# UM ESTUDO DE CASO SOBRE A DIVERGÊNCIA DE RESULTADOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS

## Case study on the divergence of results in combinatorial problem solving

***Roberto Stenio A. C. de Albuquerque***
***Claus Haetinger***

## Resumo

O presente trabalho é baseado no estudo que buscou descrever a pesquisa quali-quantitativa (predominantemente qualitativa) que foi realizada na Escola Estadual de Ensino Médio Fazenda Vilanova e cujo objetivo geral consistiu em investigar – à luz da Teoria dos Modelos Mentais de Johnson-Laird (1983) – os principais fatores que podem influenciar o raciocínio combinatório dos estudantes e que, em razão disso, são capazes de levá-los a resultados divergentes dos conceitualmente esperados na resolução de problemas de contagem.

**Palavras-chave:** Raciocínio Combinatório. Divergência de Resultados. Resolução de Problemas de Contagem. Modelos Mentais. Ensino de Matemática.

## Abstract

That paper is based on the study sought to describe the qualitative (predominantly) and quantitative research which was conducted at Escola Estadual de Ensino Médio Fazenda Vilanova with the main objective to investigate, based on the Theory of Mental Models by Johnson-Laird (1983), the main factors that can influence the combinatorial thinking of students and that, as a result, may lead them to divergent results in relation to the conceptually expected solutions about the counting problem solving.

**Keywords:** Combinatorial Reasoning; Divergence of Results; Counting Problem Resolution. Mental Models. Mathematical Teaching.

## Introdução

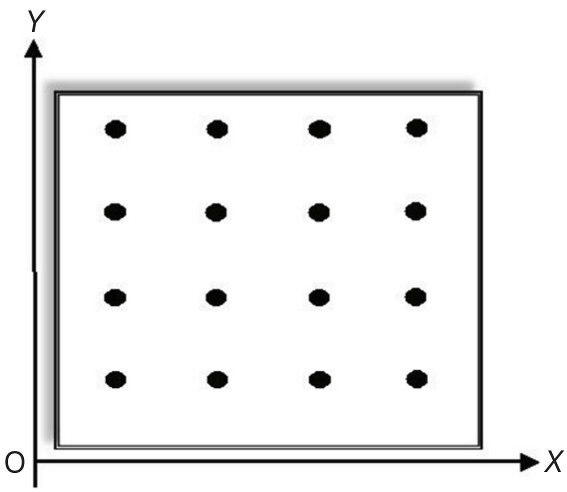
A *Análise Combinatória* (ou, simplesmente, *Combinatória*) é a parte da Matemática que se ocupa basicamente em desenvolver métodos e técnicas de contagem, que poderão servir na resolução de certos tipos de problema, especialmente, aqueles associados a quantificações, ordenações e classificações de determinados agrupamentos de elementos (MORGADO et al., 1991).

No Brasil, os estudos fundamentais da *Combinatória* comumente se iniciam no segundo ano do Ensino Médio. Nesse nível, já é possível encontrar problemas de contagem desafiadores e estimulantes. De acordo com Morgado et al. (1991) muitas questões do gênero são fáceis de enunciar e difíceis de resolver e, quase sempre, exigem resoluções criativas, engenhosas e contextuais, que vão além da utilização de técnicas combinatórias gerais e da aplicação de *fórmulas fechadas*[1] em situações padronizadas de contagem.

[1] De modo simplificado, pode-se dizer que uma *fórmula fechada* é aquela que possibilita calcular (em geral, a partir de dados fornecidos no início de um problema) diretamente os valores de determinada peça de estudo (HEFEZ, 2009).

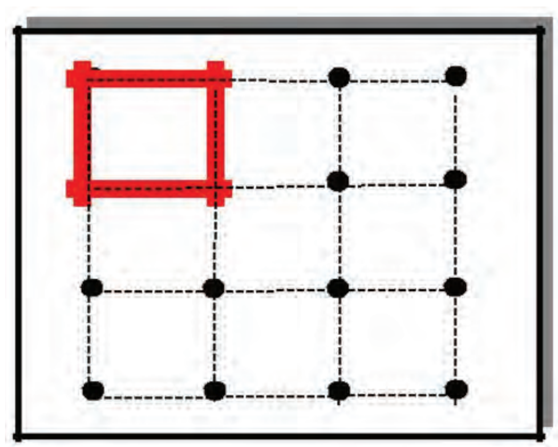
Por experiência própria em sala de aula, professores podem verificar – sem maiores objeções – que a *Combinatória* é uma das partes da Matemática mais cativantes. A matéria é sedutora pela multiplicidade de problemas atraentes e pelas envolventes construções de resoluções, que, por vezes, encantam pela elegância e consistência técnica de ideias, e noutras, surpreendem pela divergência de resultados apresentados pelos estudantes. Na Figura 1, por exemplo, ilustra-se um típico problema fundamental de contagem, cujo desafio consiste em se determinar a quantidade de quadrados que podem ser construídos com os vértices nos pontos de uma matriz de pontos *4* por *4*. Notavelmente, os estudantes fornecem soluções (*9,10,14,18,...)* que divergem do valor conceitual esperado para o problema (no caso, *20*). Comumente, por considerar apenas quadrados como o exposto na Figura 2, eles apresentam o valor 9 (inadequado) como resposta para o desafio proposto. Mais raramente, rumo a solução apropriada, extrapolam o senso geométrico comum e admitem quadrados rotacionados (FIGURAS 3 e 4).

Figura 1 – Desafio dos Quadrados



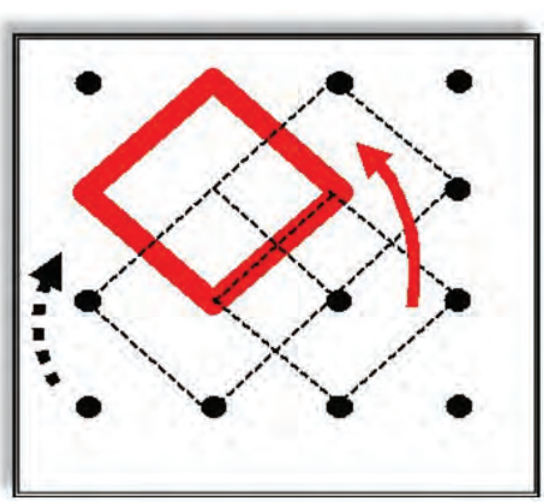

Fonte: Eureka! (2007, p.7).

Figura 2 – Quadrado em disposição geométrica trivial.



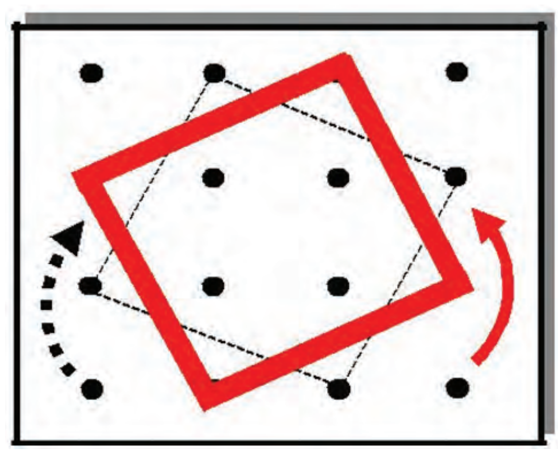
Fonte: os autores.

Figura 3 – Quadrado rotacionado de 45º em relação aos eixos usuais *OX* e *OY*.



Fonte: os autores.

Figura 4 – Quadrado rotacionado de 30º em relação aos eixos usuais *OX* e *OY*.



Fonte: os autores.

Particularmente, a resolução de problemas combinatórios (como o exemplificado acima) é provocante por ser capaz de gerar, sob a influência de raciocínios simples, certa variedade de soluções matemáticas divergentes. Buscando-se, pois, identificar os principais fatores que possibilitam essa diferenciação de resultados, instituiu-se – no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário UNIVATES – **uma investigação no Ensino Médio sobre o raciocínio combinatório e a divergência de resultados na resolução de problemas de contagem.**

## Pressupostos teóricos

A partir do estabelecimento do tema de estudo, formulou-se o problema (a), a hipótese (b) e o objetivo geral de pesquisa (c):

**(a) Problema:** "Quais os principais fatores que podem influenciar e, assim, induzir o raciocínio combinatório dos estudantes de Ensino Médio para resultados divergentes dos conceitualmente esperados na resolução de problemas de contagem?"

**(b) Hipótese:** "Construções de modelos mentais inadequados (obtidos a partir do conhecimento prévio ou por concepções alternativas) podem influenciar e, assim, induzir o raciocínio combinatório dos estudantes de Ensino Médio para resultados divergentes dos conceitualmente esperados na resolução de problemas de contagem".

**(c) Objetivo geral:** "investigar – à luz da Teoria dos Modelos Mentais de Johnson-Laird (1983) – os principais fatores que podem influenciar o raciocínio combinatório e que, em razão disso, podem levar o pensamento dos estudantes de nível médio a resultados divergentes dos conceitualmente esperados na resolução de problemas de contagem"

A hipótese levantada em (b) para responder (a) é bastante plausível, visto que, no âmbito da *Teoria de Modelos Mentais de Johnson-Laird (1983)*, as pessoas pensam por meio de *modelos mentais*[2] e, segundo Vega et al. (1996), tendem a raciocinar de modo a obterem conclusões que se enquadrem à luz dos seus conhecimentos anteriores, mesmo que essas conclusões sejam inválidas. Caso sejam obtidos resultados que não se encaixem aos conhecimentos prévios das pessoas, elas tenderão a negar esses resultados a partir de argumentos baseados em *concepções alternativas*. Pode-se, pois, interpretar uma *concepção alternativa* como sendo um *modelo mental* que não leva a conclusões cientificamente válidas, mas que atende os interesses de seus construtores (GARCIA, 2000).

De acordo com Moreira (1999), os *modelos mentais* que os estudantes trazem para o contexto educacional devem ser levados em conta pelo professor, visto que, exercem influência no ensino e na aprendizagem. Almeida et al. (2000, p.31) afirmam que "muitas das dificuldades enfrentadas pelos estudantes decorrem de suas concepções alternativas, comumente inadequadas, que os induzem a não aceitarem estruturas diferentes das por eles conhecidas". Ainda, de acordo com Almeida et al. (2000, p.33) "As interferências e ruídos existentes na comunicação entre o mundo externo e o interno do indivíduo podem provocar distorções nos modelos mentais formados (...)". Por isso, os professores devem ficar atentos nas instruções, para saber se de fato as informações e os conhecimentos repassados foram assimilados de modo adequado pelos estudantes.

Observe o leitor, que o trabalho de pesquisa empreendido, tomou a *Teoria dos Modelos Mentais* de Johnson-Laird (1983) como principal referencial teórico, levando em consideração a compatibilidade dessa teoria com a visão *cognitivista* (focada no *construtivismo*) e o seu alcance para explicar por meio de *modelos mentais* como as pessoas raciocinam e realizam inferências a partir de sentenças escritas. Segundo Johnson-Laird (1983), os *modelos mentais* explicam uma maior diversidade de situações (inclusive as relacionadas com a resolução de problemas) que não são amplamente tratadas (sob previsões e erros dos sujeitos) no âmbito das *teorias de raciocínio*

[2] *Modelos mentais* são representações internas de objetos, situações ou eventos do mundo exterior (real ou fictício). Eles podem ser encarados como *modelos de trabalho*, que, predizem e explicam a ocorrência e sucessão de acontecimentos externos. Não precisam ser lógicos, nem representar fielmente os objetos que simbolizam. Aliás, não têm qualquer obrigação de serem "verdadeiros" ou "falsos", simplesmente, devem ser funcionais e confiáveis o suficiente para atender as expectativas de seus construtores, pois, caso contrário, poderão ser indefinidamente revistos (MOREIRA, 1999).

estritamente *proposicionais* (que modelam, de modo geral, o pensamento científico e matemático a partir da Lógica Formal).

## A resolução de problemas no ensino das ciências e matemática

Apresenta-se aqui uma revisão na literatura de alguns trabalhos de pesquisa associados com a Resolução de Problemas (RP) na área do Ensino das Ciências e Matemática. A análise ocorreu nas comunicações que foram publicadas nos anais de expoentes eventos acadêmicos: XV Encontro Nacional de Ensino de Química – ENEQ (2010); VII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências – ENPEC (2009); XI Encontro de Pesquisa em Ensino de Física – EPEF (2008); IX Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM (2007).

O XV ENEQ foi organizado pela Divisão de Ensino de Química da Sociedade Brasileira de Química (SBQ). O evento ocorreu em Brasília – DF, no período de 21 a 24 de Julho de 2010, norteado pelo tema “A formação do Professor de Química e os desafios da sala de aula”. De acordo com os anais do evento, o encontro contou com mais de *1.700* inscritos, cerca de *300* trabalhos completos e *500* resumos. Basicamente, o evento teve *01* Conferência Conjunta de Abertura, *24* Minicursos, *24* Temas de Debates, II MOMADIQ (Mostra de Materiais Didáticos de Química), *08* Palestras Conjuntas, cerca de *220* Comunicações Orais (CO) e uma Plenária de Encerramento.

O VII ENPEC foi promovido pela Associação Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências (ABRAPEC). O evento ocorreu em Florianópolis – SC, no período de 08 a 13 de Novembro de 2009. Sob o tema “Ciência, Cultura e Cidadania”, o encontro reuniu pesquisadores da área de Educação em Ciências com a finalidade de discutir recentes trabalhos de pesquisa e tratar de temas de interesse da ABRAPEC. Sob o tema “Ciência, Cultura e Cidadania”, o encontro reuniu pesquisadores da área de Educação em Ciências com a finalidade de discutir recentes trabalhos de pesquisa e tratar de temas de interesse da ABRAPEC. Ocorreu no evento *02* conferências, *27* mesas redondas, *80* sessões orais – cerca de *370* Comunicações Orais (CO), *15* sessões de painéis, *08* cursos e efetivamente *533* trabalhos completos publicados nos anais.

O XI EPEF foi organizado pela Sociedade Brasileira de Física (SBF) em colaboração com a Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) e com a universidade Federal do Paraná (UFPR); realizou-se nas dependências do Campus Curitiba da UTFPR, entre os dias 21 e 24 de Outubro de 2008. O evento teve como tema norteador “A Pesquisa em Ensino de Física e a Sala de Aula: Articulações Necessárias” e contou com *181* inscritos, teve *02* Conferências (uma de abertura), *06* Mesas Redondas (MR), *123* Comunicações Orais (CO) e *46* Pôsteres (PO).

O IX ENEM foi organizado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). O evento foi realizado em Belo Horizonte – MG, no período de 18 a 21 de julho de 2007, sob a temática “Diálogos entre a Pesquisa e a Prátic Educativa”. O encontro apresentou *02* Conferências (abertura e encerramento), *15* Palestras (PA), *17* Mesas Redondas (MR), *119* Comunicações Científicas (CC) e outras modalidades de apresentação de trabalhos, como Minicursos, Relatos de Experiência e Pôsteres.

Ao analisar as comunicações nos anais desses eventos, constatou-se:

- **XV ENEQ:** *04* ocorrências da Resolução de Problemas (RP) em *212* Comunicações Orais (CO). O que conduz a uma Taxa de Ocorrência da Resolução de Problemas (relativas à CO do referido evento) em torno de *1,9 %* (≈ *04/212*). Além disso, foram observados genericamente os seguintes aportes teóricos: Gil Pérez (1994 e 2006); Goi e Santos (2009); Pozo e Crespo (1998); Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (1998).
- **XI EPEF:** *05* ocorrências da Resolução de Problemas (RP) em *123* Comunicações Orais (CO). O que conduz a uma Taxa de Ocorrência da Resolução de Problemas (relativas à CO do referido evento) em torno de *4,0%* (≈ *05/123*). Além disso, foram observados genericamente os seguintes aportes teóricos: Gil Pérez e Martinez Torregrosa (1992); Lopes (2004); Pozo (1998); Lopes e Costa (1996); Polya (1995); Parâmetros Curriculares Nacionais– PCNs (1998).
- **VII ENPEC:** *05* ocorrências da Resolução de Problemas (RP) em cerca de *370* Comunicações Orais (CO). O que conduz

a uma Taxa de Ocorrência da Resolução de Problemas (relativas à CO do referido evento) em torno de *1,4 %* (≈ *05/370*). Além disso, foram observados genericamente os seguintes aportes teóricos: Gil Pérez et all (1988); Peduzzi (1997); Pozo & Crespo (1998); Clement (2004).

- **IX ENEM:** *31* ocorrências da Resolução de Problemas (RP) em *119* Comunicações Científicas (CC); resultado que, conduz a uma Taxa de Ocorrência da Resolução de Problemas (relativas à CC do referido evento) em torno de *26,1%* (≈ *31/119*). Além disso, foram observados genericamente os seguintes aportes teóricos: Douady (1987); Vergnaud (1983); Douady & Perrin-Glorian (1989); Lima (1995); Baltar (1996); Bellemain & Lima (2001); Barbosa (2002); Duarte (2002); Lopes, (1996); Valente (1998); Oliveira (2001); Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (1998).

Considerando-se as *45* ocorrências da *Resolução de Problemas* (RP) e as *824* comunicações apresentadas nos eventos citados, observa-se destacadamente a supremacia da temática RP no IX ENEM (em relação aos demais eventos selecionados). Confira os dados apresentados na Tabela 1.

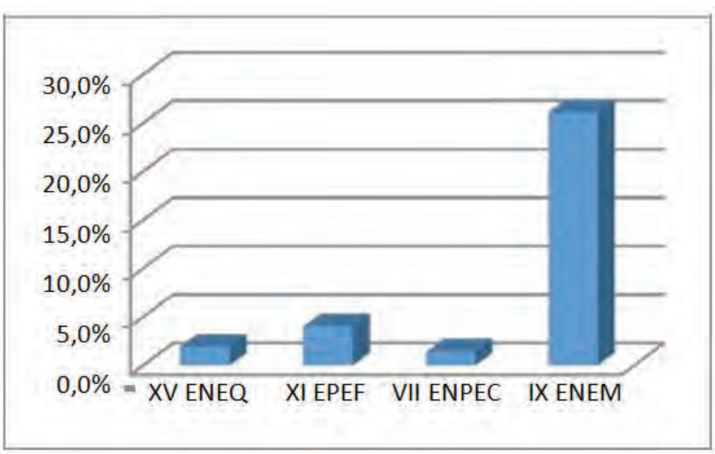
Para ter-se uma ideia visual da Taxa de Ocorrência da Resolução de Problemas (%) por Eventos, basta o leitor observar o Gráfico 1.

Tabela 1 – Algumas estatísticas acerca da Resolução de Problemas.

| Eventos | Ocorrências RP | Comunicações | Taxas de ocorrências RP |
|---|---|---|---|
| XV ENEQ | 04 | 212 | 1,9 % |
| XI EPEF | 05 | 123 | 4,0 % |
| VII ENPEC | 05 | 370 | 1,4% |
| IX ENEM | 31 | 119 | 26,1% |
| Total | 45 | 824 | 5,4 % |

Fonte: a pesquisa.

Gráfico 1 – Taxa de Ocorrência da Resolução de Problemas (%) por Eventos.




Fonte: os autores.

Outra constatação interessante, obtida da revisão de literatura, foi à ausência de comunicações que tratassem diretamente da *resolução de problemas* associada com *modelos mentais*. Sob o ponto de vista de Johnson-Laird (1983), os *modelos mentais* são fundamentais para o entendimento da cognição humana. E, por sua vez, o ato humano de compreender o mundo e de resolver os problemas que nele ocorrem é uma das molas propulsoras do conhecimento científico e matemático. Com efeito, era de se esperar um número razoável de comunicações que envolvessem a *resolução de problemas* e o estudo dos *modelos mentais*. Mas, isso não se evidenciou nas análises realizadas.

No mais, da Tabela 2, pode-se concluir que, das interpretações consideradas para a resolução de problemas, a dimensão *processual* e *metodológica de ensino* foram as que mais se destacaram nos trabalhos analisados (respectivamente, *35* e *24* ocorrências de *45* comunicações). Em contrapartida, a resolução de problemas como *meta* foi a menos expressiva (apenas *5* ocorrências de *45* comunicações). Veja a categorização[3] das ocorrências da resolução de problemas nos eventos selecionados (TABELA 2):

Tabela 2 – Interpretações da Resolução de Problemas por Eventos.

| | Ocorrências da resolução de problemas (45) | | | |
|---|---|---|---|---|
| Eventos | Metas | Processos | Hab. Básicas | Metod. De Ensino |
| XV ENEQ | - | 2 | 4 | 4 |
| XI EPEF | 1 | 5 | 5 | 4 |
| VII ENPEC | - | 3 | 3 | 4 |
| IX ENEM | 4 | 25 | 7 | 12 |
| Total | 5 | 35 | 19 | 24 |

Fonte: os autores.

Considerando, portanto, as análises das comunicações dos eventos selecionados, observou-se uma expressiva tendência de se trabalhar, no âmbito do Ensino das Ciências e Matemática, a *resolução de problemas* como *processo* e *metodologia de ensino* (sem conexão com *modelos mentais*).

## O contexto da pesquisa

A pesquisa quali-quantitativa (predominantemente qualitativa) foi realizada em 2012, sob o enfoque de estudo de caso, sendo desenvolvida em duas turmas de 2º Ano da Escola Estadual de Ensino Médio Fazenda Vilanova (EEEMFV), localizada na Av. Rio Grande do Sul, nº 222, Centro, Fazenda Vilanova/RS. O referido município é um dos integrantes da região do Vale do Taquari e, de acordo com o Decreto-Lei Estadual nº 10.642 (1995), emancipou-se de Bom Retiro do Sul em 28 de dezembro de 1995, sendo instalado, conforme previsto na Lei, em 1º de Janeiro de 1997.

Segundo informações da Diretora Claisse Bilhar (a época da pesquisa), a Escola possibilita o acolhimento de estudantes provenientes de municípios vizinhos (Paverama, Taquari, Bom Retiro do Sul e Estrela); e dispõe de transporte escolar (até a sede da instituição) para os estudantes do interior do Município de Fazenda Vilanova. A Escola funciona nos turnos da tarde e noite, contando com um grupo de *13* professores e *4* funcionárias (FARIAS, 2012). A pesquisa de campo foi iniciada em setembro de 2012 com as duas únicas turmas (ambas noturnas) de 2º Ano (de modo voluntário, participaram da pesquisa ao todo *37* estudantes e *2* professoras de mate-

[3] As categorias da resolução de problemas aqui estabelecidas (extensivamente para as Ciências e Matemática) foram baseadas nas exposições feitas por Branca (1997, p.04) e Dante (2009, p.14 e p.15) sobre o assunto.

mática). De acordo a Direção da Escola, no início do ano de 2012, as duas turmas apresentavam *27* estudantes. Mas, ocorreram "abandonos", de maneira que, em setembro de 2012, a distribuição dos estudantes era (inclusive percentual)[4]:

a) **Turma 201** (faixa etária de *15* a *17* anos): *26* estudantes em curso regular (*96%*); *1* desistente ou evadido (*4%*).
b) **Turma 202** (faixa etária de *15* a *47* anos): *21* estudantes em curso regular (*78%*); *6* desistentes ou evadidos (*22%*).

No início de 2013, já passado o ano letivo de 2012, foram obtidos novos dados (junto a Direção da Escola) sobre a distribuição dos estudantes investigados. De maneira que, obtiveram-se os seguintes resultados:

a) **Turma 201** (faixa etária de *15 a 17* anos): *23* estudantes aprovados (*85%*); *1* desistente ou evadido (*4%*); *3* reprovados (*11%*).
b) **Turma 202** (faixa etária de *15* a *47* anos): *16* estudantes aprovados (*59%*); *11* desistentes ou evadidos (*41%*); *0* reprovados (0%).

Destacadamente, na Turma 201, a taxa de desistência ou evasão se manteve constante e bem controlada, na casa dos *4%* (*1* de *27*); e mesmo com reprovações ao final do ano (dezembro de 2012), em torno de *11%* (*3* de *27),* a Turma 201 atingiu rendimento de aprovação de *85%* (*23* de *27*) – superior ao da média de *70,4%* (tomada como referencial) registrada pelo Censo Escolar 2012. Por outro lado, na Turma 202, ocorreram, em setembro e dezembro de 2012, elevadas taxas de desistência ou evasão [no caso, respectivamente, 22% (*6* de *27*) e 41% (*11* de *27*)] quando comparadas à média de *11,7%* (tomada como referencial) da taxa de abandono registrada pelo Censo Escolar 2012.

Outro ponto que merece comentários, diz respeito a amplitude da faixa etária dos estudantes. Na Turma 201, essa faixa é de 2 anos (*17-15=2*), enquanto que, na Turma 202, é de 32 anos (*47-15 =32*). Potencialmente, esses resultados numéricos sugerem uma maior taxa de distorção idade-série entre os estudantes da Turma 202. Segundo a professora de matemática da Turma 2, formou-se, desde o início do ano, um grupo de estudantes com idades bem diversificadas, sendo boa parte deles (empregados no comércio local, especialmente, em pequenas lojas e fábricas de calçados), considerados fora da faixa etária adequada para o 2º Ano do Ensino Médio.

O leitor deve estar se perguntando "se a desistência ou evasão dos estudantes na Turma 202 está relacionada de alguma forma com uma potencial taxa de distorção idade-série ou com a vida profissional desses estudantes". Um estudo aprofundado sob tal questionamento foge obviamente ao escopo do desenvolvimento deste trabalho. Mas, uma breve reflexão sobre o tema pode e deve ser feita, especialmente, tendo em vista a importância do assunto para a área educacional. É razoável supor que estudantes de turmas noturnas com idades fora da faixa etária adequada ou que exerçam alguma atividade profissional sejam candidatos potenciais a desistir ou evadir da Escola.

Nascimento e Kempa (2008), por exemplo, realizaram uma pesquisa numa Escola Pública do Paraná e os resultados obtidos mostraram que *45%* dos estudantes de Ensino Médio pesquisados já tinham abandonado os estudos em alguma época; e que desses estudantes, *39 %* deixaram de prosseguir os estudos devido a alguma atividade profissional. Além disso, foi observado que *42%* do total de estudantes entrevistados estavam fora da faixa etária escolar. De acordo com esses autores, estudantes com trajetórias de desistências ou evasões fazem parte do grupo de risco de abandono escolar permanente.

Outro estudo interessante realizado no Ensino Médio de Escolas Estaduais do RS aponta para a relação da distorção idade-série (defasagem) com a reprovação e o abandono escolar. FRITSCH et al. (2013, p.14 e p.15), afirmam:

> Quando em defasagem idade-série os estudantes têm maiores taxas de reprovação e abandono escolar, retroalimentando o fracasso escolar. Outro fato observado é que se conjugar a informação de que os estudantes estejam em condição de defasagem idade-série com estudarem no noturno, os resultados dos indicadores tendem a piorar, na comparação com estudantes em outras condições.

Observe o leitor, que no caso da Turma 202 a desistência ou evasão pode ter ocorrido nos mesmos moldes dos verificados pelos estudos de Nascimento e Kempa (2008). A taxa de desistência ou evasão obtida na Turma 202 é de

[4] Embora se saiba que para amostras pequenas os valores em taxas percentuais não fazem sentido, utilizaremos esta representação (%) quando for conveniente para facilitar a leitura e compreensão dos dados expostos.

*41 %*, bem próxima da encontrada pelo estudo de Nascimento e Kempa (2008), isto é, *45%.*

## Metodologia de pesquisa

Neste tópico serão apresentados alguns métodos e procedimentos que foram utilizados para o desenvolvimento da pesquisa. Segundo Stenhouse (1975), as pesquisas pedagógicas devem ser trabalhadas a partir de "estudos de caso", de modo sistemático e metódico, com a coleta e análise rigorosa de dados de sala de aula, visando proporcionar estudos bem fundamentados e amplas investigações, que de fato venham esclarecer e contribuir com o ensino e a aprendizagem que são praticados nessas salas de aula.

Afirmam Sampiere, Collado e Lucio (2006, p.275), que um estudo de caso

> "deve ser tratado com um enfoque misto para obter maior riqueza de informação e conhecimento sobre ele. O caso deve ser tratado com profundidade, buscando o completo entendimento de sua natureza, suas circunstâncias, seu contexto e suas características".

Com efeito, foi adotado na pesquisa o enfoque quali-quantitativo (misto), com predominância qualitativa. É importante frisar que, optou-se por realizar um trabalho investigativo dentro da perspectiva quali-quantitativa, devido à possibilidade de obtenção de informações mais enriquecedoras, provenientes de uma acurada análise de dados com corte qualitativo e quantitativo. Com relação à predominância da abordagem qualitativa no referido estudo, esta se deu, principalmente, pela forma de interpretação dos dados e da utilização de típicos métodos de investigação (como, por exemplo, aplicação de testes e questionários), empregados amplamente sob o foco qualitativo, conforme sugerido por Silverman (2009).

Notavelmente, o estudo aqui exposto não tem a pretensão de realizar deduções gerais (obtidas a partir do emprego de ferramentas probabilísticas e estatísticas inferenciais), mas, simplesmente, analisar e extrair dados (inclusive numéricos) de um determinado grupo de estudantes, o que se processa muito bem dentro de um contexto qualitativo (ou predominantemente qualitativo) de investigação (com dados organizados em categorias e expostos por intermédio de tabelas e gráficos descritivos).

Basicamente, de um total de 37 estudantes participantes (voluntários) da pesquisa, 23 responderam na Escola a dois testes de sondagem (Teste 1 em out. de 2012; Teste 2 em dez. de 2012) e, desses 23, 13 responderam a um breve questionário com 4 perguntas abertas sobre os desafios dos testes. Além disso, duas professoras de Matemática (das turmas de estudantes investigadas), colaboraram com a pesquisa por meio da concessão de uma entrevista e do preenchimento de um de questionário com 9 perguntas abertas sobre suas atividades docentes e pedagógicas.

Os resultados obtidos nas resoluções dos problemas dos dois testes de sondagem foram detalhadamente tabelados (com problemas agrupados em certas categorias) e representados sinteticamente por meio de gráficos de setores, sendo cruciais para o desenvolvimento e conclusão da pesquisa realizada. Assim sendo, neste trabalho, serão explorados essencialmente os resultados desses dois testes de sondagem, cujos problemas propostos são respectivamente idênticos.

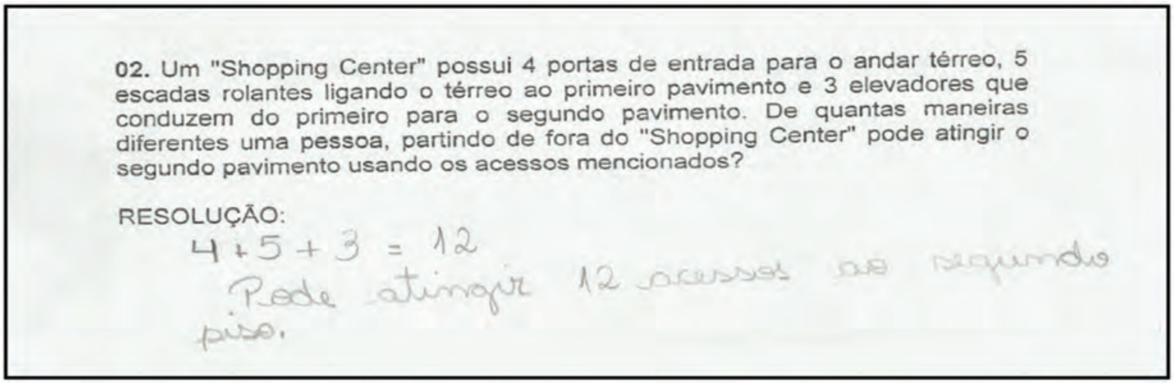
Ao resolver os problemas do Teste 1, os estudantes teriam que descartar um *problema sem ilustrações* (ou seja, deveriam eliminar um problema de 1 a 3) e descartar um *problema com ilustração* (ou seja, eliminar o problema 4 ou 5). Essa medida de descarte de problemas foi tomada devido ao tempo reduzido (45 min.) disponibilizado pela Escola para a realização do Teste 1 (o Teste 2 contou com 1h 30 min). Entretanto, a separação dos problemas em grupos de *sem ilustrações* e *com ilustrações* tem uma razão de ser, pois, dessa maneira, poderá ser realizada uma investigação posterior acerca da influência ou não dessas ilustrações (imagens) na resolução dos problemas de contagem propostos. Note que, a partir do descarte de problemas por grupo, todo estudante que realizou o Teste 1 resolveu obrigatoriamente um *problema com ilustração*. Além disso, os problemas propostos nos dois testes foram escolhidos de maneira a poderem ser resolvidos por operações aritméticas fundamentais (adição e multiplicação) e suas inversas (respectivamente, subtração e divisão) com números inteiros. O Teste 1 foi realizado em out. de 2012 e o Teste 2 em dez. de 2012. No Teste 2, os estudantes deveriam resolver todos os *5* problemas propostos, visto que tinha mais tempo (*1h e 30 min.*) do que no Teste 1 (*45 min.*).

No tópico seguinte, serão apresentados as análises e os resultados obtidos a partir da aplicação dos dois testes de sondagem.

## Análises e resultados

Conforme mencionado anteriormente, os resultados obtidos nas resoluções dos problemas dos dois testes de sondagem foram detalhadamente tabelados e expostos em gráficos de setores. De maneira que, verificou-se uma maior *divergência* de resultados em relação a *compatibilidade* das respostas fornecidas pelos estudantes aos dois testes. Observe o leitor, que nem sempre o conhecimento prévio levará a construção de *modelos mentais* de contagens adequados e, por conseguinte, a raciocínios combinatórios conceitualmente aceitáveis. Por exemplo, na resolução do problema 2 do Teste 1, constatou-se que *4* de *11* estudantes (cerca de *36%*) do 2º Ano do Ensino Médio aplicaram (de modo inadequado) a *Regra de Adição* (FIGURA 5) em vez da *Regra de Multiplicação* (FIGURA 6) [note-se que, ambas regras foram introduzidas no Ensino Fundamental].

Figura 5 – Resolução do Problema 2 do Teste 1 realizada pelo Estudante 6.


02. Um "Shopping Center" possui 4 portas de entrada para o andar térreo, 5 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro pavimento e 3 elevadores que conduzem do primeiro para o segundo pavimento. De quantas maneiras diferentes uma pessoa, partindo de fora do "Shopping Center" pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados?

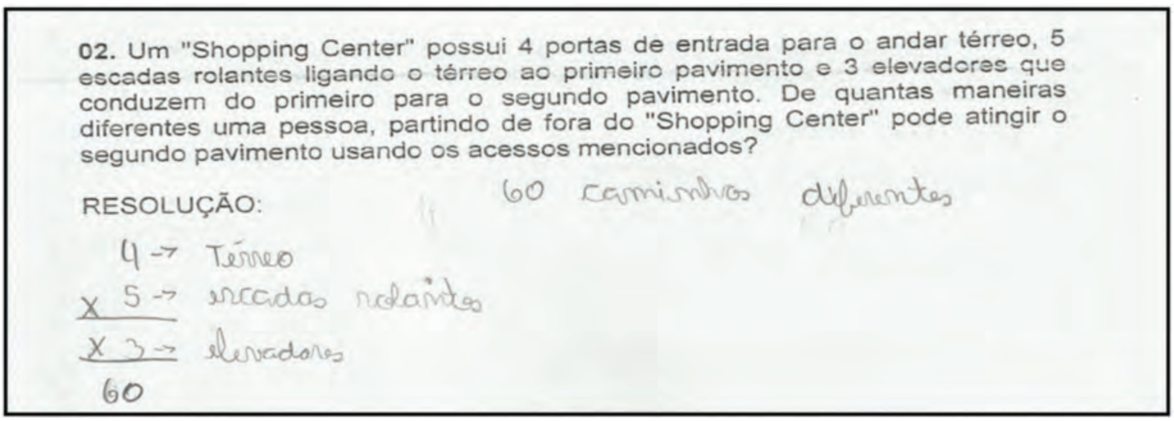
RESOLUÇÃO:

4 + 5 + 3 = 12

Pode atingir 12 acessos ao segundo piso.

Fonte: os autores.

Figura 6 – Resolução do Problema 2 do Teste 1 realizada pelo Estudante 9.


02. Um "Shopping Center" possui 4 portas de entrada para o andar térreo, 5 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro pavimento e 3 elevadores que conduzem do primeiro para o segundo pavimento. De quantas maneiras diferentes uma pessoa, partindo de fora do "Shopping Center" pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados?

RESOLUÇÃO: 60 caminhos diferentes

4 → Terreo

x 5 → escadas rolantes

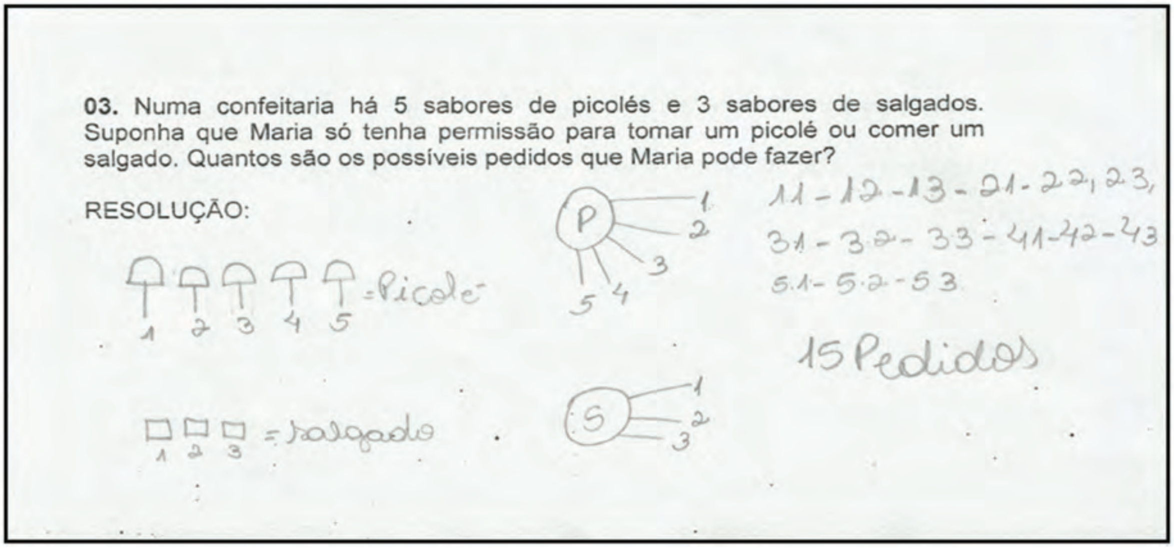
x 3 → elevadores

60

Fonte: os autores.

O processo inverso também foi constatado na resolução do problema 3, no qual *2* estudantes de *14* (cerca de *14%*) aplicaram a *Regra de Multiplicação* (FIGURA 7) em vez da *Regra de Adição* (FIGURA 8).

Figura 7 – Resolução do Problema 3 do Teste 1 realizada pelo Estudante 28.


03. Numa confeitaria há 5 sabores de picolés e 3 sabores de salgados. Suponha que Maria só tenha permissão para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer?

RESOLUÇÃO:

= Picolé

1 2 3 4 5

P 1 2 3 4 5

11 - 12 - 13 - 21 - 22, 23, 31 - 32 - 33 - 41 - 42 - 43 51 - 52 - 53

15 Pedidos

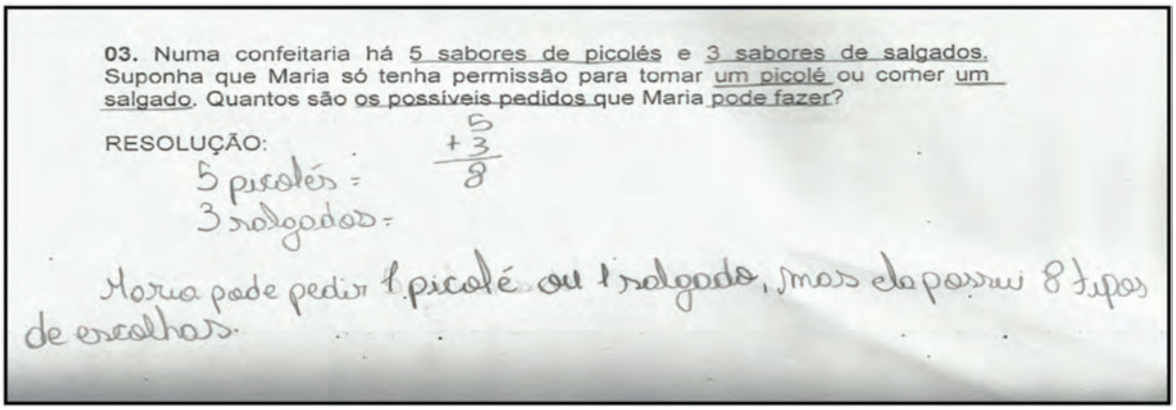
= salgado

1 2 3

S 1 2 3

Fonte: a pesquisa.

Figura 8 – Resolução do Problema 3 do Teste 1 realizada pelo Estudante 1.


03. Numa confeitaria há 5 sabores de picolés e 3 sabores de salgados. Suponha que Maria só tenha permissão para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer?

RESOLUÇÃO:

5 picolés =

3 salgados =

$5 + 3 = 8$

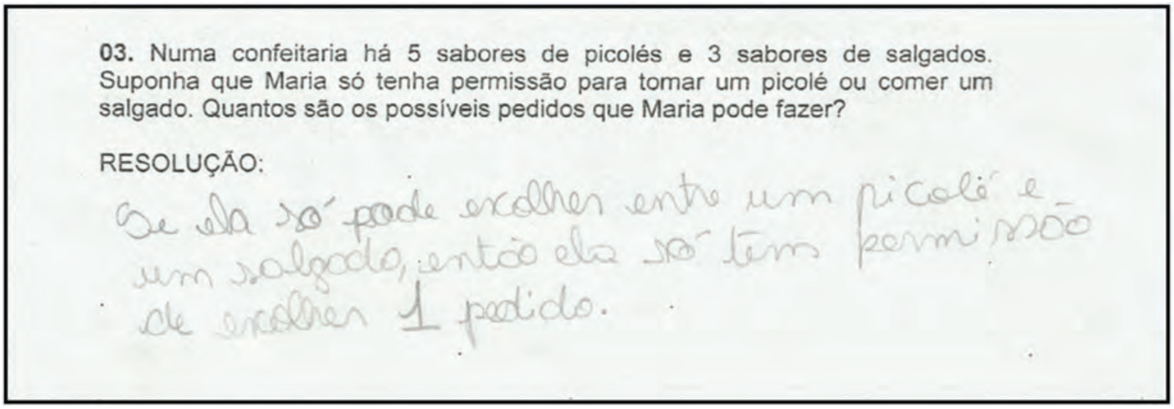
Maria pode pedir 1 picolé ou 1 salgado, mas ela possui 8 tipos de escolhas.

Fonte: a pesquisa.

Outros estudantes, no caso *8* de *14* (em torno de *57%*), “resolveram” o Problema 3 por meio de *concepções alternativas* (mais precisamente pelo emprego de *proposições* associadas a *modelos mentais* que subjazem a *universos de raciocínio alternativos*)[5], chegando ao resultado *1* em vez da solução *8* (= *5* + *3*). No caso em tela, verificou-se que os estudantes conceberam essas *proposições* (FIGURA 9) a partir do discurso, idealizando ao final de tudo uma situação (*imagem*) inadequada, na qual Maria consome apenas **um único lanche** (ou um picolé ou um salgado) – note que, por pensar assim, os estudantes forneceram inadequadamente a resposta 1 para o problema.

[5] De acordo com Johnson-Laird (1983), *proposições* só têm valor lógico (V ou F) quando interpretadas frente a *modelos mentais*, os quais – na opinião do autor desta Dissertação – apontam comumente para resultados inadequados quando subjazem a *universos de raciocínio alternativos*, conforme se pode verificar na resolução exposta na Figura 9.

Figura 9 – Resolução do Problema 3 do Teste 1 realizada pelo Estudante 7.



**03.** Numa confeitaria há 5 sabores de picolés e 3 sabores de salgados. Suponha que Maria só tenha permissão para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer?

RESOLUÇÃO:

Se ela só pode escolher entre um picolé e um salgado, então ela só tem permissão de escolher 1 pedido.

Fonte: a pesquisa.

Observando-se, agora, o grupo dos *problemas com ilustrações*, a preferência dos estudantes recaiu no problema 4 (FIGURA 10), uma questão mais sofisticada que exige raciocínios combinatórios mais elaborados em sua resolução. De fato, resolver o Problema 4 é relativamente mais difícil do que resolver os Problemas 1, 2 e 3 (que constam no Teste 1). Tradicionalmente, a questão é resolvida por meio da utilização de *combinações*[6].

Apesar das tentativas de solução empreendidas pelos estudantes, nenhum deles chegou à resposta conceitualmente esperada para o Problema 4 (ou seja, *31*). De modo geral, os estudantes chegaram a resultados divergentes do esperado, por meio da construção de *modelos mentais* inadequados, tomados a partir de *universos de raciocínio alternativos*[7]. Um procedimento resolutivo comumente empregado no problema 4 foi a utilização de contagens diretas de triângulos quaisquer (algumas vezes chamado de "pirâmides" pelos estudantes), conforme se pode verificar ilustrativamente na Figura 10:

Da mesma forma que no Problema 4, constatou-se no Problema 5 (FIGURA 11) soluções alternativas de contagem (mas sem atingir a resposta *41* esperada):

As ligações ***RZ*** **(*1*)** e ***SZ*** **(2)** (FIGURA 11) – essenciais para a resolução do Problema 5 – são completamente ignoradas pelo Estudante 24. Provavelmente, na ocasião do Teste 1, o Estudante 24 desconsiderou essas ***3*** **(= *1* + 2)** ligações por elas estarem além do seu *universo de raciocínio combinatório.* Uma maneira de se atingir adequadamente o valor conceitual no Problema 5 (no caso *41*) seria calcular de modo conveniente o somatório do número de ligações distintas em trechos do diagrama proposto (de X até Z). De fato, considerando os trechos *X**RZ*** (*3.**1*** = *3*), *XYZ (1.2 =2), XRYZ (3.3.2 =18), XSYZ (3.2.2 =12), X**SZ** (3.**2** =6)*, verifica-se que ***3****+2+18+12+****6*** *= 41,* onde ***RZ*** **(1)** e ***SZ (2)*** são indispensáveis na composição quantitativa do *X**RZ** (3.**1** = 3*) e do *X**SZ** (3.**2** =6)*.

Observando-se uma segunda série de dados, percebe-se claramente a instabilidade dos *modelos mentais* construídos[8] pelos estudantes para resolver os problemas dados no Teste 1. De fato, no Teste 2, os estudantes reformularam suas respostas em relação as fornecidas no Teste 1. Para perceber melhor essas mudanças de resultados, observe as resoluções de problemas dadas no Teste 2 (FIGURAS 12 a 18):

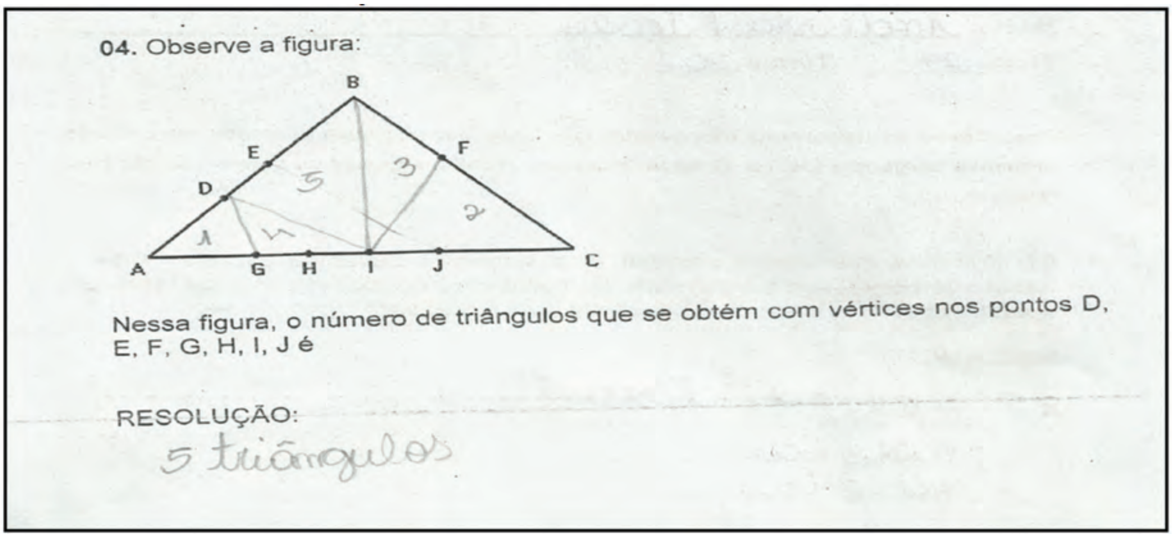
---

[6] "Seja M um conjunto com m elementos, isto é, M = {a1,a2,a3,...,am}. Chamamos de combinações dos m elementos, tomados r a r, aos subconjuntos de M constituídos de r elementos. (...) É importante notar a diferença entre uma

[7] Note que o triângulo ADG foi contabilizado na solução do problema 4, mesmo sendo formado (além de D e G) pelo vértice A. Observe o leitor, que a construção e admissão desse modelo de triângulo foge ao *universo de raciocínio combinatório* estabelecido (subtendido) originalmente no problema em questão, pelo qual a contagem deveria se processar apenas no conjunto dos triângulos de vértices D,E,F,G,H,I,J.

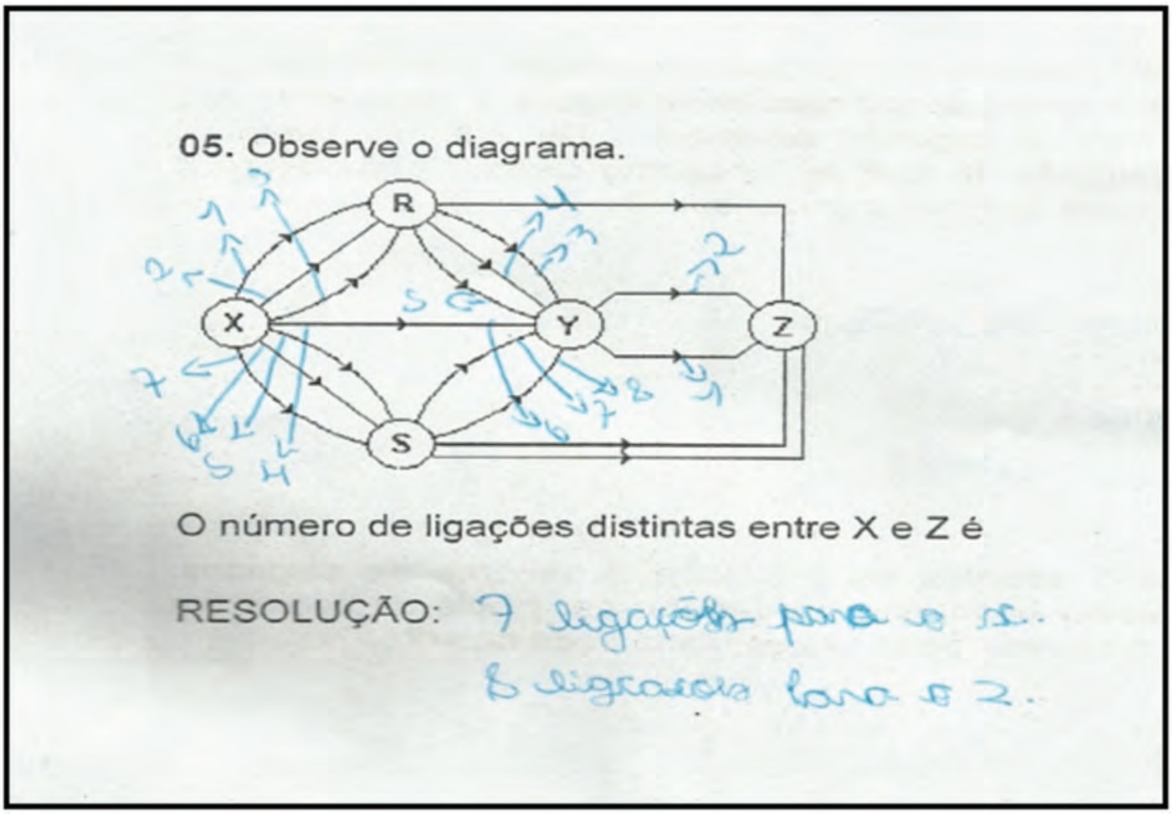
[8] De acordo com Gentner e Stevens (1983), os *modelos mentais* são instáveis. Pessoas esquecem detalhes dos modelos construídos quando estes não são utilizados por certo tempo.

Figura 10 – Resolução do Problema 4 do Teste 1 realizada pelo Estudante 28.



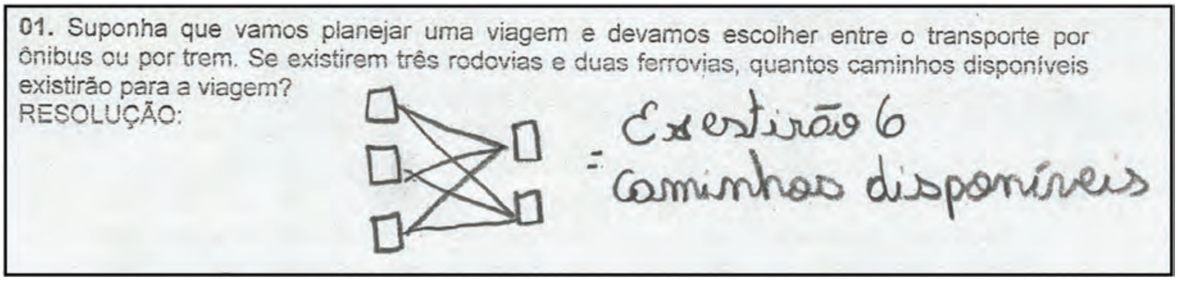

Fonte: a pesquisa.

Figura 11 – Resolução do Problema 5 do Teste 1 realizada pelo Estudante 24.




Fonte: a pesquisa.

Figura 12 – Resolução do Problema 1 do Teste 2 realizada pelo Estudante 1.




Fonte: a pesquisa.

Notavelmente, a resolução exposta na Figura 12 não é adequada, pois, deveria ser aplicada a *Regra de Adição*, conforme feito no Teste 1. A mudança de postura do Estudante 1 frente ao Problema 1 do Teste 2 ocorreu justamente após o estudo combinatório formal da *Regra de Multiplicação da Contagem* na EEEMFV. Possivelmente, a tradicional ênfase dada no Ensino Médio ao emprego da regra multiplicativa[9] sugestionou (de modo impróprio) *6* de *9* estudantes (em especial, o *1*) – cerca de *67%* – a utilizarem essa regra indiscriminadamente, fazendo-os inclusive abandonar certos *modelos mentais* adequados (aditivos) construídos anteriormente para solucionar o problema em questão.

Contudo, apesar do emprego impróprio da *Regra de Multiplicação* exposto na Figura 12, é importante notar que o estudo combinatório desta regra na EEEMFV [12] reverteu determinado quadro de divergência verificado na resolução do Problema 2 do Teste 1. Verifica-se, por exemplo, que todos os *4* estudantes que responderam *12 (= 4 + 5 + 3)* para o referido problema no Teste 1, alteraram respectivamente, sua resposta para *60 (= 4 x 5 x 3)* no Teste 2[10]. O Estudante 6, por exemplo, abandonou (no referido problema) a aplicação imprópria da *operação de adição* (adotada no Teste 1) e passou a usar apropriadamente no Teste 2 a *operação de multiplicação*[11] (FIGURA 13).

Nas Figuras 14 e 15, verifica-se que a resolução fornecida ao Problema 2 (de natureza multiplicativa) e Problema 3 (de natureza aditiva) do Teste 2 – executadas respectivamente pelos Estudantes 9 e 1 – não sofreram quaisquer alterações em relação ao Teste 1. Constata-se, nesses problemas fundamentais de contagem, a aplicação consciente e consistente das chamadas operações aritméticas básicas (*multiplicação* e *adição*) – o que proporcionou uma adequada formulação de soluções inteiras – compatível com o que se espera conceitualmente atingir na resolução de problemas desse gênero.

Na Figura 16, constata-se que o Estudante 28 resolveu coerentemente o Problema 3 a partir da aplicação da regra aditiva. Observa-se, entretanto, que no Teste 1, ele usou inadequadamente a regra multiplicativa. Já no Problema 4, o Estudante 28 aplicou a mesma técnica de contagem direta empregada no Teste 1 (inadequada para se chegar a solução conceitual esperada, ou seja, *31*).

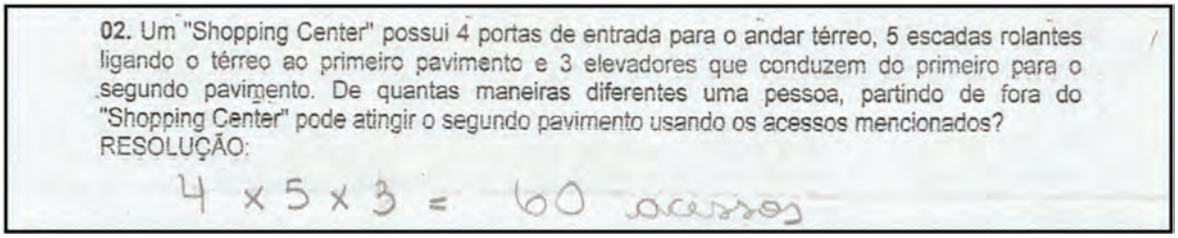
---

[9] Tradicionalmente, no Ensino Médio, é dado ênfase ao estudo combinatório do emprego da *Regra de Multiplicação da Contagem*. Entretanto, é importante que seja mostrado aos estudantes que nem todo problema é solucionado por essa regra. A mesma sugestão vale para a regra aditiva, que deve ser explorada mais satisfatoriamente de modo bilateral, ou seja, tanto por exemplos quanto por contraexemplos (quando a regra não pode ser utilizada).

[10] Neste caso, a mudança de operação foi adequada e a divergência de resultados que existia na resolução do Problema 2 do Teste 1 foi superada no Teste 2.

[11] De outubro a novembro de 2012, os estudantes tiveram aulas básicas de *Combinatória* na EEEMFV e o Teste de Sondagem 2 só foi aplicado em dezembro de 2012.

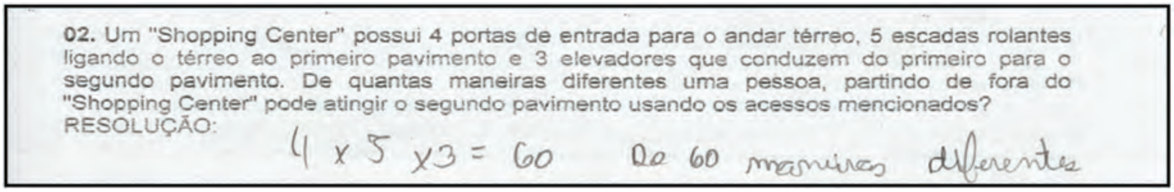
Figura 13 – Resolução do Problema 2 do Teste 2 realizada pelo Estudante 6.



**02.** Um "Shopping Center" possui 4 portas de entrada para o andar térreo, 5 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro pavimento e 3 elevadores que conduzem do primeiro para o segundo pavimento. De quantas maneiras diferentes uma pessoa, partindo de fora do "Shopping Center" pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados?
RESOLUÇÃO:
4 x 5 x 3 = 60 acessos

Fonte: a pesquisa.

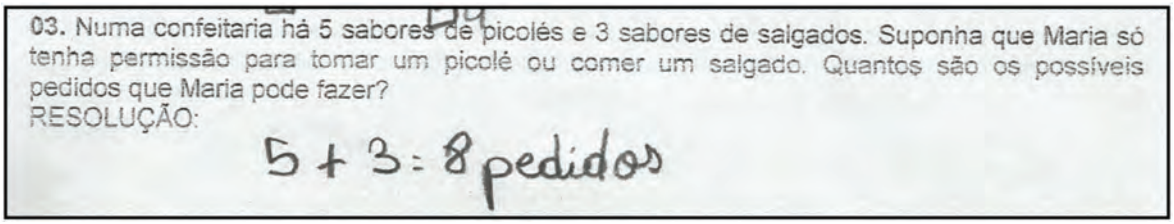
Figura 14 – Resolução do Problema 2 do Teste 2 realizada pelo Estudante 9.



**02.** Um "Shopping Center" possui 4 portas de entrada para o andar térreo, 5 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro pavimento e 3 elevadores que conduzem do primeiro para o segundo pavimento. De quantas maneiras diferentes uma pessoa, partindo de fora do "Shopping Center" pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados?
RESOLUÇÃO:
4 x 5 x3 = 60 Da 60 maneiras diferentes

Fonte: a pesquisa.

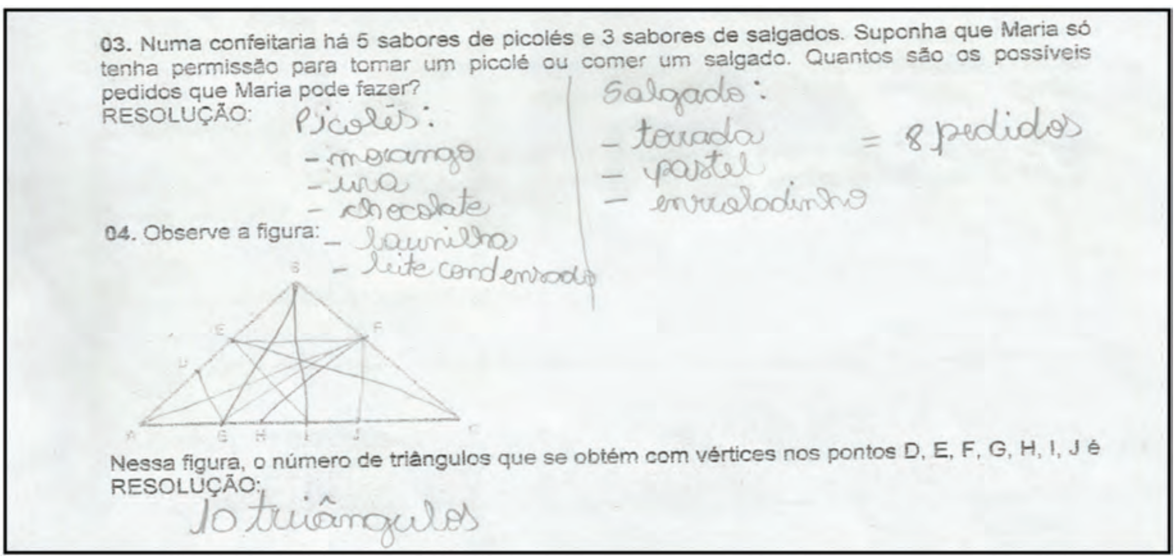
Figura 15 – Resolução do Problema 3 do Teste 2 realizada pelo Estudante 1.



**03.** Numa confeitaria há 5 sabores de picolés e 3 sabores de salgados. Suponha que Maria só tenha permissão para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer?
RESOLUÇÃO:
5 + 3 = 8 pedidos

Fonte: a pesquisa.

Figura 16 – Resolução do Problema 3 e 4 do Teste 2 realizada pelo Estudante 28.



**03.** Numa confeitaria há 5 sabores de picolés e 3 sabores de salgados. Suponha que Maria só tenha permissão para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer?
RESOLUÇÃO:
Picolés:
- morango
- uva
- chocolate
- baunilha
- leite condensado

Salgado:
- torrada
- pastel
- enroladinho

= 8 pedidos

**04.** Observe a figura:



Nessa figura, o número de triângulos que se obtém com vértices nos pontos D, E, F, G, H, I, J é
RESOLUÇÃO:
10 triângulos

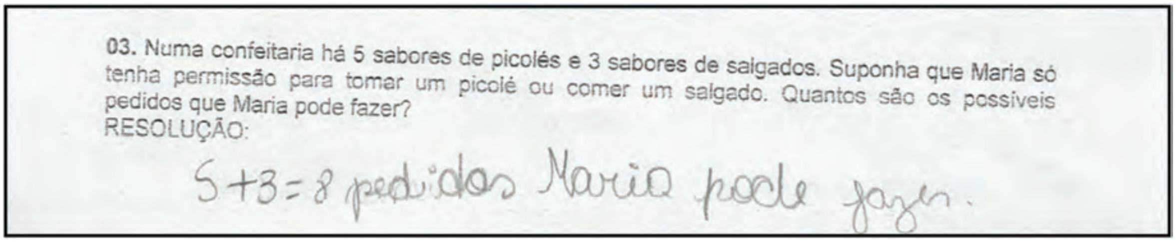
Fonte: a pesquisa.

Com efeito, opina-se que, uma das formas do Estudante 28 solucionar satisfatoriamente o Problema 4, seria por intermédio da construção de *modelos mentais* de contagem mais *abstratos*, que permitissem realizar, de modo indireto, a contagem dos agrupamentos de triângulos requeridos no problema. Uma solução neste sentido seria efetuar o cálculo: *6 x 3 + 1 x 5 + 2 x 4 = 31*, onde *6* (*GH, GI, GJ, HI, HJ* e *IJ*), *1* (*DE*) e *2* (*FE* e *FD*) expressam o número de bases dos triângulos requeridos; e *3* (*D,E,F*), *5* (*F,G,H,I* e *J*) e *4* (*G,H, I,* e *J*), o número de vértices de "fechamento" desses triângulos. A Solução detalhada encontra-se disponível em: <http://brainly.com.br/tarefa/43206> Acesso em: 26 de fevereiro de 2014.

Na Figura 17, nota-se que o Estudante 7 resolveu de modo adequado (pela regra aditiva) o Problema 3 do Teste 2[12]. Possivelmente, devido a uma ampliação no seu *universo de raciocínio combinatório*[13] a concepção alternativa aplicada no Teste 1 (que o fez chegar a resposta imprópria 1) foi abandonada.

Na Figura 18, vislumbra-se uma sutil e coerente ampliação do *universo de raciocínio combinatório* do Estudante 24 – em relação à resolução apresentada no Problema 5 do Teste 1 (FIGURA 11). De fato, na resolução do Problema 5 do Teste 2, o Estudante 24 passa a considerar àquelas *3* ligações que foram completamente ignoradas no Teste 1, atingindo assim a resposta *18* (*= 7 + 8 + 3*) para o problema em questão. Notavelmente, apesar de não ser contabilmente suficiente para se atingir o valor conceitual esperado (no caso *41*), a tomada destas 3 ligações representa um avanço na resolução do Problema 5 – no sentido de considerar ligações que são necessárias para a resolução adequada do problema.

Figura 17 – Resolução do Problema 3 do Teste 2 realizada pelo Estudante 7.

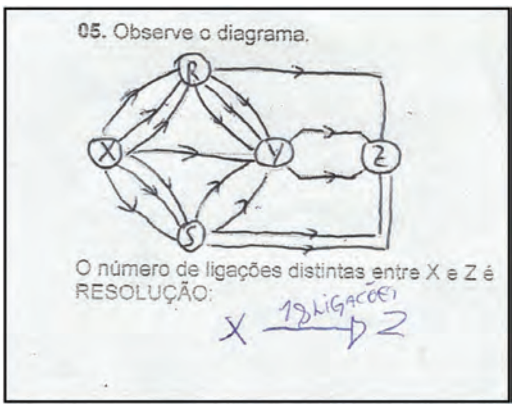


**03.** Numa confeitaria há 5 sabores de picolés e 3 sabores de salgados. Suponha que Maria só tenha permissão para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer?
RESOLUÇÃO:

5+3=8 pedidos Maria pode fazer.

Fonte: a pesquisa.

Figura 18 – Resolução do Problema 5 do Teste 2 realizada pelo Estudante 24.




Fonte: a pesquisa.

12 Ressalta-se que, 3 estudantes (daqueles 23 que realizaram os dois Testes de Sondagem) resolveram inadequadamente o Problema 3 de forma multiplicativa no Teste 2.

13 De um só lanche, vislumbra-se 2 conjuntos de possibilidades (picolés ou salgados), que passam a "representar" respectivamente 3 picolés e 5 salgados, que unidos, chegam a formar um conjunto finito mais amplo de 8 elementos.

De modo geral, na exposição das 8 resoluções de problemas aqui comentadas, nota-se a ocorrência de 6 alterações de respostas dos estudantes – do Teste 1 para o Teste 2. Um resultado expressivo, que ilustra bem os dados apresentados nas tabelas e gráficos seguintes (gerados pelas respostas dos 23 estudantes que realizaram os dois testes de sondagem):

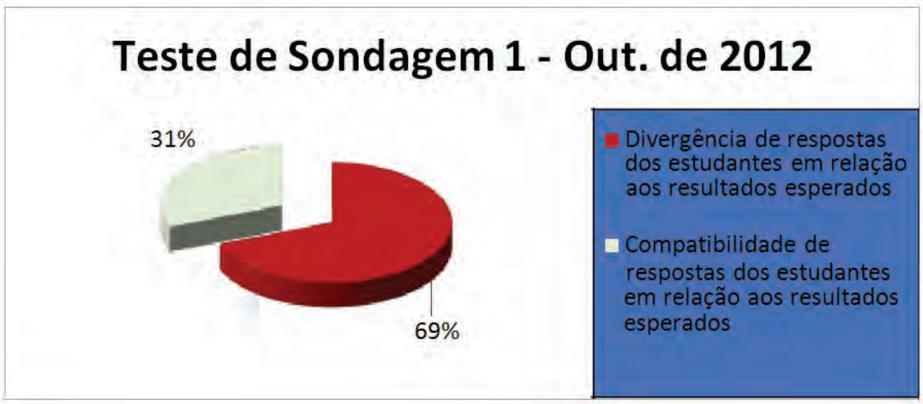
Da Tabela 3 e Gráfico 2, conclui-se que a taxa de divergência das respostas (em relação às entradas válidas) no Teste 1 (aplicado em out. 2012) é de 47/ 68, ou seja, 69 %.

Tabela 3 – Distribuição de respostas divergentes e compatíveis (out. de 2012).

| | Divergente do esperado | Compatível com o esperado |
|---|---|---|
| Problema 1 | 5 | 16 |
| Problema 2 | 9 | 2 |
| Problema 3 | 11 | 3 |
| Problema 4 | 13 | 0 |
| Problema 5 | 9 | 0 |
| TOTAL | 47 | 21 |

Fonte os autores.

Gráfico 2 – Divergência e Compatibilidade das respostas dos estudantes (out. de 2012).




Fonte: os autores.

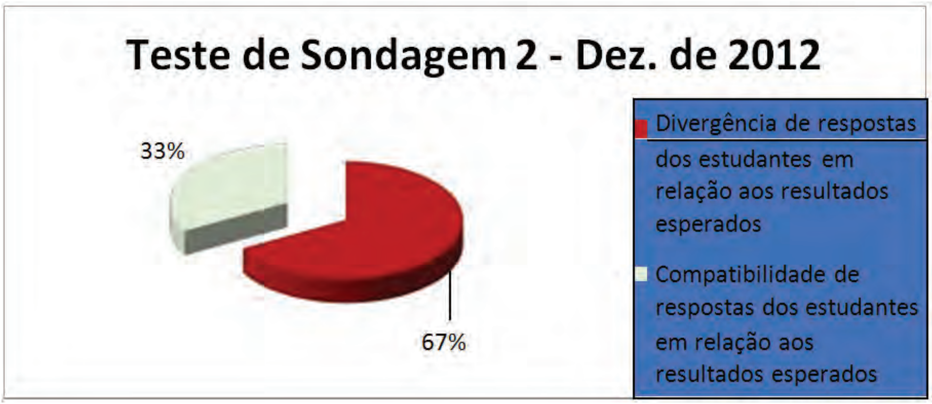
Da Tabela 4 e Gráfico 3, conclui-se que a taxa de divergência das respostas (em relação às entradas válidas) no Teste 2 (aplicado em dez. de 2012) é de 75/112, ou seja, 67 %.

Tabela 4 – Distribuição de respostas divergentes e compatíveis (dez. de 2012).

| | Divergente do esperado | Compatível com o esperado |
|---|---|---|
| Problema 1 | 17 | 6 |
| Problema 2 | 11 | 12 |
| Problema 3 | 5 | 16 |
| Problema 4 | 20 | 3 |
| Problema 5 | 22 | 0 |
| TOTAL | 75 | 37 |

Fonte os autores.

Gráfico 3 – Divergência e Compatibilidade das repostas dos estudantes (dez de 2012).




Fonte: os autores.

Note que, a divergência de resultados é bastante aproximada (cerca de 2%) e consideravelmente expressiva (mais do que 60 %) nos dois testes. A pequena diferença de 2 % sugere uma considerável resistência dos estudantes (investigados) em admitir uma estrutura sistêmica (científica e matemática) diferente daquela previamente conhecida ou alternativamente construída por eles.

## Considerações finais

Para os estudantes investigados, verificou-se uma considerável resistência e dificuldade em assimilar adequadamente “novos conhecimentos” e *raciocínios combinatórios* formais – apresentados a partir de *modelos conceituais* introduzidos na Escola. Na visão dos autores deste trabalho, essa resistência e dificuldade estão associadas ao notável apego dos estudantes a *conhecimentos prévios* inadequados e ao uso de *concepções alternativas,* que conduzem comumente o pensamento para a direção de resultados divergentes dos cientificamente aceitos.

Naturalmente, por outro lado, a própria cultura escolar e os *modelos conceituais* (e também mentais) que os professores trazem para a sala de aula podem contribuir para o quadro de resistência e dificuldades de aprendizagem dos estudantes. Observe o leitor, que o modo como os professores percebem e difundem o conhecimento – além dos mecanismos que orientam sua estrutura cognitiva – podem interferir no processo de ensino e aprendizagem dos estudantes.

Uma das fontes vitais de referência (metodológica, teórica e pedagógica) para os professores e estudantes é ainda o livro didático. Boa parte da construção de *modelos conceituais* (e também mentais) são influenciados por tais livros. Provavelmente, por esse motivo, observa-se tradicionalmente na resolução de problemas combinatórios (Ensino Médio) demasiada ênfase no estudo e difusão de *modelos conceituais* que tratam de problemas de natureza multiplicativa e de certos agrupamentos especiais de elementos (isto é, arranjos, combinações e permutações), quando de bom alvitre seria trabalhar com diversos princípios e técnicas gerais de contagem.

No estudo empreendido, mais precisamente no Problema 1 do Teste 2, verificou-se algumas soluções dos estudantes, onde a regra multiplicativa foi empregada inadequadamente em problemas de natureza aditiva, o que ocasionou considerável divergência de resultados (*6* de *9* estudantes aplicaram de modo impróprio a regra multiplicativa – ou seja, cerca de *67%*). Uma possível solução para diminuir essas divergências de resultados (especialmente, em relação aos conceitos científicos e matemáticos já estabelecidos) reside no lançamento de *modelos conceituais* mais didáticos e de um trabalho crítico e estrategicamente pedagógico a ser desenvolvido pelo professor junto aos estudantes, fazendo-os perceber que nem todo método, técnica ou pensamento podem ser empregados de qualquer forma para resolver problemas. Nesse sentido, o uso de contraexemplos é um dos recursos fundamentais de ensino e aprendizagem que devem ser empregados para mostrar quando não é possível empregar dado tipo de solução. Com efeito, os resultados desta pesquisa sugerem que providências sejam tomadas no sentido de se conceber metodologias de ensino e aprendizagem que visem facilitar construções de *modelos mentais* adequados ao estudo da *Combinatória*.

Por fim, no que tange o objetivo geral da pesquisa realizada, ele foi atingido ao constatar (nas turmas de 2º Ano do Ensino Médio investigadas) que um dos principais fatores potencialmente influentes na divergência de resultados em problemas de contagem é a construção de *modelos mentais* inadequados – obtidos por meio de *conhecimentos prévios* e de *concepções alternativas*.

## Referências bibliográficas

ALMEIDA, I. A. C; SANTOS, J.; MEDEIROS, C. F. Uma busca de analogias entre as representações mentais e as representações no espaço bi-dimensional dos modelos geométricos. *Revista Educação Gráfica*, Bauru, nº4, p.31-41, 2000.

BRANCA, Nicholas A. Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. *A resolução de problemas na matemática escolar.* Tradução: Hygino H. Domingues; Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.p.4-12

DANTE, L. Roberto. *Formulação e resolução de problemas de matemática:* teoria e prática. São Paulo: Ática, 2009.

DECRETO-LEI Estadual nº 10.642, da Criação do Município de Fazenda Vilanova, de 28 de dezembro de 1995. Acervo do Município de Fazenda Vilanova.

ENCONTRO NACIONAL DE ENSINO DE QUÍMICA, 15, 2010, Brasília. *Anais eletrônicos...* Brasília: SBQ, 2010. *On line.* Disponível em: <http://www.xveneq2010.unb.br/editorial.htm >. Acesso em: 24 jul. 2013.

ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM ENSINO DE CIÊNCIAS, 7.,2009, Florianópolis. *Anais eletrônicos...* Florianópolis: ABRAPEC, 2009. *On line.* Disponível em: < http://posgrad.fae.ufmg.br/posgrad/viienpec/ >. Acesso em: 24 jul. 2013.

ENCONTRO DE PESQUISA EM ENSINO DE FÍSICA, 11.,2008, Curitiba. *Anais eletrônicos...* Curitiba: SBF, 2008. *On line.*

Disponível em: <http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/epef/xi/atas/trabalhos.htm >. Acesso em: 24 jul. 2013.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9.,2007, Belo Horizonte. *Anais eletrônicos...* Belo Horizonte: SBEM, 2007. *On line.*

Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/apresentacao.html>. Acesso em: 24 jul. 2013.

EUREKA! *A Revista das Olimpíadas Brasileiras de Matemática.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, nº 26, p.7, 2007.

FARIAS, Jovani, *Fazenda Vilanova sua história*. Lajeado, Univates, 2012.

FRITSCH, Rosângela; VITELLI, Ricardo;ROCHA, Cleonice Silveira. *Defasagem Idade-Série em escolas Estaduais de Ensino Médio do RS*. 2013. In: XXVI Simpósio Brasileiro de Política e Administração da Educação. *On line*. Disponível em: <http://www.anpae.org.br/simposio26/1comunicacoes/RosangelaFritsch-ComunicacaoOral-int.pdf> Acesso em:02 ago. 2013

GARCIA, Isabel Krey. *Dificuldades dos estudantes na aprendizagem da Lei de Gauss em nível de Física Geral à luz da Teoria dos Modelos Mentais de Johnson-Laird*, Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000.

HAZZAN, Samuel. *Fundamentos da Matemática Elementar: c*ombinatória e probabilidade. São Paulo: Atual, 1977, v.5.

HEFEZ, Abramo, *Indução Matemática*, 2009. *On line*. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/Apostila4-Inducao.pdf>. Acesso em: 13 out. 2013.

JOHNSON-LAIRD, Philip, N. *Mental Models*. Cambridge, M. A.: Harvard University Press, 1983.

MOREIRA, Marco Antônio. *Teorias de Aprendizagem*. São Paulo: EPU, 1999.

MORGADO, A. C. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 1991. (Coleção do Professor de Matemática).

NASCIMENTO, Lucidalva Pereira do; KEMPA, Sydney Roberto. A Evasão e/ou abandono de jovens do Ensino Médio Noturno de uma Escola Pública do Litoral do Paraná.2008.In: *O Professor PDE e os desafios da Escola Pública Paranaense.*

2008.Vol. 1. *On line*. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_p de/2008_fafipar_ped_artigo_lucidalva_pereira_do_nascimento.pdf >. Acesso em: 31 jul. 2013.

NORMAN, D. A. *Some observations on mental models*. In: GENTNER, D., STEVENS, A. L. (Eds.) Mental Models. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1983, p. 6-14.

SAMPIERE, R. H.; COLLADO, C. F.; LUCIO, P.B. *Metodologia de Pesquisa.* Tradução: Fátima Conceição Murad; Melissa Kassner; Sheila Clara Dystyler Ladeira. 3ª ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL. *Censo Escolar*, 2012. *On Line*. Disponível em: <http://www.educacao.rs.gov.br/dados/estatisticas_taxa_rend_ens_medio_2012.pdf> Acesso em: 31 jul. 2013

SILVERMAN, D. *Interpretação de dados qualitativos:* métodos para análise de entrevistas, textos e interações. 3. ed. Porto Alegre: Artmed Bookman, 2009.

STENHOUSE, L. *An introduction to curriculum research and development*. Londres: Heinemann, 1975.

VEGA, M. de et al. Representations of visuospatial cognition: a discussion. In:______*Models of visuospatial cognition*. Oxford: Oxford University Press, 1996, p.198-226.

**Roberto Stenio A. C. de Albuquerque** – Mestre em Ensino de Ciências Exatas (UNIVATES). Autor do trabalho dissertativo (apresentado em 2014 ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Univates) que serve de base para este artigo. E-mail: rstenio@ig.com.br.

**Claus Haetinger** – Doutor em Matemática Pura (UFRGS). Orientador do trabalho dissertativo (apresentado em 2014 ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Univates) que serve de base para este artigo. E-mail: chaet@univates.br.