares (educação infantil, ensino fundamental, ensino médio e ensino superior), envolvendo múltiplos participantes (crianças, adolescentes e adultos), variados recursos (livros didáticos,

softwares educativos, sequências didáticas, etc.) e diferentes desenhos metodológicos.

Todavia, apesar de todos os avanços produzidos em relação ao desenvolvimento dessas pesquisas no Brasil, percebemos poucas mudanças práticas em sala de aula, isto é, a Geometria continua sendo trabalhada de forma tímida pelos professores de Matemática (MANOEL; LORENZATO, 2015), fenômeno conhecido como *omissão geométrica* (LORENZATO, 1995). Além disso, nos cursos de formação de professores, o campo geométrico, quando explorado, ainda é centrado apenas nas demonstrações de sistemas axiomáticos. Ou seja, no ensino superior, há uma ênfase no conhecimento especializado do conteúdo, enquanto que o conhecimento pedagógico quase não é abordado (LIMA; SANTOS, 2012; LIMA, 2016).

Por um lado, os resultados das avaliações em larga escala, em âmbito estadual (Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco – SAEPE, 2015), em âmbito nacional (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – SAEB, 2015) e em âmbito internacional (Programa Internacional de Avaliação Comparada – PISA, 2015), mostram baixos desempenhos dos estudantes do ensino básico em relação às questões que abordam o campo geométrico.

Por outro, os dados produzidos e apresentados em estudos no âmbito educacional (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2016c; COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2017), evidenciam que pessoas de diferentes níveis escolares (estudantes do 6º ano do ensino fundamental, alunos do ensino médio, licenciandos e professores de Matemática) apresentam dificuldades conceituais de aprendizagem em relação à Geometria, em especial em situações de reconhecimento dos quadriláteros notáveis e de inclusão de classe.

Diante dessas circunstâncias, vários pesquisadores da Educação Matemática do país refletem sobre os reais fatores causadores desses resultados. Discutem, sobretudo, acerca da raiz dessas dificuldades conceituais de aprendizagem, relacionadas ora à natureza dos conceitos geométricos que são abordados, ora à maneira como tais conceitos são explorados na classe de Matemática (COSTA, 2016).

Nesse contexto, nós nos questionamos acerca do pensamento geométrico dos alunos que cursam o ensino de graduação no que se refere à Geometria. Os estudantes de uma licenciatura

em Matemática, que já estudaram Geometria no respectivo curso, atuam em quais dimensões de pensamento geométrico?

A partir dessa questão, decidimos delimitar o domínio da Geometria e elegemos os quadriláteros notáveis como conceito geométrico a ser estudado. É importante lembrar que, com base nas orientações curriculares vigentes no Brasil (BRASIL, 1998) e em Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), a formalização desses quadriláteros deve ocorrer no 6º ano do ensino fundamental. Nessa direção, futuros professores de Matemática, em processo de formação inicial, não devem apresentar grandes dificuldades em situações que abordam esse saber matemático.

Para solucionar nossa questão, sustentamos nas dimensões do pensamento geométrico propostas por Câmara dos Santos (1992). Esse pesquisador indica que o desenvolvimento do pensamento geométrico inicia-se na dimensão pragmática (primeira dimensão), finalizando na dimensão de discernimento (quinta dimensão). Então compreendemos que um estudante do ensino superior na área de Matemática deve localizar-se na quinta dimensão assinalada por Câmara dos Santos.

Logo, temos como objetivo geral analisar o pensamento geométrico de um grupo de futuros professores de Matemática, em formação inicial, vinculados a uma Instituição de Ensino Superior (IES) localizada no Estado de Pernambuco, em relação a duas questões sobre produção de quadriláteros notáveis. Buscamos, especificamente, identificar em qual dimensão de pensamento geométrico situa-se cada participante.

Esperamos que esse trabalho contribua com a reflexão sobre a formação inicial de professores em Geometria, sobretudo com o desenvolvimento de novas pesquisas e com a discussão de políticas públicas que favoreçam a melhoria das licenciaturas em Matemática.

Para tanto, sinalizamos, a seguir, a fundamentação teórica utilizada, os percursos metodológicos e as análises dos dados produzidos. Por fim, nossas considerações finais e referências.

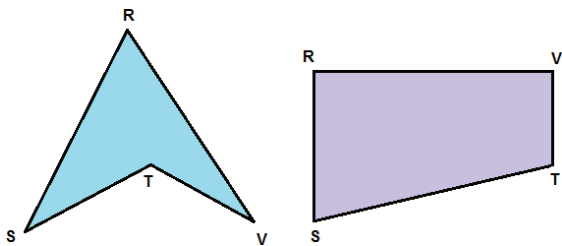
Referencial teórico

O conceito de quadriláteros notáveis

Como definição para os quadriláteros, consideramos um plano com quatro pontos

quaisquer, os pontos R, S, T, V , porém com o pressuposto de que três deles não podem estar incluídos em uma mesma reta. Chamamos quadrilátero $RSTV$ o conjunto de pontos referentes aos segmentos de reta RS, ST, RV e VR (LIMA; CARVALHO, 2010) e ainda a parte do plano composta por todos esses segmentos de reta (COSTA, 2016). Na Figura 1 há ilustração de representações de dois quadriláteros.

Figura 1 – Representações de quadriláteros.

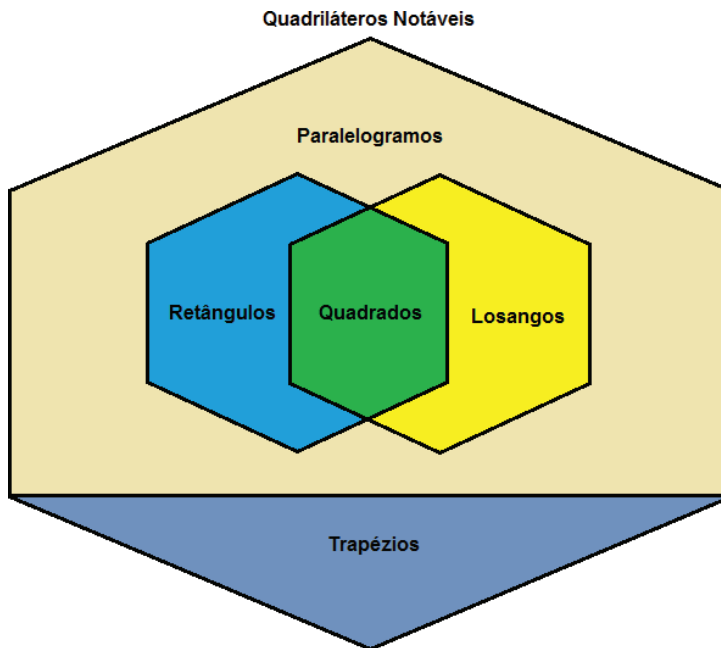


Fonte: elaborado pelos autores.

No campo da Geometria, podemos nos deparar com dois grupos de quadriláteros: os notáveis e os não notáveis. Os quadriláteros notáveis são constituídos pelos trapézios e pelos paralelogramos (que englobam ainda os retângulos, os quadrados e os losangos), no tempo em que os quadriláteros não notáveis são compostos pelo trapezoide e pelos quadriláteros não convexos.

Dessa maneira, observando a Figura 1, verificamos que a figura do lado direito é uma representação dos quadriláteros notáveis (um trapézio), enquanto que a da esquerda representa um quadrilátero não notável (um quadrilátero não convexo). Para um maior entendimento, elaboramos um diagrama (Figura 2) que representa a família dos quadriláteros notáveis, formada pelos paralelogramos, retângulos, quadrados, losangos e trapézios.

Figura 2 – Representação dos grupos dos quadriláteros notáveis.

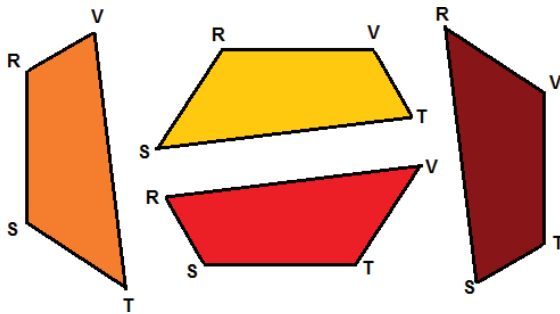


Fonte: elaborado pelos autores.

Conforme Januário (2013), os quadriláteros possuem as seguintes propriedades: a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360° ; apenas duas diagonais; quatro vértices,

quatro lados e quatro ângulos internos. O trapezoide (Figura 3) é outro exemplo de quadrilátero não notável que corresponde a um quadrilátero sem lados opostos paralelos.

Figura 3 – Representações de trapezoides em diferentes posições.


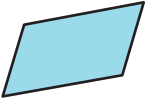

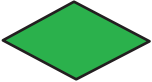



Fonte: elaborado pelos autores.

Considerando a aparência física, o trapezoide lembra um trapézio (que é vinculado à família dos quadriláteros notáveis). Isso, contudo, não procede, porque o trapezoide não apresenta um único par de lados opostos paralelos (tal fato é evidenciado nos trapézios).

Como dito anteriormente, a família dos quadriláteros notáveis é formada pelos paralelogramos, retângulos, quadrados, losangos e trapézios. Neste trabalho, consideramos as definições propostas por Costa (2016) para cada uma dessas figuras geométricas. O Quadro 1 apresenta um resumo dessas definições.

Quadro 1 – Família dos quadriláteros notáveis.

REPRESENTAÇÃO	DEFINIÇÃO	PROPRIEDADES
 Trapézio	Quadrilátero notável que apresenta exatamente um único par de lados opostos paralelos.	Os ângulos adjacentes a um mesmo lado transversal são suplementares.
 Paralelogramo	Quadrilátero notável que apresenta os dois pares de lados opostos paralelos entre si.	Possui congruência entre os lados opostos. Os ângulos internos opostos são congruentes. Os ângulos internos vizinhos são suplementares. Suas diagonais cortam-se ao meio, em seus respectivos pontos médios.
 Retângulo	Quadrilátero notável que possui os quatro ângulos internos de medidas congruentes, logo, são retos (medem 90°).	Possui congruência entre os lados opostos. As diagonais cortam-se ao meio.
 Losango	Quadrilátero notável que apresenta todos os lados de medidas iguais, logo, são congruentes entre si.	Os ângulos internos opostos são congruentes. As diagonais cortam-se ao meio. As diagonais são perpendiculares entre si e também estão localizadas nas bissetrizes dos ângulos internos.
 Quadrado	Quadrilátero notável que possui todos os lados iguais entre si e todos os ângulos internos congruentes.	As diagonais, que se cortam ao meio, são congruentes entre si, perpendiculares e ainda são as bissetrizes dos ângulos internos.

Fonte: adaptado de Costa (2016).

É importante destacar a necessidade de se desenvolver, na classe de Matemática, um estudo sistemático sobre o conceito de quadriláteros notáveis, por meio de atividades que abordem esses objetos geométricos em diferentes posições e classificações. Assim, as dificuldades a serem apresentadas pelos estudantes poderão ser superadas, entre elas a dificuldade em perceber que o quadrado é retângulo, losango e paralelogramo ao mesmo tempo. Tal fato se justifica, já que muitos alunos estão “presos” às figuras prototípicas.¹

Algumas pesquisas (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015a; 2015b; 2016a; 2016b; COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2016; 2017) têm mostrado que pessoas de diferentes escolaridades (desde o ensino básico até o ensino superior) apresentam o mesmo tipo de erros em situações que exploram os quadriláteros notáveis. Como exemplo disso, citamos o caso de muitos estudantes não considerarem um quadrado com um tipo especial de retângulo.

Nesse contexto, o papel do professor é essencial no sentido de identificar as dificuldades dos estudantes e propor novas intervenções pedagógicas.

¹ Quadro 1 – Família dos quadriláteros notáveis.

As dimensões do pensamento geométrico

As dimensões do pensamento geométrico foram propostas pelo professor e pesquisador brasileiro Marcelo Câmara dos Santos, no ano de 1992, fruto de sua dissertação de mestrado intitulada “*Analyse didactique d’un matériel pour les premiers apprentissages en géométrie*”, vinculada à Université Claude Bernarde Lyon 1, Lyon, França. Desse modo, o autor baseou-se nas ideias do holandês Pierre Marie Van-Hiele (1957), que desenvolveu a teoria para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Em sua pesquisa, Câmara dos Santos (1992) utilizou seus próprios alunos da educação básica como participantes do estudo porque se interessou em entender as dificuldades apresentadas por esses estudantes ao estudarem conceitos da Geometria. Nessa direção, o pesquisador delimitou como objetivo da investigação analisar os efeitos didáticos do *software* Cabri-Géomètre na aprendizagem geométrica de alunos do 6º ano do ensino fundamental, especificamente em relação ao conceito de quadriláteros notáveis.

Para esse fim, com base nos fundamentos teórico-metodológicos da Engenharia Didática de origem didática francesa, e explorando a ideia de situação-problema, Câmara dos Santos construiu uma sequência didática (conjunto de atividades) acerca desse objeto geométrico. Então, a sequência foi aplicada com duas classes do 6º ano

do ensino fundamental de uma escola pública, localizada em Recife – Pernambuco, Brasil. Como dito anteriormente, os participantes do estudo foram os próprios estudantes do supracitado autor, que já realizava na escola, sistematicamente, intervenções com o Cabri-Géomètre.

Com base nos resultados do seu estudo, Câmara dos Santos (1992) evidenciou que os alunos apresentaram importantes progressos em relação à aprendizagem da Geometria, tendo em vista que parcela dos estudantes demonstrou ter evoluído do primeiro para o segundo nível de pensamento geométrico proposto por Van-Hiele.² Contudo, o investigador notou que uma parte dos estudantes se encontrava na transição entre esses níveis, ou seja, a teoria de Van-Hiele não foi suficiente para explicar o comportamento geométrico desses discentes.

Diante dessa situação, Câmara dos Santos (1992) apresentou uma reorganização dos níveis do desenvolvimento de pensamento geométrico de Van-Hiele na qual os níveis passam a receber o nome de dimensões para diminuir, assim, a rigidez da hierarquia entre os níveis. Então, o primeiro nível vanhieliano passa a se chamar **dimensão pragmática**; o segundo nível de Van-Hiele denomina-se **dimensão relacional**, e o processo de transição entre o primeiro nível e o segundo nível corresponde a **dimensão aplicada**. Mais detalhes sobre a caracterização dessas dimensões encontram-se no Quadro 2.

Quadro 2 – Dimensões de pensamento geométrico segundo Câmara dos Santos.

DIMENSÃO	DESCRIÇÃO	EXEMPLO
Pragmática	O estudante reconhece as figuras geométricas por meio de seu aspecto global e de sua forma. Aqui ele não faz referência nem à definição e nem às suas propriedades.	Ao analisar um quadrado e um retângulo, um aluno pode afirmar que “ <i>são figuras diferentes, pois têm tamanhos e formatos diferentes</i> ”.
Aplicativa	O aluno considera a definição das figuras geométricas em seu reconhecimento. Ele ainda não reconhece as figuras geométricas como detentoras de propriedades.	Ao produzir um retângulo e um losango, um estudante pode dizer que “ <i>o retângulo tem quatro ângulos retos, já o losango tem todos os lados iguais</i> ”.
Relacional	O discente analisa as figuras geométricas a partir de suas propriedades; no entanto, não é capaz de realizar a articulação entre essas propriedades.	Ao analisar um losango e um retângulo, um discente pode argumentar que “ <i>apesar das diagonais das duas figuras se cortarem ao meio, elas são diferentes, pois as diagonais do losango são perpendiculares, enquanto que as do retângulo não são</i> ”.

Fonte: Costa e Câmara dos Santos (2016c, p.7).

Dessa forma, como na ilustração, ao identificar um retângulo a partir dos elementos de sua definição, um estudante do 6º ano atuará na dimensão aplicada, conforme indica Câmara

² O primeiro nível de Van-Hiele é caracterizado pelo reconhecimento das figuras geométricas a partir de sua aparência física, enquanto que o segundo nível vanhieliano é marcado pela consideração das figuras geométricas como detentoras de propriedades.

dos Santos (1992). Todavia, se considerarmos apenas a teoria de Van-Hiele, não será possível indicar em qual nível de pensamento geométrico esse aluno trabalhará.

Câmara dos Santos (2001) propôs outras duas dimensões de pensamento geométrico relacionadas aos demais níveis de Van-Hiele. Uma quarta dimensão é a **essência da geometria**, na qual o “aluno deve ser capaz de perceber que as propriedades se deduzem umas das outras (ex.: a propriedade dos ângulos alternos internos permite obter a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo)” (p.6).

A quinta dimensão, referente ao **discernimento**, é subdividida em dois tipos: a dimensão do **discernimento em geometria** (o estudante ordena de forma lógica as proposições que foram determinadas quando das fases precedentes) e a dimensão do **discernimento em matemática** (o discente é capaz de operar exclusivamente dentro de um esquema abstrato de uma teia de conexões totalmente produzida por ele próprio).

Apesar de já se passarem 25 anos do estudo desenvolvido por Câmara dos Santos (1992), tal pesquisa é pouco conhecida no Brasil, pois não encontramos outros estudos realizados na literatura nacional com base nas dimensões de pensamento geométrico. Contudo, só foi encontrado um único estudo publicado na Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, desenvolvido por Costa e Câmara dos Santos (2016c), que se trata de um recorte da dissertação de Costa (2016), que recebeu orientação de Câmara dos Santos. Isso pode ser verificado em um recente levantamento realizado na Biblioteca Brasileira Digital de Teses e Dissertações e na base de periódicos da CAPES.

Outro fator que contribui para a ausência de estudos no país tendo por base Câmara dos Santos (1992), é que, além do estudo original ter sido escrito em francês, também não existe uma versão digital do trabalho publicado na internet. Além disso, em uma conversa que tivemos com o pesquisador, ele informou que não possui mais uma edição impressa da pesquisa. Talvez isso justifique a ausência de outros trabalhos realizados a partir das dimensões de pensamento geométrico.

Em Costa e Câmara dos Santos (2016c), a pesquisa consistiu na análise das estratégias mobilizadas por um grupo de alunos de uma turma do 6º ano do ensino fundamental de uma escola pública de Recife (Pernambuco), no desenvolvimento de

uma sequência didática referente ao conceito de quadriláteros notáveis, por meio do GeoGebra.

Com uma abordagem qualitativa, os dados do estudo foram as produções dos estudantes no GeoGebra e os registros das atividades em fichas impressas.

Os resultados da pesquisa revelam que as estratégias empregadas pela turma investigada concentram-se em três dimensões: a) pragmática – evidenciada em 47% dos alunos; b) aplicativa – notada em 3% da turma; c) relacional – sinalizada em 50% do total de participantes.

Destacamos a importância da realização de pesquisas tendo por base as dimensões de pensamento geométrico propostas por Câmara dos Santos (1992), tendo em vista que elas podem ajudar a compreender as dificuldades de aprendizagem dos alunos do ensino básico em relação aos conceitos geométricos.

Procedimento metodológico

A pesquisa possui uma abordagem quantitativa porque concordamos com Souza e Kerbauy (2017, p.01) quando afirmam que “o qualitativo e o quantitativo se complementam e podem ser utilizados em conjunto nas pesquisas, possibilitando melhor contribuição para compreender os fenômenos educacionais investigados”.

Participaram desse estudo 24 futuros professores de Matemática, em processo de formação inicial, vinculados a uma Instituição de Ensino Superior (IES) no Estado de Pernambuco. Neste artigo, eles serão identificados pela letra A, seguida da numeração indo-árabica, ou seja, teremos de A01 até A24.

No momento da produção de dados, tais estudantes cursavam o 6º período do curso (de um total de 08 períodos que o compõem). Além disso, todos esses estudantes já tinham estudado Geometria nessa formação. Não tínhamos a intenção de realizar uma avaliação institucional, e assim, ao longo deste trabalho, não faremos referência ao nome da universidade (que oferta o curso), bem como ao nome da cidade na qual está situada essa IES.

O instrumento de coleta de dados utilizado nesta pesquisa foi um teste diagnóstico constituído por duas questões que trabalham produção de quadriláteros notáveis. A primeira questão era formada por duas etapas, como perceberemos nas figuras 4 e 5.

Na primeira etapa, o estudante era convidado a construir um retângulo no espaço denominado “sua figura” e, depois, deveria produzir uma outra figura de quatro lados, desde que não fosse um retângulo em “figura do seu colega”. A Figura 4 ilustra esse primeiro momento da questão.

Figura 4 – Extrato da primeira etapa da primeira questão do teste.

Q01) Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura de seu colega:

SUA FIGURA:	FIGURA DE SEU COLEGA:

Fonte: Câmara dos Santos (2009).

Na segunda etapa dessa questão, o discente deveria explicar suas construções, ou seja, dizer por que a primeira figura era um retângulo no espaço “sua figura é um retângulo” e o motivo da segunda não ser em “a de seu colega não é um retângulo”. A Figura 5 ilustra esse momento.

Figura 5 – Extrato da segunda etapa da primeira questão do teste.

Justifique por quê:

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____

Fonte: Câmara dos Santos (2009).

Por fim, a terceira questão solicitou que os alunos construíssem dois quadrados diferentes, como podemos perceber na figura a seguir.

Figura 6 – Extrato da segunda questão do teste.

Q02) Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes.



Fonte: Câmara dos Santos (2009).

A finalidade, nas duas questões, foi evidenciar se os critérios mobilizados pelos estudantes na diferenciação das duas produções faziam referência às características do pensamento geométrico, à luz das dimensões de Câmara dos Santos (1992):

- *pragmática* – os alunos utilizam apenas a aparência física da figura em sua justificativa;
- *aplicativa* – o estudante faz referência somente à definição usual da figura em sua explicação;
- *relacional* – o estudante aplica as propriedades das figuras produzidas em suas explicações;
- *essência da geometria* – o aluno utiliza a dedução entre as propriedades das figuras em suas justificativas;
- *discernimento* – na resolução da questão, o estudante ordena logicamente proposições ou, então, opera dentro de um esquema abstrato.

Salientamos, ainda, que essas questões foram utilizadas por Câmara dos Santos (1992; 2001) em um estudo com estudantes do 6º ano do ensino fundamental cujo objetivo foi identificar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos participantes.

Análise dos dados produzidos

Como dito antes, a primeira questão do teste solicitou que os participantes produzissem um retângulo e, em seguida, outra figura de quatro lados que não se configurasse como esse quadrilátero. Depois, eles deveriam explicar suas produções. Aqui nos interessamos pelos critérios

considerados pelos alunos na produção e nas suas justificativas.

Analisando os protocolos dos futuros professores, constatamos que cerca de dois quintos deles consideraram o quadrado como “não retângulo”, ou seja, 40% em média do total não reconhece o quadrado como um tipo especial de retângulo, como podemos observar na tabela a seguir. Esse primeiro dado configura que esses licenciandos mobilizaram somente a aparência física das figuras em suas produções. Nesse sentido, para eles, o retângulo e o quadrado são diferentes no que se refere a seus aspectos globais. Essa característica pertence à primeira dimensão de pensamento geométrico, denominada pragmática, proposta por Câmara dos Santos (1992).

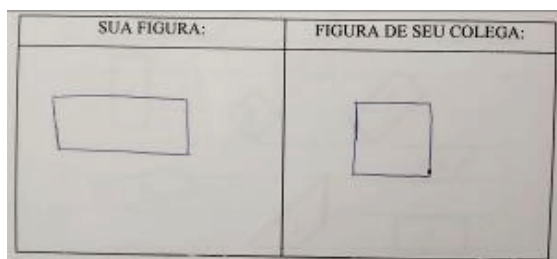
Tabela 1 – Figuras geométricas consideradas como não retângulos.

FIGURAS GEOMÉTRICAS	FREQUÊNCIA (%)
Quadrado	40
Trapézio	21
Paralelogramo	18
Losango	12
Trapezoide	06
Quadrilátero não convexo	03

Fonte: dados da pesquisa.

Verificamos, também, que A02 construiu um retângulo e um quadrado em posição prototípica, que, frequentemente, é a posição mais explorada na escola da educação básica. Provavelmente, esse estudante não percebeu que todo quadrado é um retângulo com ângulos retos e medidas dos comprimentos dos lados congruentes. Tal fato encontra-se ilustrado na Figura 7.

Figura 7 – Produção do aluno A02 referente ao primeiro momento da questão.

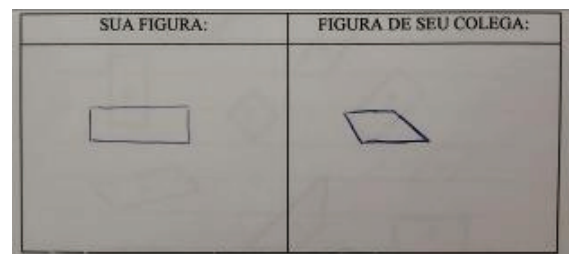


Fonte: dados da pesquisa.

Esse fenômeno também foi evidenciado em pesquisas desenvolvidas com estudantes do ensino fundamental, ensino médio e com professores de Matemática da educação básica (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015a; 2015b; 2016). Nessa direção, pessoas de diferentes níveis escolares apresentam o mesmo tipo de erro. Logo, é necessário o desenvolvimento de estudos futuros que busquem investigar a raiz (epistemológica ou didática) que origina tal erro. Outro aspecto observado nessas pesquisas, foi referente ao quadrado, que é a figura geométrica mais considerada como “não retângulo” entre os seus participantes. Do mesmo modo, esse fato foi evidenciado nessa pesquisa com professores em formação inicial.

Em seguida, ocupando o segundo lugar, o quadrilátero notável mais mobilizado nas construções dos licenciandos, considerado como “não retângulo”, foi o trapézio, apresentando uma frequência aproximada de 21%. Como ilustração disso, a Figura 8 apresenta a produção do discente A13.

Figura 8 – Produção do aluno A13 referente ao primeiro momento da questão.

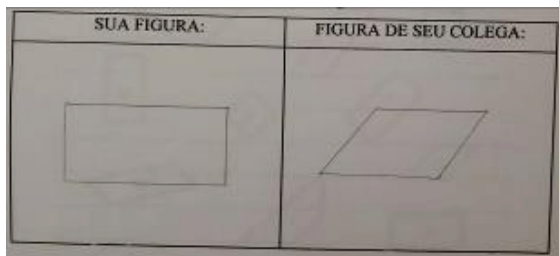


Fonte: dados da pesquisa.

A construção de A13 sinaliza que esse professor em formação inicial tende a buscar por atributos da definição do trapézio como forma de diferenciação com o retângulo. Assim, esse aluno demonstra trabalhar na dimensão aplicativa de Câmara dos Santos (1992).

Dando continuidade, em terceiro lugar, o paralelogramo oblíquo (que apresenta ângulos internos não retos), foi considerado por 18% dos estudantes como um “não retângulo”, como ilustrado pela Figura 9. É importante ressaltar que o retângulo é um paralelogramo com todos os ângulos internos retos.

Figura 9 – Produção do aluno A33 referente ao primeiro momento da questão.



Fonte: dados da pesquisa.

Nesse caso, percebemos que o licenciando A33 produziu dois paralelogramos. O primeiro é o retângulo, que possui todos os ângulos internos retos, e o segundo, o paralelogramo oblíquo, com dois ângulos internos obtusos e dois ângulos internos agudos. Dessa forma, ao analisarmos a produção desse futuro professor, é aceitável conjecturar que A33 mobilizou os ângulos internos das figuras geométricas como forma de diferenciá-las.

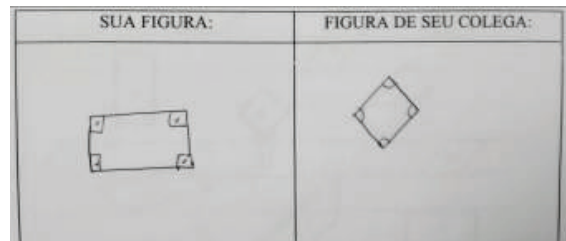
Pelos registros disponibilizados pelo participante A33, observamos que ele fez uso dos ângulos internos do losango e do retângulo como meio para distinguir as duas produções. Dessa forma, aparentemente, parece que esse discente não mobilizou o uso das diagonais no processo de construção, mas sim de elementos da definição. Tal fenômeno é uma característica da dimensão aplicativa de Câmara dos Santos (1992).

Todavia, ao considerarmos as justificativas desse aluno, percebemos que se confirma a conjectura: a primeira figura é um retângulo, pois “possui 4 ângulos retos” (explicação ao retângulo), enquanto que a segunda não é um retângulo, “pois não possui 4 ângulos retos” (explicação ao paralelogramo). Logo, A33 demonstra atuar na dimensão aplicativa, pois fez uso de elementos da definição para justificar a diferença entre esses quadriláteros notáveis.

Ocupando o quarto lugar, o losango foi o quadrilátero notável mais considerado como não retângulo, sendo evidenciado em 12% dos participantes do estudo (Figura 10). Em seguida, em quinto lugar, o trapezoide foi escolhido como não retângulo por 6% do total (Figura 11). Depois, preenchendo a sexta posição, temos o quadrilátero não convexo (que não se enquadra

no grupo dos quadriláteros notáveis), como ilustrado pela Figura 12. Mais uma vez esses elementos parecem evidenciar que existe uma inclinação entre os licenciandos em procurar atributos desses objetos geométricos no processo de distinção.

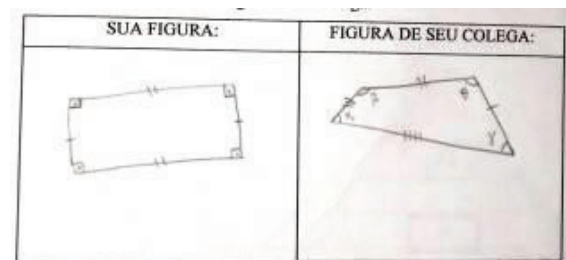
Figura 10 – Produção do aluno A24 referente ao primeiro momento da questão.



Fonte: dados da pesquisa.

O professor em formação inicial A04 elaborou um retângulo e um trapezoide por meio da medida dos comprimentos dos lados que formam essas figuras geométricas. Nessa direção, ele pôde verificar que o retângulo apresenta os comprimentos dos lados opostos congruentes (o que não ocorre no caso do trapezoide) e ainda analisou os ângulos dos quadriláteros. No que se refere ao retângulo, essa figura possui ângulos retos, enquanto que a figura trapezoidal não tem esse atributo.

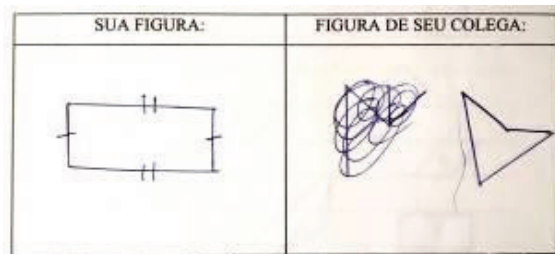
Figura 11 – Produção do aluno A04 referente ao primeiro momento da questão.



Fonte: dados da pesquisa.

Além disso, percebemos participantes que criaram um retângulo e um quadrilátero não convexo. Provavelmente, mobilizando a congruência dos comprimentos dos lados que compõem os quadriláteros para distingui-los (Figura 12).

Figura 12 – Produção do aluno A07 referente ao primeiro momento da questão.



Fonte: dados da pesquisa

Dando continuidade, considerando a segunda etapa da primeira questão do teste, analisamos as justificativas dos licenciandos, e categorizamos com base nas dimensões já anunciadas anteriormente. A Tabela 2 dispõe a regularidade das explicações segundo essa classificação.

Tabela 2 – Regularidade das explicações com base nas dimensões de Câmara dos Santos (1992).

DIMENSÕES	REGULARIDADE (%)
Pragmática	32
Aplicativa	44
Relacional	24

Fonte: dados da pesquisa.

Pela tabela, constatamos que, aproximadamente, um terço dos licenciandos, uma média de 32%, atua na dimensão pragmática, isto é, ao justificarem suas produções, esses futuros professores mobilizaram somente a aparência física das figuras geométricas produzidas. Um exemplo disso é apresentado na Figura 13.

Figura 13 – Produção do aluno A11 referente ao segundo momento da questão.

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
Sim, porque a base é maior que a altura.	Não, a de meu colega é um quadrado.

Fonte: dados da pesquisa.

No caso do participante A11, embora faça uso de uma linguagem geométrica, por meio das

expressões “base” e “altura”, esse emprego não é adequado. O discente afirma que a primeira figura é um retângulo “*porque a base é maior que a altura*”; já a segunda figura não é um retângulo pois “*é um quadrado*”. Aqui fica notório que A11 faz referência à aparência física da figura como forma de justificar o fato de ela ser um retângulo, não mencionando, assim, elementos da definição e nem das propriedades. É por meio do aspecto global que ele não reconhece o quadrado como um tipo especial de retângulo. Essas características do pensamento geométrico do aluno sinalizam que ele atua na dimensão pragmática de Câmara dos Santos (1992).

Cerca de dois quintos dos professores em formação inicial localizam-se na dimensão aplicada, ou seja, uma média de 44% explica suas produções por meio de elementos da definição das figuras geométricas construídas. A Figura 14 elucida um exemplo desse caso.

Figura 14 – Produção do aluno A12 referente ao segundo momento da questão.

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
Pois seus lados formam ângulos retos.	Pois seus ângulos não são retos.

Fonte: dados da pesquisa.

O licenciando A12 produziu um retângulo e um trapézio, mas, em sua explicação, utilizou elementos da definição do retângulo para distingui-lo do trapézio (o não retângulo): a primeira figura é um retângulo “*pois seus lados formam ângulos retos*”, enquanto que a segunda figura não é um retângulo “*pois seus ângulos não são retos*”. Esses dados comprovam que esse participante está atuando na dimensão aplicada de Câmara dos Santos (1992), tendo em vista que em sua justificativa ainda não fez referência às propriedades dos objetos geométricos explorados.

Finalmente, perto de um quinto dos futuros professores participantes do estudo estava trabalhando na dimensão relacional, em média 24% do total. Logo, em suas construções, os participantes justificaram a diferença entre as figuras fazendo uso das propriedades. A Figura 15 apresenta um exemplo disso.

Figura 15 – Produção do aluno A04 referente ao segundo momento da questão.

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
<i>É um retângulo por que possui quatro ângulos retos e os lados opostos são paralelos e congruentes.</i>	<i>Não é um retângulo pois não possui todos os ângulos retos.</i>

Fonte: dados da pesquisa.

O licenciando A04, que criou um retângulo e um trapezoide, na sua primeira explicação fez uso de elementos da definição (*possui quatro ângulos retos*) e um dos atributos (*possui lados opostos paralelos congruentes*) do retângulo. Com relação à segunda justificativa, referente à figura trapezoidal, o estudante afirmou que *“não é retângulo porque não possui todos os ângulos retos”*. Esses dados parecem mostrar que A04 está atuando na dimensão relacional indicada por Câmara dos Santos (1992).

A segunda questão aqui analisada corresponde à terceira questão do teste, em que os professores em formação inicial deveriam construir dois quadrados diferentes. Nesse sentido, estávamos interessados em verificar os parâmetros que os licenciandos utilizaram para diferenciar os dois quadriláteros notáveis.

Um primeiro dado que despertou nosso olhar foi o episódio em que, na construção relacionada ao primeiro quadrado, uma média aproximada de 18% dos participantes não fez quadrados (em posição padrão), como se encontra ilustrado na Tabela 3. Aparentemente, essas evidências parecem mostrar que a maioria desses licenciandos não conseguiu reconhecer um quadrado qualquer. Tal fato necessita de um estudo mais refinado, buscando compreender a raiz desses tipos de produções.

Entre os participantes, 97% produziram as duas figuras como solicitado na questão, e em média 3% construiu apenas um quadrado no primeiro momento. Assim, não consideramos na análise do item, pois a resposta ficou incompleta.

Tabela 3 – Quadriláteros notáveis produzidos como o primeiro quadrado.

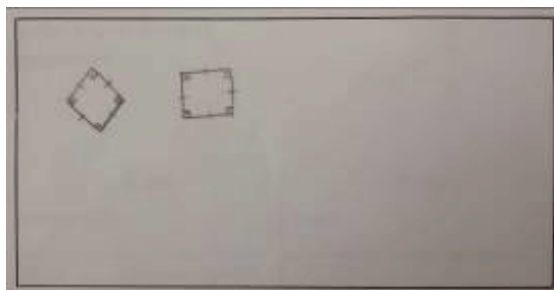
QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS	FREQUÊNCIA (%)
Quadrado	82
Retângulo	12
Paralelogramo	3
Losango	3

Fonte: dados da pesquisa.

Analisando os dados ilustrados na Tabela 3, notamos que, em média, 82% dos licenciandos elaboraram quadrados padrões no primeiro momento da questão. Também 12% construíram retângulos, 3% fizeram um paralelogramo qualquer e 3% losango (o quadrado em posição não prototípica).

No caso do futuro professor (A04) que fez um losango, pelas marcações deixadas em seus registros, ele comparou as medidas dos ângulos e as medidas dos comprimentos dos lados que formam as figuras elaboradas (o losango e o quadrado padrão). Como ilustrado pela Figura 16, esse participante reconhece o quadrado como um tipo especial de losango. Assim, encontra-se atuando na dimensão relacional de Câmara dos Santos (1992).

Figura 16 – Produção do aluno A04 referente à terceira questão.



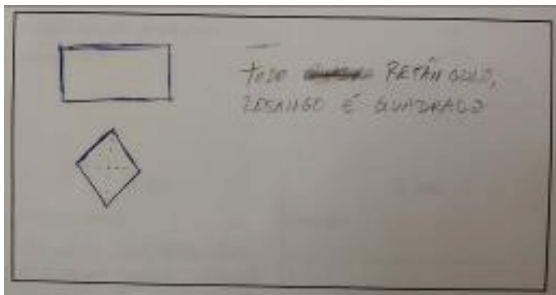
Fonte: dados da pesquisa.

Dos quatro licenciandos que produziram retângulos no primeiro momento da questão, dois (A20 e A28) construíram retângulos no segundo momento. Os outros dois (A13 e A21) fizeram losangos (quadrados não padrões) no segundo momento. O estudante A21, por exemplo,

escreveu que “*todo retângulo é quadrado, e todo losango é retângulo*”, realizando, assim, uma inadequada inclusão de classe (Figura 17). Todavia, um aspecto que merece ser destacado é que A21 considerou o perpendicularismo entre as diagonais do losango, demonstrando ter considerado as propriedades dessa figura na construção (que é uma característica da dimensão relacional de Câmara dos Santos).

Por fim, o licenciando (A30), que produziu um paralelogramo qualquer no primeiro momento e fez um quadrado padrão no segundo momento da questão.

Figura 17 – Produção do aluno A21 referente à terceira questão.



Fonte: dados da pesquisa.

Ainda em relação aos participantes que produziram retângulos, talvez a ausência de um instrumento de medida (por exemplo, a falta de uma régua) tenha comprometido suas construções. Tal fato é apenas uma hipótese, pois, pelos registros disponibilizados, não é possível afirmar isso com propriedade. Esse tipo de construção, da mesma forma como a do paralelogramo, demanda a necessidade do desenvolvimento de uma pesquisa mais aprofundada que busque compreender essas produções.

Dando continuidade, analisamos as construções dos professores em formação inicial que fizeram quadrados padrões na primeira parte da questão (referente à primeira figura construída). Na segunda fase do item (construção do segundo quadrado), os discentes fizeram quadrados, losangos e retângulos, como ilustrado na Tabela 4.

Tabela 4 – Figuras produzidas no segundo momento da construção.

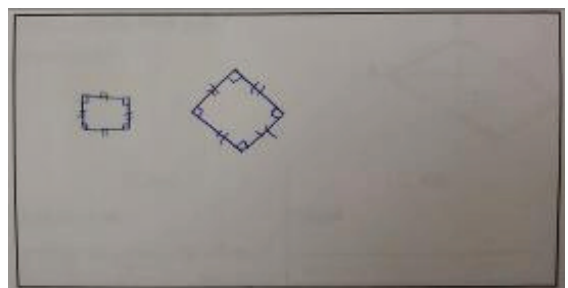
FIGURAS	FREQUÊNCIA (%)
Quadrado	52
Losango	41
Retângulo	7

Fonte: dados da pesquisa.

Pela Tabela 4, evidenciamos que um pouco mais da metade dos licenciandos – em média 52% – produziu dois quadrados de tamanhos diferentes, diferenciando suas construções somente a partir do tamanho dos quadrados, isto é, esses alunos consideraram apenas o aspecto global das figuras como forma de diferenciá-las. Esses aspectos caracterizam a dimensão pragmática de Câmara dos Santos (1992). Logo, nessa questão analisada, tais participantes estavam atuando nessa dimensão do pensamento geométrico.

Em média, 41% dos participantes consideraram o losango (o quadrado não padrão) como um quadrado. Pelas marcações deixadas, alguns futuros professores (A01, A05 e A06) mobilizaram a congruência das medidas dos comprimentos dos lados e das medidas dos ângulos como forma de comparação. A Figura 18 ilustra esse caso.

Figura 18 – Produção do aluno A05 referente à terceira questão.



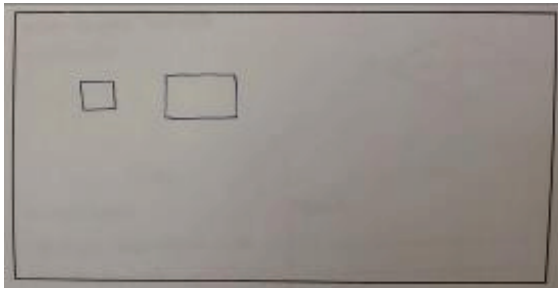
Fonte: dados da pesquisa.

Pela figura acima, constatamos que o licenciando A05 parece apresentar evidências que considerou o quadrado como um tipo especial de losango. Nesse sentido, tudo indica que ele

está trabalhando na dimensão relacional, pois realiza inclusão de classe. Por outro lado, podemos conjecturar que A05 pode ter apenas girado a figura no papel, ou seja, criou uma figura não prototípica. Assim, ele estaria na dimensão pragmática. Logo, se faz necessário uma entrevista com esse participante, para obtenção de mais informações, para que possamos compreender com mais solidez a dimensão do seu pensamento geométrico.

Já 7% dos participantes produziram retângulos como quadrados, como ilustrado na Figura 19. Percebemos que o licenciando A24 fez uma inclusão de classe inadequada, ao generalizar que todo retângulo é quadrado. Essas evidências parecem mostrar que esse futuro professor atua na dimensão pragmática, considerando apenas as aparências físicas como forma de diferenciação entre as duas figuras.

Figura 19 – Produção do aluno A24 referente à terceira questão.



Fonte: dados da pesquisa.

Esses dados nos chamaram a atenção, reforçando a necessidade de realizar um estudo mais detalhado, buscando compreender os motivos desses professores em formação inicial considerando o retângulo, o trapézio e o paralelogramo como um quadrado.

Considerações finais

Os dados construídos nas questões estudadas do teste apontam que cerca da metade dos professores de Matemática, em processo de formação inicial, atuam na dimensão pragmática do pensamento geométrico proposta por Câmara dos Santos (1992), marcada pela consideração dos objetos geométricos a partir do aspecto

global. Isso foi percebido, por exemplo, na segunda questão analisada no estudo, em que vários participantes produziram dois quadrados, diferenciando-os apenas pelo tamanho. Aqui ficou evidente que esses licenciandos não consideraram elementos da definição nem os atributos das figuras geométricas nas construções.

Constatamos que uma média de um terço dos futuros professores estava atuando na dimensão relacional, em que o licenciando reconhece as figuras geométricas por meio das propriedades. Isso foi verificado, por exemplo, quando um participante, ao construir dois quadrados diferentes, produziu um quadrado padrão e um losango, e, pelas marcações deixadas, parece ter mobilizado a congruência das medidas dos ângulos e das medidas dos comprimentos dos lados que formam essas figuras geométricas.

Também notamos um quinto dos professores em formação inicial trabalhando na dimensão aplicativa, caracterizada pelo uso dos elementos da definição no reconhecimento dos objetos geométricos. Como ilustração, tal fato foi evidenciado na primeira questão analisada: um participante construiu um retângulo e um trapézio, porém, em sua justificativa, fez uso da definição do retângulo para diferenciá-lo do trapézio.

Em relação às justificativas dos licenciandos na primeira questão verificada, percebemos que 44% do total foram sinalizadas na dimensão aplicativa de Câmara dos Santos (1992).

Um dado que requer um estudo mais refinado é com relação à raiz que origina algumas dificuldades conceituais de aprendizagem relacionadas aos quadriláteros notáveis, por parte dos futuros professores de Matemática, como por exemplo estabelecer inclusão de classe entre esses quadriláteros, em especial reconhecer o quadrado como um tipo especial de retângulo e também de losango.

Diante dessas circunstâncias todas, julgamos que os dados produzidos no estudo sinalizam aspectos bastante críticos, considerando o nível escolar, do qual fazem parte os participantes investigados.

Sendo assim, ratificamos a importância de se pesquisar sobre a forma como a Geometria é vivenciada no investigado curso de formação inicial de professores de Matemática, procurando perceber quais aspectos são considerados e quais

são refutados. Sobretudo, analisar de que forma essa Geometria do ensino superior favorece à evolução do pensamento geométrico desses licenciandos.

Referências

- AMÂNCIO, R. A. *O desenvolvimento do pensamento trabalhando polígonos especialmente quadriláteros*. 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.
- BRASIL. MEC. 1998. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. 3.ed. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- _____. 2015. SAEB – 2015. Matemática. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2015. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/inep-apresenta-resultados-do-saeb-prova-brasil-2015/21206> Acesso em: 27 fev. 2017.
- CÂMARA DOS SANTOS, M. *Analyse didactique d'un matériel pour les premiers apprentissages en géométrie*. Mémoire de master en Didactique des Disciplines Scientifiques, Lyon, Université Claude Bernarde Lyon 1, 1992.
- _____. Effets de l'utilisation du logiciel Cabri-Géomètre dans le développement de la pensée géométrique. *Annales... 2* Congrès International Cabri Géomètre, Montreal, 2001.
- _____. O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. In: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (Org.). *A pesquisa em Educação Matemática: repercussões na sala de aula*. São Paulo: Cortez, 2009.
- CICARINI, A. M. O. T. *Geometria plana e grafismo indígena: o estudo de suas relações no contexto histórico do grupo Tukano de alunos da Licenciatura Intercultural dos povos indígenas do Alto do Rio Negro*. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.
- CLEMENTE, F.; TORREGROSA, G.; LLINARES, S. *La identificación de figuras prototípicas en el desarrollo del razonamiento configuracional*. Anais... 14 Conferência Interamericana de Educação Matemática, Tuxtla Gutiérrez, 2015.
- COSTA, A. P. *A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana*. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.
- _____. Evoluindo o raciocínio geométrico por meio de uma sequência didática: o caso dos quadriláteros. *Anais... 18º Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*, Recife, 2014.
- COSTA, A. P.; CÂMARA DOS SANTOS, M. Aspectos do pensamento geométrico demonstrados por estudantes do Ensino Médio em um problema envolvendo o conceito de quadriláteros. *Anais... 14ª Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Tuxtla Gutiérrez, 2015a.
- _____. Investigando os níveis de pensamento geométrico de alunos do 6º ano do ensino médio: um estudo envolvendo os quadriláteros. *Anais... 4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Ilhéus, 2015b.
- _____. Níveis de pensamento geométrico de alunos do ensino médio no Estado de Pernambuco: um estudo sob o olhar vanhieliano. *Revista de Educação Matemática Iberoamericana*, Recife, v.7, n.3, pp.1-19, 2016a.
- _____. O pensamento geométrico de professores de Matemática do ensino básico: um estudo sobre os quadriláteros notáveis. *Educação Online*, Rio de Janeiro, n.22, pp.108-126, 2016b.
- _____. Estudo dos quadriláteros notáveis por meio do GeoGebra: um olhar para as estratégias dos estudantes do 6º ano do ensino fundamental. *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo*, v.5, n.2, pp.3-17, 2016c.
- COSTA, A. P.; ROSA DOS SANTOS, M. Um estudo sobre o pensamento geométrico de estudantes de Licenciatura em Matemática no Estado de Pernambuco. *Anais... 12º Encontro Nacional de Educação Matemática*, São Paulo, 2016.
- _____. Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes de uma Licenciatura em Matemática no Estado de Pernambuco: um estudo sob a ótica da teoria de Van-Hiele. *Educação Online*, Rio de Janeiro, n.25, pp.1-23, 2017.
- FRADE, R. *Composição e/ou Decomposição de Figuras Planas no Ensino Médio: Van Hiele, uma opção*. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.
- GRAVINA, M. A. *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo*. 2001. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.
- JANUÁRIO, A. J. *Desenho geométrico*. 4.ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 2013.
- KOPKE, R. C. M. *Geometria, desenho, escola e transdisciplinaridade: abordagens possíveis para a educação*. 2006. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

LEIVAS, J. C. P. *Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática*. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

LIMA, E. M. B. Uma análise de ementas das disciplinas de geometria em cursos de licenciatura em matemática. *Anais... 12º Encontro Nacional de Educação Matemática*. São Paulo, 2016.

LIMA, E. M. B.; SANTOS, C. A. B. Os saberes dos futuros professores do curso de Licenciatura em Matemática em relação à Geometria Espacial. *Anais... 16º Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*, Canoas/RS, 2012.

LIMA, P. F.; CARVALHO, J. P. F. Geometria. In: CARVALHO, J. P. F. *Matemática: ensino fundamental* (Coleção Explorando o ensino). Vol. 17. Brasília: MEC/SEB, 2010.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? *A Educação Matemática em Revista*, n.4, pp.3-13, 1995.

MANOEL, W. A.; LORENZATO, S. A importância do ensino da geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental: razões apresentadas em pesqui-

sas brasileiras. *Anais... 3º Encontro de Educação Matemática dos Anos Iniciais*, São Carlos, 2015.

OECD. PISA. 2015. *PISA: Results in Focus*. Organisation for Economic Co-operation and Development: OECD, 2015. Disponível em: <<https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus.pdf>>. Acesso em: 27 fev. 2017.

PERNAMBUCO. Secretaria da Educação. *SAEPE – 2015. Matemática. Revista da Gestão Escolar*. UFJF, Juiz de Fora, 2015. Disponível em: <<http://www.saepe.caedufjf.net/wp-content/uploads/2016/05/PE-SAEPE-2015-RG-RE-WEB2.pdf>>. Acesso em: 27 fev. 2017.

PERNAMBUCO. *Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio*. UFJF, Juiz de Fora, 2012.

SOUZA, K. R.; KERBAUY, M. T. M. Abordagem quanti-qualitativa: superação da dicotomia quantitativa-qualitativa na pesquisa em educação. *Educação e Filosofia*, v.31, n.61, pp.1-19, 2017.

VAN-HIELE, P. M. *El problema de la comprensión: en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría*. 1957. Tesis (Doctorado en Matemáticas y Ciencias Naturales) – Universidad Real de Utrecht: Utrecht, 1957.

André Pereira da Costa é doutorando e Mestre em Educação Matemática e Tecnológica – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, Pernambuco, Brasil. E-mail: andre.pcosta@outlook.com

Marilene Rosa dos Santos é Doutora em Ensino de Ciências e Matemática – Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE). Professora da Universidade de Pernambuco (UPE), Garanhuns, Pernambuco, Brasil. E-mail: rosa.marilene@gmail.com