CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR QUE ENSINA MATEMÁTICA PARA ATRIBUIR SENTIDO À DIVISÃO E *AO* ALGORITMO

Mathematics Teachers' Specialized Knowledge in Giving Sense to Division and *its* Algorithm

Miguel Ribeiro
Milena Policastro
Juscier Marmoré
Rosa Di Bernardo

Resumo

O conhecimento do professor é um dos aspectos centrais nas aprendizagens dos alunos e para elas. A forma como o professor conhece ou assume conhecer cada um dos conteúdos matemáticos a abordar e a(s) forma(s) como eles se relaciona(m) com os demais molda as tarefas que prepara e seu modo de implementá-las com os seus alunos. Por que o professor pretende que seus alunos entendam o que fazem, por que o fazem e para quê, seu conhecimento matemático é mais amplo do que apenas associado a um saber fazer – replicar um conjunto de procedimentos que repassará aos seus alunos, repetindo-os, porque foi assim que foram ensinados. Portanto, ao professor cumprirá também, de modo complementar, um conhecimento matemático associado aos porquês (e às possíveis conexões) que lhe permita, durante a prática, levar seus alunos a entenderem efetivamente o que fazem. A divisão é um dos tópicos em que existem, ainda, dificuldades de compreensão processuais e conceituais. Tendo por base trabalhos efetuados com futuros professores e as situações matematicamente críticas reveladas, neste texto se explanam e discutem-se alguns dos porquês associados à divisão, recorrendo a um algoritmo. Esta discussão pretende contribuir para uma consciencialização da necessidade de um conhecimento matemático especializado para ensinar, devendo, portanto, seu desenvolvimento ser foco específico na formação de professores – tanto inicial como continuada.

Palavras-chave: Conhecimento especializado do professor que ensina matemática. Divisão com significado. Formação de professores. Algoritmo.

Abstract

Teachers' knowledge is one of the core elements in and for students mathematical learning. Hence, the ways by which the teachers know, or assume to know, each one of the mathematical topics they have to deal with, and the way(s) how they connect with each other, influences the nature, focus and aims of the conceptualized tasks and how they are implemented. Considering that teachers aim at allowing their students to understand what they do, why they do it and what for, such teachers' knowledge is required to be broader and deeper than only knowing how to perform – replicate a set of procedures as he/she has been taught. Thus, teachers are required to be, also, in possession, of a knowledge associated to the "whys" and the possible connections with and between topics allowing them to develop a practice allowing students to effectively understand what they do and why. One of the topics in which students, and necessarily teachers, reveal difficulties of both processual as conceptual understanding concerns division. Grounded in the work being developed in the scope of primary and kindergarten teachers' knowledge and on mathematical critical situations, this paper discusses some of the critical elements in teachers and students' knowledge on division when using the "traditional" algorithm. The elaborated discussion aims at contributing for the gain of awareness on the need for a specialized knowledge for teaching which should be deemed to start to be developed with prospective teachers in teachers' education.

Keywords: Mathematics Teachers' Specialized Knowledge. Division. Teachers' education. Algorithm.

Breves notas introdutórias e de contextualização

O conhecimento de e sobre Matemática do professor de/que ensina Matemática é um dos aspectos centrais no, e para o, desenvolvimento de uma prática promotora de efetivas aprendizagens matemáticas (mas não só) por parte dos alunos, nas suas mais variadas dimensões (NYE; KONSTANTOPOULOS; HEDGES, 2004; RIBEIRO; MELLONE; JAKOBSEN, 2016). Nesse sentido, e na perspectiva de promover uma melhoria da prática e das aprendizagens dos alunos, é essencial um foco mais centrado no conhecimento do professor e nas situações que se possam configurar como mais críticas nesse conhecimento, tendo em consideração as suas especificidades. Esse foco, ao ter em atenção as especificidades do conhecimento do professor, deverá permitir que este (professor em serviço ou futuro professor) passe a entender, a atribuir sentido e significado ao que faz e a explicitar por que o faz, em cada momento e associado a cada um dos temas matemáticos que aborda.

Um dos temas em que, tradicionalmente, os alunos revelam dificuldades, prende-se às quatro operações (FOSNOT; DOLK, 2001), sendo a divisão particularmente problemática. Assim, é fundamental desenvolver o conhecimento do professor relativamente a essa temática, para permitir, posteriormente, abordagens efetivamente compreensivas sem perpetuar um ensino apenas fundamentado no saber fazer (obter a resposta correta da operação) desprovido de questionamento e atribuição de sentido ao que se faz (ou não) em cada um dos passos, quando se divide – utilizando, ou não, um algoritmo formal. Esse desenvolvimento contribuirá, também – espera-se – para que o professor não ensine da mesma forma como foi ensinado (COONEY, 1994), o que é um risco (ou por vezes algo assumido) sempre que não seja facultada uma formação que permita ampliar o repertório de conhecimento do professor sobre os temas que tem de ensinar e outros que com esses se relacionem.

Entre as múltiplas perspectivas de entender o conhecimento do professor, por considerar que esse conhecimento é especializado em todas as suas dimensões – no que se refere tanto ao conhecimento do conteúdo quanto ao conhecimento pedagógico do conteúdo –, esse conhecimento matemático, que permitirá quebrar as correntes com uma prática baseada no fazer sem compreensão (RIBEIRO, 2013), é considerado aqui na perspectiva do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK[1] (CARRILLO et al., 2013). Os elementos constituintes dessa conceituação não serão aqui discutidos detalhadamente, porém sustentam as discussões e as reflexões que se efetuam.[2]

Assumindo a necessidade premente de promover o desenvolvimento do conhecimento do professor no âmbito da divisão, este texto propõe a discussão, a reflexão e a consciencialização do conhecimento que cada um de nós (professores e formadores de professores) possui e de que necessita para efetivar uma prática formativa adequada ao desenvolvimento desse conhecimento no tema da divisão, tanto pelos alunos quanto pelos professores – cada um com as suas especificidades. Em particular, tem por objetivo discutir alguns aspectos do conhecimento especializado do (futuro) professor, relacionado, em concreto, com

[1] Mantivemos a nomenclatura em Inglês, pois esta é uma conceitualização do conhecimento do professor reconhecida internacionalmente, e a tradução desvirtuaria não apenas o sentido, mas, essencialmente, o conteúdo de cada um dos subdomínios que compõem o modelo que a representa.

[2] Mais informações sobre essa conceitualização do conhecimento do professor podem ser consultadas, por exemplo, em Policastro, Almeida e Ribeiro (2017) ou Muñoz-Catalan, Liñan e Ribeiro (2017).

os conhecimentos matemáticos subjacentes ao entendimento não apenas de o que se faz, como se faz, por que se faz de determinada forma, por exemplo, mas também das características do resultado, dos diferentes registros de representação e da necessidade de navegar frutiferamente entre eles (RIBEIRO, 2011).

Complementarmente, esse conhecimento matemático especializado do professor deverá incluir um conhecimento que permita promover: o entendimento de diferentes conexões que se podem efetuar entre a divisão e as demais operações (que são bastante mais amplas que somente considerar a divisão como a operação inversa da multiplicação); o papel dos símbolos e da linguagem matemática e natural; ou os processos de resolver problemas – o que se associa ao que se poderá considerar “deter uma efetiva compreensão da divisão e *do* algoritmo “tradicional” da divisão”.

Essa problemática do conhecimento matemático do professor tem sido foco de bastante discussão e reflexão com professores em exercício e futuros professores, pois muitos desses profissionais consideram que a formação superior que recebem deveria focar-se (apenas) em “*ensinar-lhes a ensinar*”, como se o fato de terem sido alunos dos anos de escolaridade em que irão, hipoteticamente, lecionar possa garantir a adoção de práticas matemáticas associadas aos objetivos postos pelas tendências internacionais, centrados no desenvolvimento de conhecimento e competências matemáticas e não tendo como ponto de partida a aplicação de regras (sem compreensão) – que se associa a um ensino tradicional, experienciado pela larga maioria de nós, pelo menos, mas provavelmente não exclusivamente, enquanto alunos dos Anos Iniciais ao Ensino Médio.

Assim, a perspectiva de que a formação de professores deveria centrar-se em “ensinar a ensinar”, sem considerar as especificidades do conhecimento do professor para ensinar cada uma das áreas de conhecimento, é entendida como bastante limitada e limitadora, relativamente ao papel do professor e aos direitos dos alunos. Esse argumento é frequentemente apresentado por quem considera que, se ele próprio foi ensinado (e, na sua assunção, aprendeu) sem necessariamente entender o que estava a fazer e por que o estava a fazer e conseguiu ascender a uma graduação de formação de professores, então se sente no direito de considerar não necessitar de muito mais para poder ensinar os seus alunos – para ser *eficientes*, nas palavras de vários (futuros) professores.

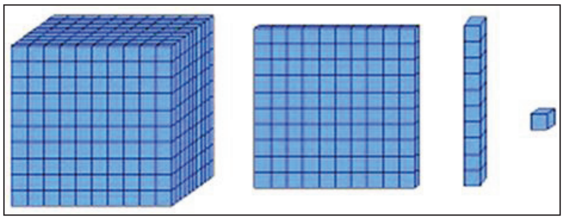
Aqui, tendo como foco a divisão, *o seu algoritmo* (aquele que tradicionalmente é lecionado nas escolas) e o papel dos recursos – em concreto, o material dourado – para promover o conhecimento matemático com efetiva compreensão, apresentam-se e discutem-se alguns aspectos matemáticos associados a um conhecimento que permita uma navegação frutífera entre distintas representações (RIBEIRO, 2011), para dar sentido ao algoritmo, tendo em conta o que se faz e por que se faz em cada um dos passos desse processo. Essa exploração, apesar de se configurar como um caso concreto – em termos tanto dos valores numéricos envolvidos como do conteúdo matemático –, pretende também contribuir para que cada um de nós reflita sobre e problematize a sua própria prática e o conhecimento que assume deter sobre os diversos tópicos matemáticos a serem ensinados nas diferentes etapas educativas.

Conhecimento especializado do professor e potencialidades dos recursos na atribuição de significado matemático

Um dos aspectos do conhecimento do professor vincula-se a conhecer os recursos, as suas potencialidades associadas a cada tópico concreto e a(s) forma(s) como a sua exploração permite(m)/potencia(m) efetuar conexões com tópicos distintos ou com um mesmo tópico em etapas educativas distintas. No entanto, uma utilização profícua desses recursos sustenta-se no conhecimento matemático do professor e nas especificidades desse conhecimento, tendo em consideração a ação docente, pois, por si só, *os recursos não fazem milagres*, apesar de poderem, por vezes, transformar tarefas/jogos matematicamente pouco exigentes em atividades que os alunos consideram didaticamente apelativas/emocionantes (RIBEIRO; CARRILLO, 2011) – às quais eles se referem, frequentemente, como *tarefas giras* (PINTO; RIBEIRO, 2013), mas com pouca ou nenhuma intencionalidade matemática. Ocorre, porém, que nessa transformação, por deixarem à margem os objetivos matemáticos que supostamente deveriam guiar a atuação docente, tais recursos conduzem a limitadas oportunidades de aprender (HIEBERT; GROUWS, 2007) e, por conseguinte, quando muito, a aprendizagens pouco significativas. (Este tipo de discussão/chamada de atenção poderia ser aqui efetuado de modo similar para as tarefas que, por alguma via mais ou menos aleatória, se recolhem/obtêm e são, portanto, alheias aos professores, pois podemos assumir que todas elas, na sua gênese, serão concomitantemente "boas e más tarefas"[3] no sentido de desenvolver o conhecimento dos alunos, pois é o conhecimento do professor que molda a sua adequação e implementação.)

Existem vários tipos de materiais (estruturados ou não) passíveis de utilização com significado no processo de modelação da divisão – desde uma fase inicial de compreensão do que corresponde a dividir (em termos escolares).[4] A opção tomada para essa discussão foi a de considerar o material dourado, pois ele permite efetuar a modelação associada ao enriquecimento do conhecimento relativo ao sistema posicional e ao sistema decimal. A utilização do material dourado é pertinente, pois permite ainda discutir o papel da unidade, que é algo central também para entender as frações – em que uma das formas de considerá-las é como divisão entre duas quantidades. Assim, o material dourado, ao permitir que uma mesma peça possa representar diferentes quantidades, bastando para tal variar a unidade considerada, pode contribuir também para que os alunos deixem de encarar a matemática como algo estático (que lhes é apresentado na forma final) e passem a encará-la como algo em construção (ao seu nível, obviamente). Essa variação da unidade, apresentada aos alunos desde tenra idade, poderá contribuir também para que passem a atribuir importância à unidade que se considera e posteriormente não sintam dificuldades para explorar situações com números racionais na sua representação em fração, como ainda ocorre com futuros professores (RIBEIRO; JAKOBSEN, 2012).

Figura 1 – Constituição do material dourado.



Fonte: a pesquisa.

Com esse tipo de material, ao assumir, por exemplo, o cubo grande como a unidade, uma placa corresponderá a um décimo; uma barra, a um centésimo; e um cubo pequeno, a um milésimo. Mas, tomando a placa como unidade, cada barra passa a corresponder a um décimo, e cada cubo pequeno, a um centésimo, sendo o cubo grande a dezena. É importante utilizar as suas diferentes componentes como diferentes unidades, também para que os alunos possam conscientizar-se da importância da escolha da unidade. Esse tipo de conhecimento das possíveis relações entre os elementos constituintes do material dourado é também um dos aspectos que permitirão desenvolver o seu sentido de número e, portanto, contribuir para compreendê-lo de forma global e flexível, e não apenas como quantidade. Isso lhes propiciará desenvolver estratégias efetivamente úteis e eficazes de utilizá-lo.

Para uma profunda compreensão das operações, é fundamental efetuar as necessárias, e corretas, conexões entre as diferentes operações e entre as formas de as representar e modelar com correspondência: as três operações tradicionalmente exploradas, anteriormente à introdução formal da divisão – adição, subtração e multiplicação –; a representação escrita e a forma como se modela a operação, utilizando o material dourado. Apesar de algumas críticas à utilização dos materiais manipuláveis no/para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, aqui se pretende associar esse material concreto (material dourado, base 10) ao entendimento significativo de cada um dos passos explorados associado à divisão; e atribuir sentido ao que se faz, à forma como se faz e às razões por que se faz, do ponto de vista do conhecimento matemático do professor. Assim se espera mobilizá-lo a pensar e implementar tarefas matemáticas com os seus alunos.

[3] Essa expressão é demasiado extremada, pois, ao nos referirmos a tarefas, deveríamos falar em adequação, ou não, tendo sempre em consideração a etapa educativa dos alunos e o(s) objetivos matemáticos perseguidos – a curto, médio ou longo prazo.

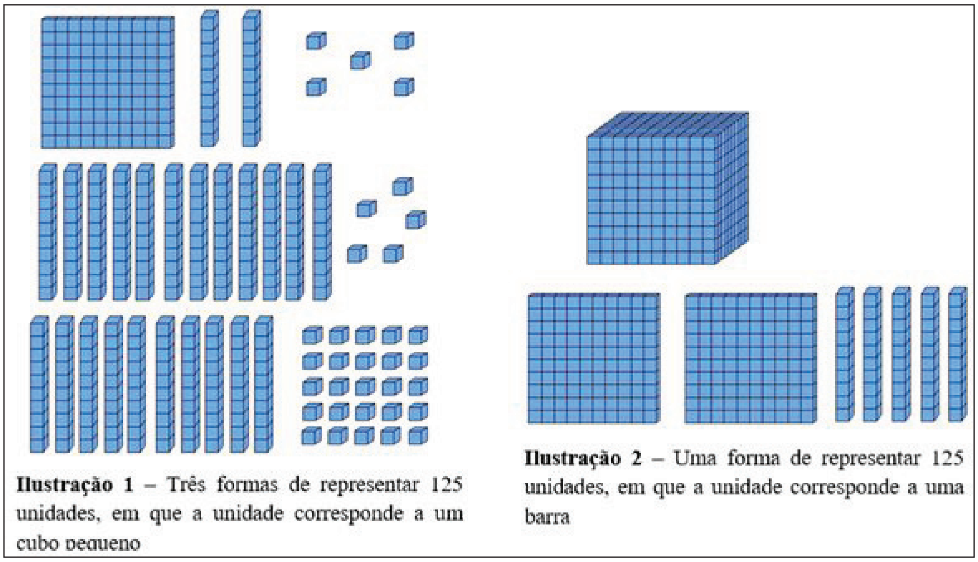
[4] Essa é uma das primeiras "operações" que aprendemos a realizar (de modo não formal). Aprendemos, desde muito cedo, a dividir coisas, como a atenção dos pais e dos avós; quando crescemos, os jogos, os doces e os carinhos. Quando adultos, aprendemos a dividir responsabilidades, obrigações, etc.

A escolha da unidade

Previamente à utilização (compreensiva) de quaisquer recursos, é fundamental manipular e explorar esse mesmo material. Obviamente, essa utilização compreensiva e a possível promoção dos conhecimentos matemáticos dos alunos se sustentam no conhecimento matemático do professor. No caso concreto, é essencial que a utilização do material esteja associada a um conhecimento do sistema de numeração, a um sólido sentido de número e da operação (CASTRO; RODRIGUES, 2008; SLAVIT, 1999), bem como a um entendimento profundo do que significa dividir (nos vários sentidos da divisão)[5] e a formas de encarar a divisão para além dos seus sentidos (RIBEIRO et al., 2014).

A solicitação para decompor um número – nesse caso, por exemplo 125 – é associada, frequentemente (majoritariamente), à decomposição em centenas, dezenas e unidades. Porém, utilizar apenas um tipo de decomposição (e representação) de uma qualquer quantidade impede o entendimento mais completo de número, do seu sentido e do sentido de operação. Empregar uma multiplicidade de formas de representação múltipla de uma mesma quantidade, recorrendo ao mesmo material, envolve também entender o papel da unidade e aceitar possíveis implicações na sua alteração (Figura 2).

Figura 2 – Algumas formas de representar 125, recorrendo ao material dourado e variando a unidade considerada.



Fonte: a pesquisa.

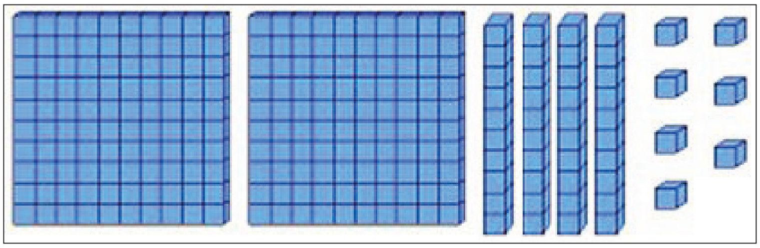
A partir daqui, é então possível iniciar uma representação, qual jogo, de quantidades também com parte decimal, assumindo como unidade elementos (sólidos) distintos do material dourado. Esse tipo de trabalho, focado na variabilidade da unidade envolvendo quantidades inteiras, possibilitará uma interiorização da multiplicidade de representações para uma mesma situação e da variabilidade que cada objeto poderá assumir, dependendo do contexto. Uma exploração diversificada dessa multiplicidade e variabilidade tornará mais ancoradoras as aprendizagens dos alunos, permitindo tornar

[5] No âmbito escolar, considera-se, essencialmente, a divisão como partilha, medida ou razão. Cada um desses sentidos se encontra envolvido em situações distintas, e a sua (in)adequada exploração com os alunos tem implicações diretas na forma como esses entendem o que é dividir e nas conexões que consideram entre essa operação e as demais.

exequível a representação de quantidades não inteiras com o material dourado[6].

Assim, uma representação possível[7] para 24,7 poderá ser, por exemplo como se observa na Figura 3.

Figura 3 – Representação de 24,7 recorrendo ao material dourado, em que a unidade corresponde a uma barra.



Fonte: a pesquisa.

Modelação compreensiva do algoritmo da divisão

Uma das operações em que os alunos revelam dificuldades é a divisão. Essas dificuldades podem estar associadas à multiplicidade de formas de encarar essa operação; ao modo como cada um de nós entende cada uma delas (conhecimento do professor); ou à dissociação da realização do algoritmo com algumas dessas formas e à falta de correspondência entre o que se diz, o que se faz e os motivos matemáticos que sustentam esse fazer. Um dos modos de atenuar essas dificuldades, desenvolvendo o conhecimento matemático associado e o entendimento do que efetivamente corresponde a dividir usando o algoritmo, será a utilização compreensiva de diversos recursos, e o material dourado pode assumir um lugar de destaque nessa atenuação – associado, obviamente, a um conhecimento especializado do professor que ensina matemática, que lhe permita aproveitar todas as potencialidades do recurso, explorando os diversos aspectos e dimensões da matemática subjacente à sua utilização, para facultar efetivas oportunidades de aprender (no sentido referido por Hiebert e Grouws [2007]).

Os alunos têm, frequentemente, dificuldades em efetuar a divisão – também por não o fazer de forma compreensiva – recorrendo ao algoritmo, dificuldades que se revelam, por exemplo, na linguagem utilizada ou na assunção de que o algoritmo da divisão comumente utilizado se pode empregar, do mesmo modo e com sentido, em qualquer situação. Essas dificuldades são ainda mais evidentes quando estão envolvidas quantidades inteiras superiores à dezena ou quantidades não inteiras (decimais). Nessa última situação, é frequente ouvir papaguear "regras" de forma automática, como se de mágicas se tratassem (algumas delas sustentadas em ideias errôneas), e necessariamente sem a compreensão dos motivos matemáticos subjacentes à sua efetivação nem o questionamento dos porquês que sustentam a sua correção matemática – por exemplo, *"quando o dividendo é inteiro e o divisor é decimal, o quociente tem o mesmo número de casas decimais que o divisor; para multiplicar por 10, tenho de andar com a vírgula uma casa para a direita"*.

Consideremos as situações de divisão comumente solicitadas aos alunos da Educação Básica – envolvendo, no máximo quantidades com milésimas diferente de zero. Assim, e no que concerne *ao* algoritmo, podemos considerar cinco casos distintos envolvendo números posi-

[6] Também o ábaco poderá ser um bom recurso para desenvolver algumas dimensões do sentido de número dos alunos, sempre e quando o foco não for na discussão equivocada de que em cada ordem não podemos ter mais de dez peças (unidades da ordem correspondente), e sim na atribuição de significado à ideia de composição e decomposição dos números representando quantidades.

[7] Obviamente, essa representação poderá diferir, dependendo da unidade selecionada, sendo esse um dos aspectos fulcrais a considerar numa primeira fase de exploração do material (qualquer material que permita discutir o papel da unidade considerada).

tivos: (a) divisão de um número natural[8] por um natural inferior a dez; (b) divisão de um número natural por um natural superior a dez; (c) divisão de um número natural por um número com parte decimal diferente de zero; (d) divisão de um número decimal por um inteiro; e (e) divisão de um número decimal por outro número decimal.

Uma das formas de tornar mais facilmente compreensível, também pela visualização associada, será explorar com os alunos várias representações de uma mesma situação, promovendo um entendimento da correspondência entre essas distintas representações. Apresentam-se, em seguida, os processos de representação/modelação *do* algoritmo envolvendo valores de cada um dos "*casos*" anteriormente referidos, para atribuir significado aos passos do algoritmo. Busca-se contribuir para problematizar a nossa própria prática, o que apenas é possível quando sustentamos essa prática matemática em dimensões com as quais nos relacionamos suficientemente à vontade para – em associação ao conhecimento interpretativo do professor – podermos verdadeiramente questionar os alunos sobre o que fazem e por que o fazem de determinada forma (RIBEIRO; MELLONE; JAKOBSEN, 2016) ou responder aos seus diversos possíveis questionamentos (ou ter a segurança profissional de reconhecer que em determinado momento não conhecemos a resposta, mas iremos pesquisar), o que possibilitará uma exploração dos diferentes temas e conteúdos – aqui, algoritmo da divisão – com efetiva compreensão, e não como uma mera reprodução de passos sem significado.

Um dos problemas comuns que têm sido identificados (no âmbito das operações) no conhecimento de alunos, professores e futuros professores é o de não atribuírem significado ao que fazem, advindo daí algumas das concepções errôneas tanto em termos de forma como de conteúdo (MARTINS; RIBEIRO, 2013).

Aqui se discutem os diferentes casos da divisão, usando o algoritmo, tendo por base algumas produções e raciocínios de professores e futuros professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais (graduação em Pedagogia) no contexto de uma disciplina e de alguns *workshops* que têm por intuito aceder ao MTSK dos participantes e desenvolvê-lo.

Uma das primeiras tarefas solicita aos participantes que determinem o resultado da divisão de 536 por 4; que justifiquem cada um dos passos do procedimento; e que representem pictoricamente (recorrendo ao material dourado) o que fizeram. A seguir, a Figura 4 representa uma das respostas resolutivas a essas questões.

Figura 4 – A divisão por "correspondência termo a termo" e a sua representação numérica.

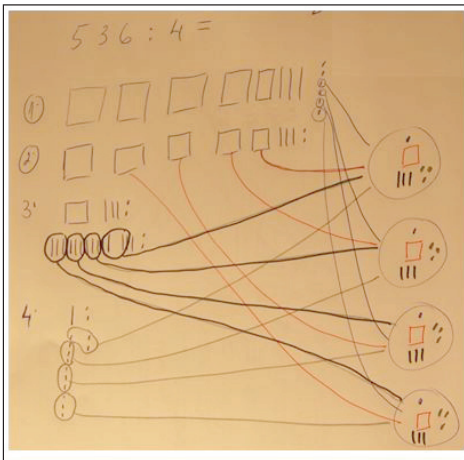


Ilustração 4 – Modelando o processo "intuitivo" de dividir (correspondência termo a termo – divisão como partilha)

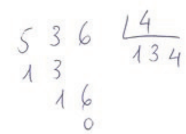


Ilustração 3 – A divisão "tradicional"

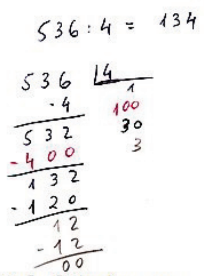


Ilustração 5 – O algoritmo com correspondência à representação pictórica

Fonte: a pesquisa.

[8] Por questão de eliminação de casos, consideremos o zero excluído.

Essas representações (Ilustrações 4 e 5), ainda que com correspondência entre si, não têm relação explícita e imediata com o algoritmo que é utilizado tradicionalmente (Ilustração 3), o que levanta a questão: o que se faz e qual a justificação matemática associada a cada um dos passos do algoritmo? E questiona o entendimento (de cada um de nós) revelado sobre o algoritmo – aquele que é, tradicionalmente, abordado na escola.

Apesar de, obviamente, esses processos serem válidos para determinar o quociente de qualquer divisão (é, inclusive, desejável que os alunos sejam confrontados com situações que lhes permitam explorá-lo – por ser intuitivo, atribuem-lhe significado), o que nos chama a atenção é o fato de os resolutores (tradicionalmente nos contextos em que exploramos esse tipo de situação) não se questionarem sobre a correspondência entre as três representações e acharem que estão fazendo exatamente a mesma coisa. Esse foco essencialmente no "resultado da operação",[9] e não no processo seguido para obtê-lo, tem implicações, também, na própria forma de entender a resolução de problemas e o seu papel na formação (não apenas matemática) dos alunos (RIBEIRO, 2013). Tal como questiona um deles, quando confrontado com a falta de correspondência entre as duas representações: "*mas se o resultado final é o mesmo, qual é o problema de dizer que estou a representar os passos do algoritmo? Obtive sempre 134.*". Uma outra questão prende-se com o fato de que essa forma de entender o algoritmo, associada ao modo como é normalmente verbalizado, apenas pode ser utilizada (com sentido) quando nos encontramos em situações de divisão como partilha, em que, obviamente, apenas podemos ter no divisor uma quantidade natural. Daí advém um dos aspectos da importância de relacionar, com sentido, a divisão com a multiplicação (e não meramente referenciar que são "operações inversas"), explorando as relações existentes entre dividendo, divisor, quociente e resto, quando dividimos por quantidades *n* vezes maiores ou menores (sendo *n* um (sub)múltiplo de 10).

Para entender os outros casos que, tradicionalmente, se associam ao ensino de regras mnemônicas, torna-se essencial que anteriormente tenha sido discutido, e entendido, o significado do que corresponde a medir no âmbito da Geometria (CLEMENTS; STEPHAN, 2004; POLICASTRO; ALMEIDA; RIBEIRO, 2018), de forma a ser possível efetuar as necessárias conexões envolvendo os conceitos de medir e de dividir. No âmbito do conhecimento do professor dos primeiros anos (mas não só), estes são alguns dos aspectos considerados essenciais para possibilitar a preparação e a implementação de tarefas matematicamente ricas e desafiadoras, mantendo o seu nível cognitivo (STEIN et al., 2000).

(a) Divisão de um número natural por um natural inferior a dez

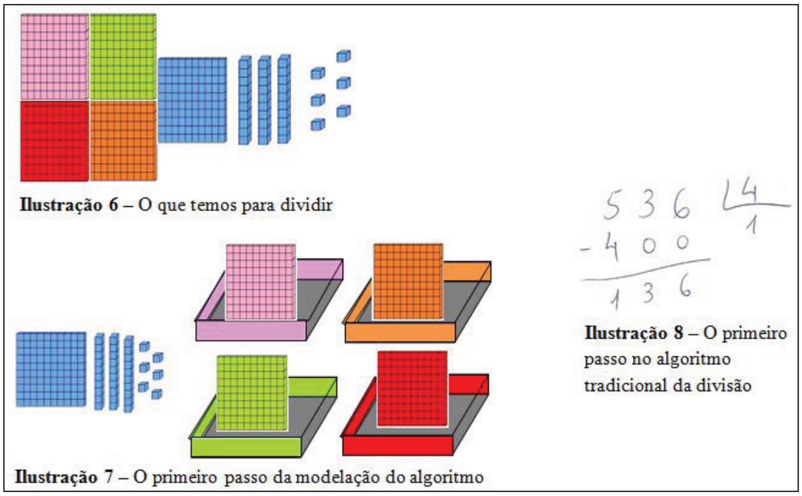
A fim de facilitar o entendimento do processo de modelação, consideremos o dividendo superior ao divisor. Vejamos o processo de modelação dessa operação, efetuando uma correspondência entre o algoritmo e os passos efetuados recorrendo ao material dourado. Consideremos, aqui, por ordem de simplicidade, um dos cubos pequenos como unidade.

Ao efetuarmos uma operação de divisão, o processo seguindo *o algoritmo tradicional* encontra-se associado a iniciar o processo de divisão pela quantidade maior (maior ordem de grandeza). Se queremos determinar o quociente de 536:4, temos de distribuir cinco centenas (placas) por quatro grupos (chamemo-as de caixas), correspondendo uma centena a cada uma das caixas, e ficando por distribuir 136 unidades, as quais correspondem ao que está em azul (Figura 5).

No passo seguinte do algoritmo, normalmente colocamos uma indicação a representar que iremos considerar o 13 (as 13 dezenas), e não apenas o 1 (uma centena), sendo uma das justificações comuns o fato de que "*não podermos distribuir 1 por quatro caixas*", o que não é correto formular dessa forma, pois, como é facilmente observável pelo que foi modelado inicialmente na distribuição termo a termo (Ilustração 4), o 1 representa uma centena e, portanto, 100 unidades, que claramente podemos distribuir por quatro "caixas". Porém, o que efetuamos no

[9] Comumente referido, de forma errônea, como "resultado da conta".

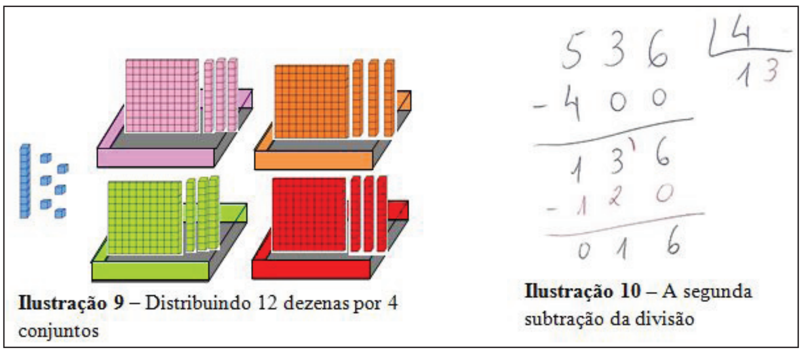
Figura 5 – Correspondência da modelação do primeiro passo do algoritmo da divisão recorrendo ao material dourado.



Fonte: a pesquisa.

algoritmo corresponde, efetivamente, a particionar a centena (placa) em barras, obtendo dessa forma 13 barras (13 dezenas, considerando o cubo pequeno como unidade). Assim, após efetuar a conversão, distribuímos as 13 barras pelas 4 caixas, cumprindo três barras a cada caixa e restando uma barra e seis cubos pequenos por distribuir pelas caixas. Nessa etapa, foram distribuídas 120 unidades, cabendo, até agora, a cada “caixa” um total de 130 unidades e restando 16 unidades para distribuir (Ilustração 9 e Ilustração 10).

Figura 6 – Correspondência do segundo passo da divisão recorrendo ao material dourado e ao algoritmo.

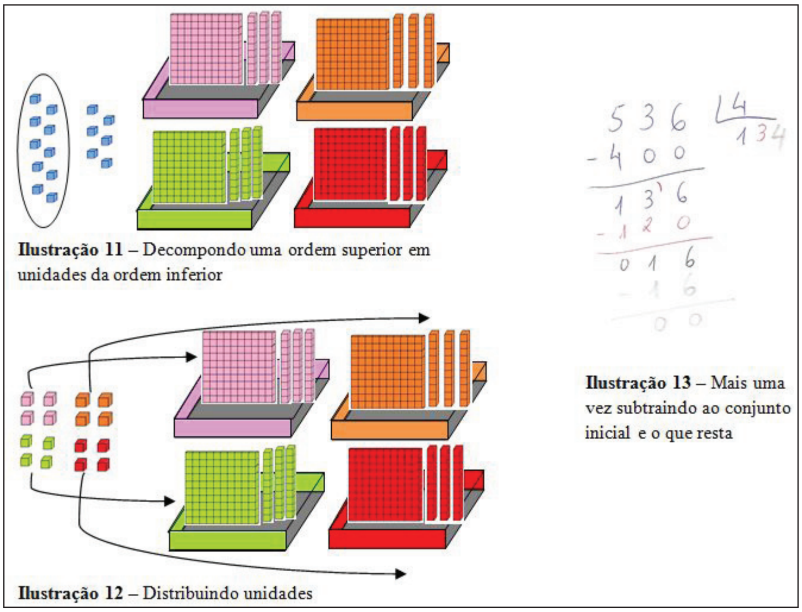


Fonte: a pesquisa.

De modo similar ao que ocorreu anteriormente, pela estrutura do sistema decimal, teremos de converter a barra nas suas dez subunidades (Ilustração 9). Essa decomposição é necessária, uma vez que, tal como se encontra, apesar de ser matematicamente possível (algo de que o professor deverá estar consciente de modo a poder também adequar a sua linguagem e a efetuar – se for esse um dos seus objetivos – conexões envolvendo a representação em fração), não obtemos uma quantidade inteira ao dividir uma barra por quatro conjuntos.

Podemos, portanto, passar agora à divisão das 16 unidades pelas quatro "caixas", cumprindo assim quatro unidades a cada uma das caixas, não restando nenhuma unidade para distribuir e ficando cada "caixa" com um total de 134 unidades. É importante salientar que a escolha dos números (quantidades) a considerar nas tarefas que elaboramos é de extrema importância – papel dos exemplos (ROWLAND, 2008) –, pois são eles que vão tornar as tarefas mais (ou menos) complexas. Essa necessidade de complexificação das tarefas encontra-se associada também ao fato de os alunos terem o direito (e o professor, a obrigação) de ir aprofundando e ampliando o seu conhecimento matemático ao longo da escolaridade. Por isso, é essencial que o professor detenha um conhecimento especializado que lhe permita entender de que formas os temas e os conteúdos se encontram relacionados (conexões matemáticas e extramatemáticas), como vão evoluindo ao longo da escolaridade (conhecimento curricular) e que implicações tem cada uma das decisões que o professor toma ao explorar os temas matemáticos de determinada forma – generalizações locais ou globais – e deixar, ou não, a porta aberta para aprendizagens futuras.

Figura 7 – Correspondência do terceiro passo da divisão entre o algoritmo e o material dourado.



Fonte: a pesquisa.

Obtivemos, assim, a resposta da divisão de 536 unidades por quatro conjuntos (caixas). Ao efetuar a modelação, com correspondência, de cada um dos passos do algoritmo da divisão, permitimos aos alunos atribuir sentido ao que fazem e explicitar por que o fazem, potenciando sua plena compreensão, que se encontrará na gênese da erradicação das dificuldades quando da divisão envolvendo quantidades não inteiras (tanto no dividendo como no divisor ou resto). É de salientar que, associado a esse processo de modelação, deverá estar o uso adequado da linguagem, já que o entendimento do que é dividir e do algoritmo, através dessa correspondência entre a representação com o material manipulável e a representação numérica, apenas poderá ocorrer com significado se as linguagens natural e matemática estiverem alinhadas entre si e associadas à correspondência que se pretende efetuar.

(b) Divisão de um número natural por um natural superior a dez

Consideremos uma situação em que se pretende dividir 536 unidades por 12 conjuntos.[10] Aqui, se não estiverem bem compreendidos os motivos que sustentam o tipo de divisão e modelação anterior, o grande problema é atribuir sentido aos motivos pelos quais, no algoritmo, consideramos o 53 e não apenas o 5; a que se refere esse 53 e ao que se irá (iremos) obter como quociente: se centenas ou dezenas – que é também uma das dificuldades revelada pelos resolutores e que se manifesta, claramente, na situação em que o quociente envolve valores em representação decimal (MARTINS; RIBEIRO, 2013).

Nessa situação, e quando verbalizamos o que pretendemos efetuar, somos levados mais uma vez a pensar em quantos conjuntos de 12 é possível efetuar contendo 53 dezenas cada. Devemos, porém, ser conscientes de que, ao pensar (verbalizar) dessa forma, saímos do espaço da divisão como partilha e entramos no espaço da medida. Essa passagem corresponde a perguntar quantas vezes o 12 cabe no 53, ou seja, a medir o 53 usando o 12 como unidade, o que associa diretamente a divisão à multiplicação como operação inversa. Ainda que esteja correto efetuar essa abordagem/questionamento para determinar a resposta à questão, fazê-lo sem discutir/trabalhar as diferenças entre essa opção e o que foi feito anteriormente na divisão como partilha leva a uma mescla e a entendimentos relativamente ao que é dividir – sendo este um dos motivos que sustentam as dúvidas e as dificuldades dos resolutores das tarefas de divisão usando o algoritmo.

Assim, aqui a opção é manter a mesma estrutura e explorar essa situação como sendo de partilha – por ser a forma como, tradicionalmente, alunos e professores estão habituados a considerar a divisão desde as primeiras experiências. Temos, portanto, de usar uma linguagem matemática adequada à situação, o que implica estarmos conscientes de que não formamos conjuntos de 12 elementos, mas, sim, buscamos determinar quantos dos 53 elementos (53 dezenas) correspondem a cada um dos 12 conjuntos que temos na Ilustração 14 (o 12 corresponde ao número de conjuntos, e não ao cardinal de cada um dos conjuntos – divisão como medida *versus* partilha). Ficamos, assim, já com quatro dezenas em cada um dos 12 conjuntos, faltando distribuir 56 unidades, o que vai destinar quatro unidades a cada um dos 12 conjuntos, restando oito unidades por distribuir (Ilustração 15).[11]

Essa divisão envolvendo esses valores concretos pode ser utilizada para abordar outros conteúdos numéricos, efetuando conexões, por exemplo, com o papel do resto (por que terminar ou não com resto oito, e em que etapa educativa e situação isso poderá ter sentido) ou com a noção de dízima infinita periódica ou ainda com os tipos de variáveis envolvidos em problemas que possam ser resolvidos recorrendo a essa expressão (RIBEIRO et al., 2014; RIBEIRO; AMARAL, 2015). Há também de ressaltar a importância de esclarecer a que corresponde cada um dos 48 que aparecem no algoritmo (48 dezenas e 48 unidades – frequentemente nas 48 dezenas, omite-se o zero das unidades), bem como cada um dos quatros do quociente (quatro dezenas e quatro unidades).

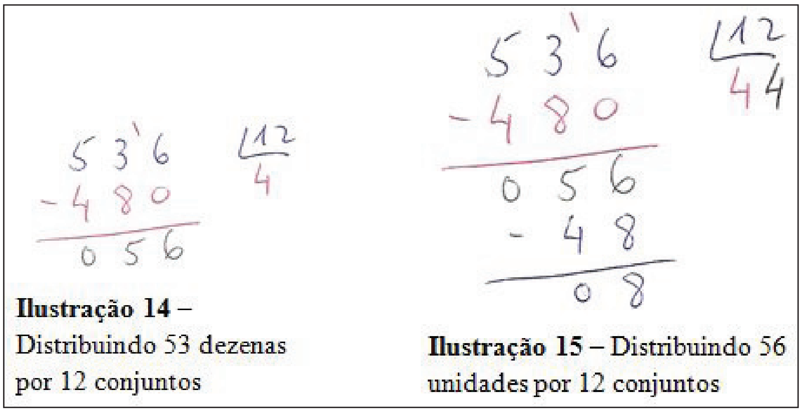
(c) Divisão de um número natural por um número com parte decimal diferente de zero

Nas duas situações seguintes, por envolverem quantidades não inteiras, o maior problema dos alunos prende-se a saber de que modo efetuar a divisão, pois "não podem" dividir por partes de conjuntos e, como o quociente que obtêm não é inteiro, não sabem "*onde colocar a vírgula*". Esse

[10] Note-se que a escolha desses valores tem, em si, o objetivo de permitir explorar uma mesma situação e diferentes contextos – considerando que a divisão tem de ser exata ou não exata – e as implicações dessa decisão.

[11] Note-se que essa pergunta pode ser formulada de uma outra forma – quantas vezes tenho de repetir o 12 para obter o 53? –, que corresponde ao modo como, normalmente, é "ensinada" a divisão. Apesar de poder ser efetuada dessa forma, essa abordagem considera a divisão como medida e associa-se a uma forma substancialmente distinta de considerar o que é dividir – que, particularmente, consideramos mais adequada de ser discutida – e que implica um conhecimento especializado por parte do professor, para fazer uso de uma linguagem adequada e poder discutir com os alunos as diferentes formas de questionar e suas implicações matemáticas. Aqui discutimos a divisão como partilha, pois é essa forma de considerar a divisão que os professores exploram quando enunciam as "regras" para dividir, nos casos em que estão envolvidas quantidades não naturais.

Figura 8 – Divisão de um inteiro por um número de conjuntos superior à dezena.



Fonte: a pesquisa.

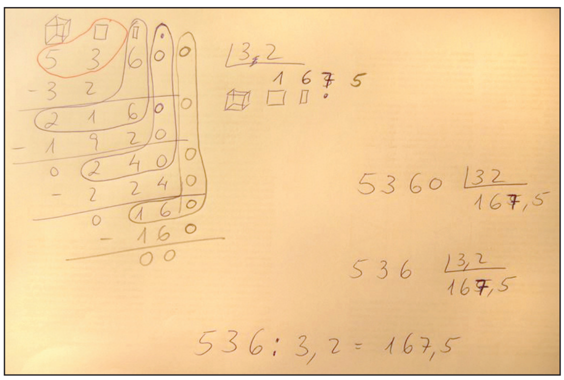
"não poder" está associado a considerar a divisão apenas como partilha, pois, nesse caso, não tem sentido distribuir por uma quantidade não natural de elementos; é requerido, portanto, que, de modo a atribuir sentido ao que se faz, a divisão seja explorada como medida também nos casos anteriores, antes de poderem ser explorados os presentes casos.

Quando pretendemos determinar o resultado da operação 536:3,2, considerando a divisão como partilha – que é a forma como até então tem sido ensinada na escola, e que se encontra associada às "regras" de onde colocar a vírgula (sem compreensão) –, somos obrigados a considerar apenas quantidades naturais. Esse é um dos fatores que leva, também, os alunos a terem dificuldade, no final, em relação ao "*local onde colocar a vírgula…*", pois não podem dividir por um número não natural de conjuntos. E é a isso que está, até esse momento, associada a divisão – o que corresponde a um desafio cognitivo semelhante ao que ocorre quando expandimos as operações dos naturais aos racionais (na representação em fração). Assim, ao dividir uma quantidade inteira por uma com representação decimal, temos de efetuar uma mudança de unidade de referência, possibilitando que o divisor seja "transformado" numa quantidade inteira.[12]

[12] Quando isso não é possível, pela natureza do divisor, podemos recorrer ao processo que está ilustrado na epígrafe seguinte, de modo a atribuir significado à forma como obtemos a quantidade de casas decimais no quociente, e também no resto.

Nesse sentido, e no caso que aqui se discute, as 536 unidades passam a ser consideradas de 5360 décimos – a mesma quantidade, mas a unidade de referência é o décimo. Daí que, para a representação recorrendo ao material dourado, o trabalho anterior de considerar o mesmo elemento como diferentes unidades seja fundamental. Assim precisamos, no mínimo, fazer corresponder às unidades a barra do material dourado (que, mesmo assim, nesse caso concreto, tal como veremos mais adiante, não será suficiente) para que os décimos possam ser representados pelos cubos pequenos. Temos, então:

Figura 9 – Correspondência entre a modelação utilizando o material dourado e os passos do algoritmo.



Fonte: a pesquisa.

Considerando, portanto, a barra como unidade, obtemos que a cada um dos 32 conjuntos correspondem 167 décimos e sobram 16 décimos. Caso o objetivo seja o de efetuar uma divisão exata, então teremos de considerar a unidade como uma placa (movemos a ordem de grandeza) e obteremos que a cada um dos 32 conjuntos cumprem 1675 décimos – esta seria a única resposta possível, considerando a divisão como partilha. A resposta esperada, porém, é 167,5 unidades, o que corresponde a "quantas vezes tenho de repetir o 3,2 para obter 536?" (divisão como medida) ou "qual o número que, multiplicado por 3,2, vai dar 536?" (divisão como operação inversa da multiplicação). Notemos que, embora algebricamente o resultado de 536:3,2 seja o mesmo que 5360:32, pretendendo atribuir sentido ao que se faz quando se divide, essas duas operações envolvem diferentes formas de entender a divisão. Isso, portanto, exige um conhecimento matemático específico do professor relativamente à medida, à partilha e às diferenças entre esses sentidos.

(d) Divisão de um número em representação decimal por um inteiro

Se pretendermos efetuar a operação 0,536:4, recorrendo ao algoritmo de forma significativa, podemos pensar que estamos a dividir uma quantidade inteira de, no caso, milésimos e, assim, os passos e seu significado no algoritmo correspondem aos efetuados anteriormente para a primeira situação explorada (536:4). Há, no entanto, que ter em atenção que nessa situação estamos a considerar um dividendo (a quantidade que se pretende dividir) mil vezes inferior; daí que o quociente (quanto cabe a cada um dos quatro conjuntos – divisão como partilha – ou o tamanho de cada uma das quatro partes, divisão como medida) também o vá ser, correspondendo, assim, a 0,134 unidades.

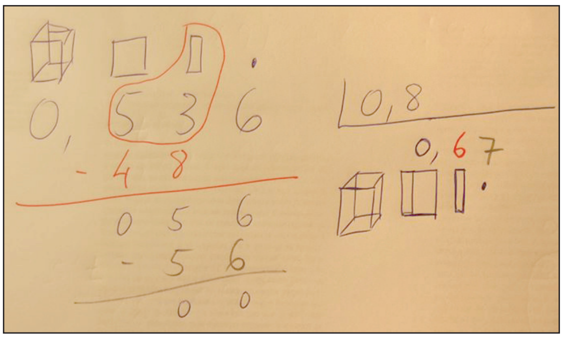
Note-se (notemos) que aqui foi selecionada uma quantidade inferior à unidade, de modo a extremar as situações possíveis (até às milésimas), e os valores considerados tiveram em conta o fato de a operação ter sido já explorada com quantidades naturais, o que poderá auxiliar, também, os resolutores a desenvolverem o seu entendimento e conhecimento da divisão tendo por base as experiências anteriores.

(e) Divisão de um número decimal por outro número decimal

Esta é, porventura, a situação que poderá tornar-se mais exigente em termos do raciocínio de navegação associado;[13] porém, um amplo e profundo sentido de número e de operação (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992; SLAVIT, 1999) permitirá concretizar uma relação entre os elementos constituintes da divisão e as conexões entre a divisão e as demais operações – não exclusivamente a multiplicação.

Como exemplo, imaginemos que queremos efetuar a operação 0,536:0,8. De modo que possa ser atribuído sentido aos distintos passos do algoritmo, considerando a divisão como partilha[14], é necessário que o divisor seja uma quantidade inteira, pelo que, no caso, teremos de considerar uma mudança de unidade de referência para, pelo menos, as décimas. Em termos de representação, obtemos 53 barras e, portanto, obteremos em cada um dos oito conjuntos apenas uma parte das placas, o que nos permite entender, de forma clara, a que corresponde a unidade (onde fica a vírgula).

Figura 10 – Correspondência entre a modelação da divisão de uma quantidade não inteira por uma quantidade não inteira.



Fonte: a pesquisa.

[13] Se o trabalho com materiais diversificados (material dourado e outros) for já uma prática comum e instituída, os alunos, mesmo intuitivamente, efetuam esse tipo de operação.

[14] Recordemos que esta corresponde à forma como é tradicionalmente ensinado esse tipo de divisão, associado às regras da contagem das casas decimais do dividendo e do divisor para encontrar o "local da vírgula" do quociente.

Efetuando este tipo de representação e entendendo efetivamente o que fazemos, não necessitamos aplicar qualquer regra (sem compreensão). Podemos facilmente entender que, ao dividir cinco placas por oito conjuntos, obtemos uma quantidade de placas menor que zero, mas, ainda assim, maior que metade. Portanto, uma forma complementar de encarar a divisão e o modo de antever o número de casas decimais do quociente associa-se à relação de operação inversa entre divisão e multiplicação e à propriedade que relaciona o tamanho/cardinal do que queremos dividir (dividendo) com o número de conjuntos/cardinalidade do conjunto pelo qual queremos dividir/tamanho de cada uma das partes (divisão como partilha ou como medida).

Alguns comentários e reflexões finais

Com os exemplos aqui apresentados e sua discussão, pretende-se chamar a atenção para algumas das especificidades do conhecimento do professor, de modo a permitir que os seus alunos experienciem processos compreensivos de divisão e associem cada um dos passos do algoritmo (seja ele qual for, com as devidas adaptações, claro) aos aspectos matemáticos que efetivamente os sustentam, e não se baseiem em regras sem sentido ou em "mágicas sem magia". O fato de se ter recorrido ao material dourado não pretende, de modo algum, dar primazia a este em detrimento de outros; é apenas uma forma de ilustrar a possibilidade de efetuar uma navegação frutífera entre dois modos de representação – assumindo, de forma explícita, a importância de tal navegação (RIBEIRO, 2011). Obviamente a decisão de qual o recurso mais adequado à exploração de cada um dos temas e tópicos depende de um conjunto de fatores específicos (etapa educativa, objetivos matemáticos perseguidos), mas, nessa decisão, o conhecimento do professor relativamente à matemática envolvida e às características dos recursos numa sua potenciação (parte do conhecimento especializado) assume um papel de destaque – o conhecimento do professor assume, nas aprendizagens dos alunos, uma importância maior que qualquer outro fator (NYE; KONSTANTOPOULOS; HEDGES, 2004).

Esse conhecimento por parte do professor (que aqui se abordou também, em grande parte, como constituinte do conhecimento dos alunos) encontra-se na gênese do entendimento – e não na memorização – dos porquês matemáticos, associados ao desenvolvimento de um conhecimento matemático de e para "deixar a porta aberta" para aprendizagens futuras. Com isso, não se defende que alguns processos, fatos e procedimentos não devam ser memorizados pelos alunos, porém essa memorização deverá ocorrer apenas e só após um efetivo entendimento do tema que se aborda, e não como ponto de partida, o que somente será possível se o professor for detentor de um tipo de conhecimento especializado que lhe permita desenvolver uma prática matemática sustentada em promover nos seus alunos uma visão da matemática como uma rede de conexões – assumindo o conhecimento do professor relativamente a essas, conexo a um papel central nessa prática. A gênese desse conhecimento especializado do professor deverá ocorrer na formação inicial de professores, devendo, portanto, passar a fazer parte dos objetivos da formação – possibilitando que essa formação se foque onde é efetivamente necessária para a melhoria das aprendizagens dos alunos e, por essa via, da sociedade.

Assim, ao professor (a todos, mas mais particularmente aos formadores de professores), para além de um saber fazer ou um conhecimento pedagógico, será essencial um conhecimento matemático mais amplo tanto dos temas como da estrutura e da prática matemática, que lhes permita sustentar a adequação das tarefas e dos processos ao público que têm pela frente. Essa perspectiva considera, portanto, que cada um de nós, com responsabilidade na formação de professores, é também responsável pelos ainda não satisfatórios resultados dos alunos (pelo menos nos testes internacionais – por exemplo, TIMMS). Daí que tudo o que é (foi) referido quanto à necessidade de um conhecimento por parte do professor e à relação desse conhecimento com as aprendizagens dos alunos (NYE; KONSTANTOPOULOS; HEDGES, 2004) possa/deva ser expandido para os formadores de professores, uma vez que esses professores, atuais ou futuros, são os nossos alunos (JAWORSKI, 2008).

A utilização de uma multiplicidade de representações (e recursos) poderá contribuir para a estruturação de pensamento (MELLONE, 2011), auxiliando os alunos a um efetivo entendimento matemático, associado a cada um dos passos do algoritmo, desenvolvendo (ou dele fazendo uso) seu conceito de número e conhecimento das características do sistema de numeração em vigor. Isso só será possível, obviamente (RIBEIRO; MONTEIRO; CARRILLO, 2010), se os professores forem, eles próprios, detentores de um tal conhecimento de forma sólida, que lhes permita navegar, e conduzir à navegação, entre múltiplas representações.

Considera-se, portanto, que o tipo de exploração aqui apresentado poderá ser uma das formas que permita contribuir para a gênese de uma reflexão sobre o que sabemos e como o sabemos, sobre sua relação com os objetivos que perseguimos e a prática que efetivamos. Torna-se, assim, óbvia a necessidade de pesquisas e formação de professores que tenham como foco explícito aceder ao conhecimento especializado do professor – e desenvolvê-lo –, relativamente (i) ao sentido de número e de operação (de professores atuais ou futuros); (ii) à resolução e à formulação de problemas envolvendo a divisão; (iii) às conexões envolvendo a divisão e as demais operações, mas também outros temas matemáticos e não matemáticos (por exemplo, Medida ou a Física), de forma a conceitualizar tarefas para a formação que permitam promover o desenvolvimento de tal conhecimento e a melhoria da prática docente e das aprendizagens dos alunos.

Agradecimentos

Este texto foi produzido tomando por base uma das dimensões do trabalho desenvolvido no âmbito do projeto “Conhecimento matemático especializado do professor que ensina matemática na educação infantil e nos anos iniciais: um foco em conteúdos de Geometria”, processo número 2016/22557-5, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Referências

CARRILLO, J. et al. Determining specialized knowledge for mathematics teaching. In: CERME 8., 2013, Ankara. *Anais*... Ankara: Middle East Technical University, 2013. p.2985-2994.

CASTRO, J. P.; RODRIGUES, M. *Sentido de número e organização de dados:* textos de apoio para educadores de infância. Lisboa: ME-DGIDC, 2008.

CLEMENTS, D. H.; STEPHAN, M. Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. CLEMENTS, J.; SARAMA, J.; DI BIASE, A-M. *Engaging young children in mathematics:* Standards for early childhood mathematics education. New Jersey: LEA: D.H., 2004. p.299-317.

COONEY, T. J. Research on teacher education: In search of common ground. *Journal for Research in Mathematics Education*, v.25, p.608-636, 1994.

FOSNOT, C. T.; M. DOLK. *Young mathematicians at work:* Constructing multiplication and division. Portsmouth, NH: Heinemann, 2001.

HIEBERT, J.; GROUWS, D. The effects of classroom mathematics teaching on students’ learning. In: LESTER, F. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NCTM: Information Age Publishing, 2007, p.371-404.

JAWORSKI, B. Mathematics teacher educator learning and development In: JAWORSKI, B.; WOOD, T. (Ed.). *International handbook of mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense, 2008. v.4, p.1-13.

MARTINS, F.; RIBEIRO, C., M. Atribuir sentido aos raciocínios associados às resoluções de alunos no caso da subtração: discutindo o conhecimento de futuros professores. In: CADIMA, R. et al. (Ed.). *Livro de atas da Conferência Internacional de Investigação, Práticas e Contextos em Educação*. Leiria: ESECS, 2013. p.192-200.

MCINTOSH, A.; REYS, B. J.; REYS, R. E. A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, v.12, n.3, p.2-8, 44, 1992.

MELLONE, M. “Looking for tricks”: a natural strategy, early forerunner of algebraic thinking. In: PYTLAK, M.; ROWLAND, T. et al. (Ed.). *Proceedings of Seventh Congress of European Society for Research in Mathematics Education – CERME, 7*. Rzeszów: University of Rzeszów, CERME, 2011. p.1882-1890.

MUÑOZ-CATALAN, M. C.; LINAN, M. M.; RIBEIRO, M. Conocimiento especializado para enseñar la operación de resta en Educación Infantil. *Cadernos de Pesquisa (UFMA)*, v.24, p.4-19, 2017.

NYE, B.; KONSTANTOPOULOS, S.; HEDGES, L. V. How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis*, v.26, n.3, p.237-257, 2004.

PINTO, H.; RIBEIRO, C. M. Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos – o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas*, v.3, n.1, p.85-105, 2013.

POLICASTRO, M; ALMEIDA, A. R.; RIBEIRO, M. Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida e comprimento e sua estimativa. *Revista Plural*, s.p. (aceito), 2018.

RIBEIRO, C. M. Del cero hasta más allá del infinito – algunas perspectivas desde el comienzo de la tesis doctoral hasta el futuro 'también' a largo plazo. In: INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 17., 2013, Bilbao. *Investigación en Educación Matemática XVII*, 2013. p.85-71.

RIBEIRO, C. M. et al. Conhecimento matemático especializado do professor –discutindo um caso na formulação de problemas de divisão In: CONGRESSO NACIONAL DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES, 2. e CONGRESSO ESTADUAL PAULISTA SOBRE FORMAÇÃO DE EDUCADORES, 12., 2014, Águas de Lindoia. *Anais... 2. Congresso Nacional de Professores 12. Congresso Estadual sobre Formação de Educadores...* São Paulo: UNESP; PROGRAD, 2014. p.2058-2070. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/141656>.

RIBEIRO, C. M. Uma abordagem aos números decimais e suas operações no primeiro ciclo. A importância de uma "eficaz navegação" entre representações. *Educação e Pesquisa*, v.37, n.2, p.407-422, 2011.

RIBEIRO, C. M.; AMARAL, R. Early years prospective teachers' specialized knowledge on problem posing In: PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION CONFERENCE – PME, 39., 2015, Hobart, Australia. *Proceedings…* Hobart, Australia: PME, 2015. v.4. p.81-88.

RIBEIRO, C. M.; CARRILLO, J. Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring data analysis. In: UBUZ, B. (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Ankara, Turkey: PME, 2011. v.4, p.41-48.

RIBEIRO, C. M.; JAKOBSEN, A. Prospective teachers' mathematical knowledge of fractions and their interpretation of the part-whole representation. In: MAJ-TATSIS, B.; TATSIS, K. (Ed.). *Generalization in mathematics at all educational levels*. Reszów, Poland: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, 2012. p.289-298

RIBEIRO, C. M.; MONTEIRO. R.; CARRILLO, J. ¿Es el conocimiento matemático del profesorado específico de su profesión? Discusión de la práctica de una maestra. *Educación Matemática*, México, v.22, n.2, p.93-108, 2010.

RIBEIRO, M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Interpreting students' non standard reasoning: insights for mathematics teacher education practices. *For the Learning of Mathematics*, v.36, n.2, p.8-13, 2016.

ROWLAND, T. The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v.69, p.149-163, 2008.

SLAVIT, D. The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics*, v.37, n.3, p.251-274, 1999.

STEIN, M. K. et al. *Implementing standards-based mathematics instruction*: a casebook for professional development. 2. ed. New York: Teachers College Press, 2000.

Miguel Ribeiro – Doutor em Educação Matemática pela Universidad de Huelva (Espanha). Professor da Faculdade de Educação da UNICAMP. E-mail: cmribas78@gmail.com

Milena Policastro – Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da UNICAMP. E-mail: mitapolicastro@gmail.com

Juscier Marmoré – Mestrando do Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática (PECIM). E-mail: jjmamore@gmail.com

Rosa Di Bernardo – Doutoranda do Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática (PECIM). E-mail: rosadibernardo92@gmail.com