CONCEPÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS NA REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA: UM ESTUDO COM ALUNOS DA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS (EJA)

Fractional representation conceptions of rational numbers: A study with students of the Youth and Adult Education

Gerson Pastre Oliveira
Edinalva Rodrigues Ferreira

Resumo

O presente artigo descreve uma pesquisa qualitativa, sob o enfoque da análise de conteúdo, realizada com alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma turma de Educação de Jovens e Adultos (EJA), no sentido de identificar obstáculos de natureza epistemológica e didática que são evidenciados na aprendizagem dos números racionais na representação fracionária por meio das concepções parte-todo e operador. Os dados foram obtidos e analisados a partir da produção realizada pelos estudantes em torno de atividades envolvendo a resolução de problemas elaborados a partir de situações cotidianas, em relação aos quais os sujeitos construíram propostas de soluções em duplas. As análises permitiram levantar a ocorrência de dificuldades na compreensão do significado dos números racionais em sua representação fracionária, em grande parte provocadas pela ausência de tratamento dos obstáculos epistemológicos e didáticos identificados, bem como em razão da prevalência de um contrato didático de natureza prescritiva cujos efeitos concorrem para aumentar a dependência dos alunos em relação ao professor.

Palavras-chave: EJA. Frações. Números racionais. Obstáculos epistemológicos. Obstáculos didáticos. Contrato didático.

Abstract

This article describes a qualitative research under the content analysis approach, carried out with students of the 2nd year of high school in a Youth and Adult Education, to identify obstacles of epistemological and didactic nature that are highlighted in learning of rational numbers in fractionary representation considering the conceptions part-whole and operator. Data were collected and analyzed from the answers produced by students in activities involving problem solving. For those activities, students proposed solutions working in pairs. The analyzes allowed to identify the occurrence of difficulties in understanding the meaning of rational numbers in its fractionary representation, largely caused by the absence of treatment of the identified epistemological and didactic obstacles as well as due to the prevalence of a prescriptive didactic contract, whose effects contribute to increase the dependence of students in relation to the teacher.

Keywords: Youth and Adult Education. Fractions. Rational numbers. Epistemological obstacles. Didactic obstacles. Didactic contract.

Introdução

O estudo de frações é um dos desafios que os alunos e professores da Educação Básica enfrentam em sala de aula. Nas escolas do Brasil, as representações fracionárias dos números racionais são desenvolvidas já nos ciclos iniciais. Entretanto, documentos oficiais (BRASIL, 1998) indicam que os alunos chegam aos anos finais do Ensino Fundamental sem compreender as diferentes concepções relativas ao tema em questão.

O significado dos números racionais, que têm na fração uma de suas representações, é um tema discutido por diversos pesquisadores, entre eles, Silva, M. (2004; 2005), Vasconcelos (2007), Magina e Campos (2010) e Cavalcanti e Guimarães (2007). Tais autores reconhecem a importância da compreensão das concepções relacionadas às frações, assim como as dificuldades no que se refere ao seu ensino e/ou aprendizagem.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 1997), ao tratarem dos racionais, consideram quatro significados diferentes que esses números assumem: relação parte-todo, divisão, razão e operador. Neste trabalho, consideraram-se, em função das questões tratadas, duas das cinco concepções descritas por Silva, M. (2005), em razão da abrangência adequada construída pela autora em seu trabalho, principalmente no que diz respeito às concepções parte-todo e operador, que são focos da pesquisa aqui descrita.

Dessa forma, a investigação relatada neste artigo foi realizada no contexto de uma turma com 32 alunos que cursavam a 2ª série do Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos (EJA), com o intuito de verificar em que medida uma sequência didática, cuja elaboração leva em conta as especificidades dos alunos da EJA, contribui para o diagnóstico de obstáculos à aprendizagem das concepções parte-todo e operador, referentes à representação fracionária dos números racionais. Subsidiariamente, pretendeu-se, também, identificar a influência do contrato didático no contexto mencionado, tendo por base a ideia de que a relação entre alunos e professores, bem como o papel desses atores em sala de aula, são fatores decisivos para aprendizagem do tema em questão. Nesse sentido, as concepções teóricas e conceituais que nortearam o trabalho mencionado estão relacionadas nas próximas seções.

Concepções parte-todo e operador

Na definição de Cavalcanti e Guimarães (2007), a concepção parte-todo consiste na "partição do todo em *n* partes iguais, em que cada parte pode ser representada como $1/n$" (p.3). Em definição semelhante, Silva, M. (2005) indica que essa concepção surge da ação de dividir uma grandeza contínua em partes equivalentes ou uma grandeza discreta em partes iguais. De acordo com a autora, as situações que envolvem essa concepção evidenciam partes de alguma quantidade que é considerada como um todo ou inteiro e estão presentes em todas as discussões que envolvem o desenvolvimento do conceito de fração.

Em relação ao ensino e à aprendizagem de frações, no que toca à concepção parte-todo, Silva, M. (2005) menciona que, geralmente, os trabalhos introdutórios sobre frações são iniciados por essa concepção. A mesma observação é feita por Canova (2006, apud CAVALCANTI; GUIMARÃES, 2007), ao constatar que os livros didáticos, no geral, apresentam as primeiras ideias de fração pelo significado parte-todo.

Nesse sentido, a mobilização dessa concepção para o ensino de frações aparece nas primeiras atividades envolvendo esses números e, de acordo com Silva, M. (2005), ela está presente também nas discussões a respeito das outras concepções.

A concepção de operador, por sua vez, está relacionada à ideia de transformação. Essa concepção atribui ao número racional $\frac{a}{b}$, uma fração que, quando aplicada a uma figura geométrica, pode ampliar ou diminuir essa figura e, nos casos de conjuntos discretos, atuar como multiplicador. Sobre essa função da fração como operador, Silva, M. (2005) afirma:

> Nas tarefas que solicitam a mobilização da concepção de operador o Fracionário $\frac{a}{b}$ é manipulado como "algo que atua sobre uma quantidade" e a modifica, produzindo uma nova quantidade. Essa ação pode ser entendida pela ação de operador fracionário que modifica um estado inicial e produz um estado final. Nessas tarefas, os fracionários a/b são manipulados efetivamente como números e facilitam a compreensão da operação de multiplicação entre os fracionários. (SILVA, M., 2005, p.134)

Nesse contexto, a fração na concepção de operador assume um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica. Este caráter funcional de transformação leva a entender a fração como uma máquina de transformação.

Nesta ótica, a fração $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, opera como fator transformador de um número que, multiplicado por "a" e em seguida dividido por "b", resulta em um número que, dependendo da fração $\frac{a}{b}$, pode ser maior ou menor que o número inicial.

Considerando, como Silva, M. (2005), que as concepções de frações são de grande importância para o desenvolvimento intelectual do aluno, faz-se necessário conhecer como se dá a compreensão dessas concepções no contexto escolar e as possíveis dificuldades que se evidenciam na resolução de problemas que envolvem os números racionais. É a preocupação de Magina e Campos (2010), que indicam que a ênfase exagerada em procedimentos e algoritmos pode levar os alunos a utilizar o método de contagem dupla (contar o número total de partes da figura e as partes pintadas) sem entender o significado de frações – ou enfrentando obstáculos didáticos importantes no que se refere ao uso de outras técnicas, como indica Silva, M. (2005). Quanto à aprendizagem em si, as autoras ressaltam que é possível que alguns alunos passem pela escola sem superar as dificuldades das frações:

> Com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e ainda não a têm. Elas usam os termos fracionários certos; falam sobre frações coerentemente, resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba. (NUNES; BRYAN, 1979, p.191, apud MAGINA; CAMPOS, 2010, p.6)

Entre as dificuldades frequentemente apontadas pelos professores e alunos em relação à compreensão de frações, Merlini (2005) evidencia que, nas estratégias de resolução de atividades relacionadas à concepção parte-todo, por exemplo, o aluno, frequentemente, despreza o todo envolvido, fazendo a contagem de partes sem relacionar o todo. Esse autor, como os demais mencionados até aqui, ressaltam a importância da utilização de estratégias de ensino bem elaboradas na introdução do trabalho com frações, de modo a proporcionar aos alunos a compreensão do conceito e seus significados.

Tendo em vista as considerações até aqui arroladas, resta apresentar a pesquisa que procurou tomá-las por base, a partir de seus pressupostos teóricos e metodológicos.

Obstáculos em Educação Matemática

Um dos fatores que geram dificuldades no processo de ensino e de aprendizagem de números racionais são os obstáculos, que em alguns casos, levam os alunos a cometerem erros quando estão trabalhando nesse campo.

Deve-se ressaltar que o erro, na visão de Brousseau (1983), é considerado, de certa forma, necessário para desencadear o processo de aprendizagem do aluno. Para o autor, "[...] os erros de um sujeito estão unidos por uma fonte comum: uma maneira de conhecer; uma concepção característica, coerente, embora incorreta; um conhecimento anterior bem-sucedido na totalidade de um domínio de ações" (BROUSSEAU, 2008, p.49). Por isso, eles são resistentes e ressurgem várias vezes, mesmo depois de o sujeito ter manifestado rejeição pelo modelo errado. Essa fonte comum é nomeada de obstáculo.

Brousseau (1983) ainda afirma que o erro pode evidenciar o obstáculo, isto é, um obstáculo se manifesta a partir do erro. Um obstáculo, na definição desse autor, é um conhecimento e não uma falta dele. Nessa mesma linha, encontra-se, em D'AMORE (2007), a concepção de que "um obstáculo é uma ideia que no momento da formação do conceito foi eficaz para enfrentar problemas anteriores, mas que se revela um fracasso quando se tenta aplicá-la a um novo problema".

Os obstáculos são elencados por Brousseau (1983) em três tipos: os de origem didática (aqueles que estão ligados à escolha do docente); os de origem ontogênica (os que estão ligados ao estudante e à sua maturidade), e os de origem epistemológica (que estão ligados à própria natureza do assunto).

Os obstáculos de natureza didática são os que parecem depender de escolhas ou de um projeto do sistema educativo (BROUSSEAU, 1983). O mesmo autor afirma que as dificuldades surgem por meio da estratégia de ensino escolhida, que propicia o surgimento de obstáculos ao entendimento e desenvolvimento de alguns conceitos. Almouloud (2007) apresenta alguns exemplos de situações frutos de obstáculos de origem didática. Entre eles, destaca-se a questão de o número decimal ser considerado como natural com vírgula. Regras que formalizam explicações, tais como "todo número natural tem sucessor e, se ele é não nulo, um predecessor" e "o produto de dois números naturais não nulos é maior ou igual a cada um deles", comumente utilizadas pelos alunos no campo dos números naturais, provocam erros quando os trabalhos se estendem aos números decimais.

O obstáculo ontogênico, de acordo com Brousseau (1983, apud ALMOULOUD, 2007), "aparecem pelas limitações (neurofisiológicas, entre outras) do sujeito em um dado momento de seu desenvolvimento" (p.145). Geralmente surgem quando a aprendizagem está deslocada em relação à maturidade conceitual do sujeito. Um exemplo desse obstáculo é a linguagem formal matemática que, de acordo com a idade do estudante, pode não ser completamente compreendida.

Os obstáculos epistemológicos são aqueles que fazem parte da construção do conhecimento que ocorre ao longo da História e da construção cognitiva do aluno. Mais uma vez, Brousseau (1983) afirma que esses obstáculos seriam "aqueles aos quais não se pode e nem se deve escapar, pelo fato de terem desempenhado um papel constitutivo no conhecimento visado" (p.178).

Almouloud (2007) aponta que pesquisas em didática, história e epistemologia da Matemática identificam fatores e concepções que deram origem aos obstáculos epistemológicos e que ainda hoje podem ser observados nos alunos. A associação do zero como *"nada"*, a conceituação de função e o infinito são exemplos de obstáculos epistemológicos citados pelo autor.

Em relação ao ensino e à aprendizagem de frações, no que diz respeito aos obstáculos epistemológicos, Silva, M. (1997) destaca cinco deles, que estariam ligados ao conceito de números racionais. O primeiro se refere à representação simbólica. Segundo Campos (1995, apud SILVA, M., 1997), os alunos apresentam maior facilidade quando trabalham com frações unitárias. Além disso, é comum que representem o símbolo sem entender o seu significado, o que a autora caracteriza como um obstáculo epistemológico pelo fato de o aluno não ser requisitado a obter realmente a representação da situação a que está submetido, por meio de estratégias que possam dar significado às representações fracionárias.

A negação da necessidade das quantidades fracionárias é o segundo obstáculo tratado por Silva, M. (1997). Ele se refere ao aluno que, em algumas situações, nega-se a aceitar os *"números quebrados"* como resultado. De acordo com a autora, essa negação ocorre provavelmente porque os alunos não são colocados diante de situações que os façam perceber a necessidade desse tipo de número.

O terceiro obstáculo diz respeito à dificuldade em aceitar as frações como número. Silva, M. (1997) relata que essa foi uma das grandes dificuldades dos matemáticos do século XVII. Segundo a autora, a essência dessa dificuldade está no fato de o número fracionário não ser da mesma natureza dos números naturais. Ele não surge de uma sequência, e sim de uma partição do inteiro, o que leva o aluno a interpretar a fração como um par de números naturais e não como um número que representa uma quantidade.

O quarto obstáculo apresentado por Silva, M. (1997) é relativo ao conhecimento dos naturais. Esse obstáculo está vinculado ao fato de o aluno ter um conhecimento numérico que o leva a pensar que só os números naturais têm o *status* de número. Dessa forma, como todo o seu conhecimento numérico está relacionado ao conjunto dos naturais, quando as crianças iniciam os trabalhos com frações tentam aplicar os conhecimentos que já possuem e acabam por tratar a fração como dois números naturais, um em cima do outro. A autora aponta, ainda, a permanência da dificuldade que os alunos possuem em aceitar situações em que o dividendo seja menor que o divisor, $\frac{2}{5}$ por exemplo, alegando que não dá para dividir 2 por 5, isso mesmo depois de ter recebido instruções sobre frações.

Em razão disso, pode-se afirmar que "o conhecimento dos naturais constitui em si mesmo um obstáculo à aprendizagem dos números fracionários" (SILVA, 1997, p.29).

O modelo de referência, quinto obstáculo dessa relação, encontra-se na passagem do discreto para o contínuo. O aluno, ao trabalhar com fração, que é introduzida a partir de um modelo contínuo com a concepção parte-todo, tem como modelo de referência o conjunto dos naturais, que é um modelo discreto.

Diante do exposto, nota-se que um dos desafios do educador é conhecer as especificidades dos alunos e possuir uma profunda relação com o conhecimento matemático. Isso o levará a identificar os possíveis obstáculos didáticos e epistemológicos que interferem no processo de ensino e de aprendizagem, o que permitiria efetuar regulações no contrato didático, cujo conceito é tratado a seguir.

Sobre a noção de contrato didático e seus efeitos

Os primeiros apontamentos sobre contrato didático no âmbito da Educação Matemática surgiram sob o enfoque da didática francesa. Segundo Brousseau (1986), o contrato é composto por cláusulas, quase sempre implícitas, celebradas em torno das responsabilidades e que estabelecem a relação entre o professor, o aluno e o saber. Em uma situação de ensino, preparada e realizada por um professor, o aluno normalmente tem como tarefa resolver o problema matemático que lhe é apresentado, mas o acesso a essa tarefa é feita por meio das interpretações das questões colocadas, das informações fornecidas, das obrigações impostas que são constantes no modo de ensinar do professor. Esses hábitos do professor esperados pelos alunos e os comportamentos dos alunos esperados pelo docente constituem o contrato didático. Trata-se, assim, das relações envolvendo professor, aluno e saber como um conjunto de expectativas recíprocas em que se espera que o professor crie condições suficientes para apropriação dos conhecimentos e reconheça essa apropriação quando ela se reproduz (BROUSSEAU, 1986).

Contudo, nessa relação, geralmente o professor não deixa explícito o que espera do aluno e nem o aluno o que espera do professor. O que ocorre é que cada um imagina o que o outro pensa. Nesse sentido, a concretização das expectativas vividas tanto pelos professores quanto pelos alunos faria com que a relação entre eles fosse bem-sucedida. Diante desse contexto, o professor tem a função de organizar e selecionar o saber de modo a permitir a aprendizagem, enquanto o aluno deve estar disposto a aprender o que está sendo ensinado. Na verdade, o que se espera é que cada uma das partes cumpra o seu papel e, para que isso aconteça, é fundamental a colaboração e participação de ambos. Quando isso não ocorre, o contrato didático torna-se sujeito à ruptura.

São muitos os fatores que podem provocar a ruptura do contrato. Entre esses fatores estão as especificidades de cada aluno, a complexidade do que está sendo aplicado ou até mesmo a estratégia do professor. Assim, cabe ao professor avaliar constantemente o processo para verificar as causas da quebra do contrato e replanejar.

Brousseau (2008) indica, ainda, sobre os efeitos do contrato didático, que, em algumas situações, influenciam nas dificuldades existentes na aprendizagem de matemática. Almouloud (2007) explica que a negociação contínua do contrato didático por parte do professor na tentativa fazer com que os alunos acertem tende a facilitar a tarefa e pode levar à descaracterização dos conteúdos matemáticos, bem como dos objetos de aprendizagem. Entre os efeitos deletérios descritos pelo autor francês, o mais significativo para este estudo, e que pode ser identificado nas análises, como mais adiante se verá, é o chamado efeito *Topaze*. Almouloud (2007) indica que tal efeito surge quando o aluno encontra uma dificuldade e esta é superada mediante condições criadas pelo professor, sem um verdadeiro engajamento pessoal discente, por meio de "dicas" e sugestões facilitadoras. Esse efeito aparece nas situações de ensino em que o professor propõe um problema ao aluno e, percebendo sua dificuldade em resolvê-lo, precipita-se, fornecendo pistas e até mesmo respostas.

Diante do exposto, é possível reconhecer que efeitos como este são frequentemente vividos em sala de aula. Na Educação de Jovens e Adultos, diante das dificuldades que os alunos encontram em resolver as tarefas, é muito comum o professor oferecer pistas e fornecer respostas aos problemas. Em função das dificuldades típicas, muitas vezes o professor é tentado a facilitar indevidamente o processo, criando "mecanismos", por assim dizer, que substituem ou diminuem de fato a relevância do saber matemático em favor de banalizações ou metáforas excessivas, o que pode contribuir para a constituição de obstáculos à aprendizagem pretendida. Outra possibilidade nesse sentido surge quando o contrato didático estabelecido assume natureza excessivamente prescritiva, baseado em reproduções de exercícios e exemplos modelares. De alguma forma, essas condições surgiram e foram apontadas, mais adiante, nas análises descritas neste artigo, cujo delineamento metodológico é descrito na sequência.

Aportes metodológicos

A pesquisa aqui descrita pode ser caracterizada como um estudo de natureza qualitativa, cujos procedimentos foram organizados a partir dos princípios da análise de conteúdo (BARDIN, 2009). Nesse sentido, pode-se dizer que os elementos textuais até aqui apresentados tipificam duas das fases descritas por Bardin (2009), quais sejam a pré-análise e a exploração do material. A terceira fase, tratamento dos resultados/interpretação, evidenciada nas seções seguintes deste artigo, teve por base duas categorias de análise: *identificação de obstáculos didáticos e epistemológicos a partir da resolução de problemas pelos estudantes* e *elementos indicadores da ocorrência de efeitos do contrato didático*.

Quanto à organização, o estudo foi realizado no âmbito de uma turma equivalente à 2ª série do Ensino Médio, da Educação de Jovens e Adultos. Entre os 32 alunos, achou-se por bem, pela característica da pesquisa delineada, observar quatro deles, os quais participaram de todas as atividades e não possuíam vínculos afetivos com os autores deste trabalho.[1]

A atividade foi elaborada de forma que fosse possível identificar os obstáculos didáticos e epistemológicos apresentados pelos alunos da EJA concernentes à conceituação dos números racionais na forma fracionária. Durante as atividades, foram feitas filmagens das ações dos alunos, além de registros de áudio e anotações.

A coleta de dados foi realizada em uma Escola Estadual localizada em um bairro de periferia no município de Mauá. Nela, no período noturno, são atendidos apenas alunos da Educação de Jovens e Adultos, em turmas que vão do 1º termo do Ensino Fundamental (5ª série) ao 3º termo do Ensino Médio (3ª série). Nas dependências da escola existem, ainda, ambientes pedagógicos extras como sala de leitura e sala de vídeo. Esses espaços são geralmente frequentados pelos alunos da EJA para realização de pesquisas e atividades dirigidas pelos professores. Como suporte pedagógico, a escola conta com dois professores coordenadores, sendo um deles responsável pelas orientações e pelo direcionamento dos trabalhos referentes aos professores e alunos da Educação de Jovens e Adultos.

A escola atende alunos do próprio bairro e dos bairros circunvizinhos. O corpo docente é formado, majoritariamente, por professores atuantes na Educação de Jovens e Adultos e também no ensino regular na mesma ou em outras unidades de ensino. O grupo de alunos é composto por pessoas adultas que decidiram voltar à escola e por adolescentes que precisaram, por diversos motivos, retomar os estudos abandonados em anos precedentes. De modo geral, esse corpo discente, em sua maioria, é composto por homens e mulheres trabalhadores que vão à escola depois da jornada de trabalho.

Outros dados específicos dos alunos envolvidos na pesquisa foram obtidos por meio de um questionário elaborado pela escola no início de cada semestre para colher informações relevantes sobre esses alunos, de modo a auxiliar na caracterização das turmas e no planejamento das aulas. Os dados fornecidos pela Unidade Escolar permitem a seguinte descrição dos sujeitos da investigação:

- Aluna DE: tem 25 anos e trabalha como lojista. Parou de estudar aos 15 anos porque engravidou. Voltou depois de 10 anos, no 1º ano do Ensino Médio, porque quer um diploma e melhorar na profissão. Usa matemática em seu trabalho. Acha a matemática útil, mas complicada, e assume que não consegue entendê-la;
- Aluno NY: tem 37 anos e trabalha como açougueiro. Parou de estudar aos 19 anos devido à morte da mãe e à necessidade de trabalhar, retornando à escola depois

[1] A coautora foi professora na escola na qual se deu o trabalho de campo. Os sujeitos não participaram em turmas nas quais ela lecionou.

de 18 anos, no 2ª ano do Ensino Médio, porque quer ajudar a filha e dar continuidade aos estudos. Usa matemática em seu trabalho e acha a disciplina importante;

- Aluno SA: tem 23 anos e trabalha como jardineiro. Parou de estudar aos 18 anos para trabalhar e voltou 5 anos depois, no 1ª ano do Ensino Médio, porque quer se formar e arrumar um emprego melhor. Acha a matemática necessária no dia a dia e a utiliza em sua profissão.
- Aluno RO: tem 25 anos e trabalha como marceneiro. Parou de estudar para trabalhar e voltou 8 anos depois, no 2ª ano do Ensino Médio, porque quer conseguir um bom emprego e um futuro melhor. Acha a matemática necessária no dia a dia e a utiliza em sua profissão.

A partir das informações dadas pelos próprios alunos, nota-se que, com exceção de DE, são alunos que pararam de estudar com idade maior que a esperada para o nível de ensino. Observa-se também que o grupo é constituído por pessoas já inseridas no mercado de trabalho, que deixaram de estudar pela necessidade de desenvolver atividade produtiva e retornaram à escola também por razões ligadas a ela.

Em relação à análise, o que se pretendeu aqui foi interpretar os dados coletados nas aplicações das atividades e, por meio deles, diagnosticar os obstáculos à aprendizagem que os alunos jovens e adultos encontram ao se depararem com problemas relacionados ao estudo de frações, no que toca às concepções parte/todo e operador. O mesmo pode ser dito em relação aos efeitos do contrato didático. Assim, cada aluno recebeu uma atividade composta por três problemas, adiante descritos, que foram elaborados de maneira que permitisse ao aluno agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria. Observa-se, ainda, que o papel da pesquisadora responsável pelas sessões durante o processo foi o de mediar e criar condições para que o aluno pudesse construir os seus conhecimentos, evitando intervenções diretas. Tais procedimentos são reconhecidos por Brousseau (2008) como adequados para possibilitar ao aluno maior independência para desenvolver autenticamente seus próprios recursos para resolução de problemas.

A seguir, serão apresentadas as respostas dadas pelos alunos às atividades propostas, assim como a análise dos procedimentos de resolução em cada situação.

Atividades propostas e análise

No primeiro problema, é dada a informação de que $\frac{1}{3}$ da água dos reservatórios de São Paulo é perdida com "gatos"[2] e desperdícios. O item *"a"* pede que o aluno faça uma figura para representar a água dos reservatórios e pinte a parte que corresponde à perda com os "gatos" e desperdícios.

Esse é um exemplo de questão que caracteriza uma das primeiras ideias de fração a partir da concepção parte-todo. Para solucionar, o aluno precisa fazer uma figura, dividi-la em três partes iguais e pintar apenas uma delas. A expectativa para essa questão era que os alunos mobilizassem conhecimentos relativos ao entendimento das frações como números e, por meio dele, conseguissem fazer a figura equivalente, dando a resposta esperada, evidenciando com isso a compreensão de quanto representa a parte em relação ao todo.

Ao receberem a atividade, houve certa inquietação por parte dos alunos, que folheavam os materiais (caderno, livro didático e apostila) na tentativa de encontrar um caminho para começar a resolução. A aluna DE disse:

DE: – *Como eu vou fazer um reservatório de água?*

Pesquisadora: – *Se ficar difícil para você imaginar um reservatório de uma cidade, pense em algo menor. como, por exemplo, a caixa d'água de sua casa.*

Outro aluno, RO, após uma conversa com um colega sobre como desenhar a figura, disse:

RO: – *"Professora, a fração pode ser círculo ou só quadrado?"*

Pesquisadora: – *"Você pode escolher."*

Nessa fase inicial da resolução, é perceptível a interação dos alunos com as informações contidas na atividade e ditas pela pesquisadora. Como a sessão foi organizada de modo a permitir a comunicação entre os alunos, ocorreram, também, interações entre eles. As perguntas feitas inicialmente pelos alunos denotaram que eles estavam empenhados em buscar uma solução para o problema; entretanto, a busca constan-

[2] Ligações clandestinas.

te por "pistas", refutadas pela pesquisadora, marcou as interações nesse ponto do processo. Ou seja, a natureza dos questionamentos, que, inicialmente, foi de tal ordem que denotava a tentativa de obter respostas facilitadoras da figura vista como docente, indica a possibilidade de que as relações de aprendizagem habituais dos estudantes estejam mediadas por um contrato didático de natureza prescritiva, pelo qual o professor responde e direciona a resolução dos estudantes, ou dá "dicas" nessa direção, produzindo o que Brousseau (2008) chama de *efeito Topaze*. Entretanto, como a situação foi estruturada para que as aprendizagens surgissem a partir de retroações em relação ao *milieu*,[3] logo os alunos perceberam que a postura assumida representava uma ruptura em relação ao contrato ao qual se haviam adaptado anteriormente. Ao final do tempo previsto para a atividade, as repostas contidas na Tabela 1 foram apresentadas.

Tabela 1 – Respostas fornecidas pelos sujeitos ao problema 1, item *a*.

Sujeito	**Desenho utilizado**	**Sujeito**	**Desenho utilizado**
Aluno SA		Aluno DE	
Aluno RO		Aluno SY	

Fonte: dados da pesquisa.

A aluna DE incorreu no erro de dividir a figura em quatro partes desiguais e pintar três delas, baseando-se no denominador da fração, ou seja, não conseguiu associar o número fracionário a uma figura que o representasse, fazendo uma representação que, possivelmente, associa a figura ao numerador e denominador da fração.

Na resposta da aluna, quando esta faz a associação entre o número e a figura, fica evidenciada a presença de um obstáculo epistemológico relacionado ao conhecimento dos números naturais. Nesse caso, como os constructos cognitivos da aluna estão relacionados a esse conjunto, ela tenta aplicá-los ao trabalhar com frações, o que leva a uma resposta errada.

Um ponto comum nas respostas dos sujeitos denota que estes pensam na fração como parte de algo, mas isso ocorre de maneira desorganizada, sem percepção do significado

[3] Na visão de Brousseau (1986) e de Almouloud (2007), no âmbito de uma situação didática o aluno aprende por meio da adaptação a um *milieu* (meio, em uma tradução livre), que seria fator de dificuldades, de contradição, de desequilíbrio, de forma próxima como se daria na experiência objetiva do indivíduo na sociedade em geral. Brousseau (1996) refere-se ao *milieu* como um subsistema com o qual o aluno deve lidar diretamente, ou seja, tudo aquilo que age sobre o aluno ou sobre o qual o aluno age. O *milieu* teria, então, caráter material, teórico, social e cognitivo, de modo a instar o aluno, dada sua natureza antagonista, a se adaptar às situações apresentadas e a construir o saber desejado. Nesse processo, o professor deve criar situações que possibilitem mudanças no *milieu* a fim de levar o aluno à construção de novos saberes: "[...] a ação de um professor possui um forte componente de regulação dos processos de aquisição do aluno. O próprio aluno aprende pela regulação de suas relações com o *mileu*. As regulações cognitivas têm a ver com o *milieu adidático*, em que parte da estrutura é determinada pela organização definida pelo professor" (BROUSSEAU, 2008, p.56).

do numerador e do denominador. A representação na figura ocorre muitas vezes porque já tiveram contato com esse conteúdo em algum momento da escolaridade, como pode ser visto nos diálogos:

SA: – *"Tem que fazer três desenhos."*

RO: – "*Não... Acho que tem que fazer um desenho e repartir. Já fiz uma 'coisa' assim.*"

SA: – *"Não lembro nada disso."*

Observa-se que o aluno RO mobiliza, ainda que timidamente, um conhecimento já adquirido anteriormente e, por meio dele, apresenta argumentos que levam a tentativas de resolução do problema. Na conversa, é notável que SA faz tentativas para resolver o problema, mas, em interação com o *milieu* material, abandona o modelo pensado e começa a criar um outro, conforme exposto na Tabela 1. Ao dividir o desenho em três partes e pintar uma delas, o estudante sinaliza que ficou convencido do que foi dito pelo colega. No entanto, há uma desigualdade na divisão da figura de forma que a parte pintada representa $\frac{1}{2}$, e não $\frac{1}{3}$ dela, o que pode indicar que o aluno não possui sequer uma ideia intuitiva de metade.

O aluno RO, apesar das dificuldades iniciais em entender o que fazer na resolução do problema, em sua resposta evidencia que se valeu de conhecimentos vivenciados de frações para fazer uma figura que representasse a fração dada, demonstrando que os conhecimentos adquiridos são válidos para a resolução do problema, conforme pode ser visto na Tabela 1.

Na representação do aluno SY, indicada na mesma tabela, há indícios de que o aluno divide, mentalmente, a figura em três porções e pinta uma parte pequena da figura, que imagina ser o reservatório após o desperdício, o que pode ser observado no diálogo a seguir:

SY: – "*Professora, precisa mesmo desenhar?*"

Pesquisadora: – "*Sim, precisa. É o que pede o problema.*"

SY – "*Mas eu tenho que desenhar um reservatório?*"

Pesquisadora: – "*Pode fazer como você imagina...*"

Esse procedimento do aluno aponta para uma realidade característica do aluno da EJA. Ele não tem o conhecimento formal da representação fracionária por uma figura, mas consegue relacionar a uma figura a quantidade que a fração possivelmente represente. Os saberes constituídos pelo aluno, certamente, em função de suas vivências e experiências do cotidiano, lhe possibilitaram adquirir apenas uma noção de quantidades. Entretanto, esses saberes são insuficientes para a resolução de problemas específicos do conteúdo. Embora as experiências de vida dos alunos sejam importantes, é necessário que sejam ampliados os conhecimentos em contato com os novos saberes.

Nesse sentido, para Freire (1996), os conhecimentos se ampliam à medida que a pessoa reconsidera seus olhares, suas experiências e seus valores em função de sua interação com novos conhecimentos. Contudo, é preciso ficar atento para que não haja a supervalorização de saberes e valores característicos do senso comum, ou seja, aquilo que é próprio dos indivíduos e de suas vivências, fruto da experiência imediata com o mundo material, implicando a desvalorização ou a negação do conhecimento formal.

Os erros cometidos são comuns entre os alunos em situações em que se pede para representar frações por meio de figuras. Eles geralmente ocorrem não por ausência de conhecimento, mas por este ser adaptado inadequadamente, válido em determinado contexto – por exemplo, em situações do cotidiano que não exigem sua formulação em relação a outro contexto que demanda uma abordagem mais sistematizada. Esse obstáculo à aprendizagem, segundo a definição de Brousseau, pode ser caracterizado como obstáculo didático. Para Campos et al. (1995), os obstáculos podem ser gerados no ensino inicial dos conceitos de frações. Nesse caso, os autores mencionados mostram que, muitas vezes, a forma utilizada para a apresentação do conteúdo pode criar concepções que os levarão, posteriormente, a erros em outras situações de trabalho com os números racionais.

Em relação ao item *b* do problema, o que se pede é que o estudante responda se $\frac{1}{3}$ representa mais ou menos que a metade da água dos reservatórios. Nesse item, esperava-se que os alunos mobilizassem conhecimentos anteriores associados à comparação de frações para aplicá-los na explicação da sua resposta dada ao problema.

Para justificar corretamente a questão, o aluno poderia usar, como recurso, frações equivalentes ou a representação decimal, podendo, ainda, recorrer às formulações feitas no item anterior do problema. Optando por usar frações equivalentes, o aluno poderia encontrar as frações $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{6}$. Uma outra opção seria representar as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ na figura.

Nesse caso, o fato de precisar justificar a resposta causou reações por parte dos estudantes:

DE: – *"Professora, não vou responder à segunda."*

Pesquisadora: – *"Por que não vai responder?"*

DE: – *"Está difícil, não sei fazer."*

Pesquisadora: – *"Não sabe fazer ou não sabe explicar?"*

DE: – *"Os dois. Posso pular este? ... Então vou entregar a prova!"*

SA: – *"Vou entregar também... Não entendi como fazer!"*

Diante da situação, a pesquisadora fez intervenções no sentido de motivá-los a continuar a atividade. Em seguida, leu o problema e perguntou:

Pesquisadora: – *"Você acha que a água desperdiçada é mais que a metade da água dos reservatórios? Por que você acha isso? Escreva como se você estivesse explicando para o seu colega."*

A reação dos alunos evidencia que não estão acostumados a trabalhar com problemas que solicitam justificativas e, ao menor sinal de dificuldade, pedem ajuda da professora com frases do tipo: *"É assim que faz?"*, *"Está certo?"*, *"Me 'explica' este aqui"*, *"Faz um exemplo"*, *"Como faz?"*. Quando não conseguem a resposta esperada, irritam-se e, em alguns casos, chegam a desistir da atividade. As atitudes dos alunos mostram a forte influência do contrato vigente e uma extrema dificuldade em aceitar sua ruptura. De acordo com Silva (2008), o contrato didático depende da estratégia de ensino adotada, adaptando-se, entre outros fatores, à escolha didática. Possivelmente, a prática didática nessa turma seja aquela em que o professor passa exercícios aos alunos e eles, por sua vez, os resolvem corretamente ou não, contando com a ajuda do professor com dicas ou elementos que os conduzam ao resultado. A dependência dos alunos revela, também aqui, o efeito *Topaze*, relativo ao contrato didático.

Verificam-se, a seguir, as dificuldades dos alunos em explicar as estratégias e os conhecimentos utilizados na resolução do problema expressas nas figuras 12 e 13.

Tabela 2 – Respostas ao primeiro problema, item *b*.

Sujeito	**Operação**
Aluno SA	R: Mais ou menos, por que as vezes o povo gasta muita água depois quando está em falta de água o povo que economizar.
Aluno DE	Menos que a metade pois é um dividido por três
Aluno RO	É menos que a metade pois fiz um circulo e sai ~~do~~ dividindo em forma de fração
Aluno SY	Não porque $\frac{1}{3}$ não representa a metade de sua capacidade e sim só um pouco da sua capacidade

Fonte: dados da pesquisa.

SA responde à questão expressando uma opinião baseada no contexto social que a envolve. Esse erro pode demonstrar tanto a incompreensão do enunciado do problema quanto a incompreensão das relações entre duas frações envolvidas.

Na justificativa do aluno SY, fica clara a noção de quantidade quando ele diz que "$\frac{1}{3}$ *é um pouco da capacidade do reservatório".* Apesar de o argumento ter sido realizado de forma empírica, considera-se que o aluno relaciona as quantidades representadas pelas duas frações do problema, revelando novamente que utiliza os saberes adquiridos com a vivência e possui noções matemáticas aprendidas de maneira informal ou intuitiva. Entretanto, não deixa explícito nenhum conhecimento teórico que possa validar sua resposta.

DE, RO e SY responderam que *"um terço corresponde a menos que a metade da capacidade dos reservatórios"*, mas o fizeram sem alinhar justificativas consistentes relacionadas ao conceito de frações. Além das respostas expostas na Tabela 2, isso pode ser observado também na seguinte conversa de duas alunas antes de fazerem os registros:

DE: – "*Um terço... acho que é mais."*

CA: – *"Quanto que é metade?"*

DE: – *"A metade é cinco... um e cinco."* (Escrevendo $\frac{1}{5}$)

DE: – *"Então é menos."*

DE faz formulações incorretas, embora tenha dado a resposta correta. Percebe-se claramente que o acerto deu-se por um acidente feliz, já que DE, em evidente manifestação de obstáculo, confunde a representação fracionária como dois números naturais, indicando, assim, que 3 é menor que 5, logo um terço seria menos que a metade, que acredita ser representada pela fração $\frac{1}{5}$. Como consequência do obstáculo mencionado, a aluna entende que a fração $\frac{1}{5}$ é maior que a fração $\frac{1}{3}$. A comparação feita pela aluna revela, dessa forma, o obstáculo epistemológico que induz a ideia de que se pode aplicar aos números racionais a mesma lógica utilizada para os números naturais. Sobre esse obstáculo epistemológico, Silva, M. (1997) considera que os alunos têm dificuldades em aceitar as frações como número e atribui tais dificuldades ao fato de o número fracionário "surgir" da partição de algo que representa um inteiro.

Em continuidade, no item *c* do problema, é dado um valor que representa o volume de água de um determinado reservatório (vinte e sete milhões de metros cúbicos) e é solicitado que se calcule a quantidade de água desperdiçada. Uma forma de solução é a multiplicação da fração pelo número: $\frac{1}{3} \times 27000000 = \frac{27000000}{3} = 9000000$. Pode-se, ainda, recorrer a uma figura, na forma de círculo ou retângulo, por exemplo, ao dividi-la em três partes iguais, de modo a concluir que cada parte representa $\frac{1}{3}$ da capacidade do reservatório e que uma delas representa o desperdício anunciado.

A exemplo das outras situações, os alunos, ao lerem o problema, dialogaram entre si, fizeram interpretações, discutindo ideias para resolução e solicitaram a presença da pesquisadora.

A dificuldade inicial dos alunos foi relacionar as informações da questão com as fornecidas nos itens anteriores.

DE: – *"Como eu vou saber a quantidade de água desperdiçada?"*

Pesquisadora: – *"Este item ainda faz parte da primeira questão."*

Os quatro alunos analisados, pelo que pode ser constatado, não dominam a operação de divisão. Assim, o uso de calculadoras foi permitido.

Tabela 3 – Respostas ao primeiro problema, item *c*.

Sujeito	Resposta	Operação	Desenho utilizado
Aluno SA	"Porque 27 milhões de pessoas dividido por 3 a minha figura representa que é a metade e dá 9000."	27.000÷3=27.000 |3 9.000	
Aluno DE	"9000 litros de água. Desperdício. Eu cheguei a esse valor porque fiz a divisão $\frac{27}{3}$."	$\frac{27}{3} = 9.000$	Nenhum
Aluno RO	"Consegui chegar nesse cálculo pois fiz a mesma fração que a do anterior."	27÷3=9.000	
Aluno SY	Não fez comentários	27 milhões de metros cúbicos 27,000 $\frac{9}{3}$	

Fonte: dados da pesquisa.

Como exposto na Tabela 3, o aluno SA faz confusão no reconhecimento do número e escreve 27 mil em vez de 27 milhões. Após dividir 27 mil por 3, explica sua resposta com base na figura: *"[...] minha figura representa que a metade dá 9000"*. Observa-se que a figura está dividida em três partes, e uma delas é a metade. Percebe-se que a resposta fornecida, numericamente correta, baseia-se na aplicação de um algoritmo sobre o qual não se fez qualquer reflexão com base no conhecimento dos racionais. Como consequência, a representação figural equivocada surge a partir da concepção errônea. Erros semelhantes foram apresentados pelos demais participantes.

Percebe-se, portanto, que um dos obstáculos à aprendizagem que se manifestam no estudo das frações está vinculado ao fato de alguns alunos possuírem apenas conhecimentos procedimentais sobre o conteúdo, os quais possibilitam aprender como encontrar frações do todo, mas de forma mecânica, sem verdadeiramente compreenderem o que estão fazendo.

No momento da resolução, antes do registro, RO diz:

– *"É nove, não é, professora?"*

A pesquisadora devolve a pergunta:

– "*Por que nove? Como você chegou a esta conclusão?"*

Mostrando a figura da primeira questão, o aluno diz:

– *"Se tudo é 27, cada parte é 9"*.

A resposta de RO sinaliza que ele entende que os 27 milhões são o todo, e que para obter um terço da capacidade, bastaria dividir o todo em três e considerar uma delas. Ainda que haja deficiências na explicação dada pelo aluno, o diálogo indica uma resposta correta e aceitável, em termos matemáticos.

Já o aluno SY, como comentado anteriormente, apropria-se de conhecimentos de sua vivência adulta para dar respostas ao problema. Nota-se, na Tabela 3, que o aluno não faz uma divisão válida da figura, indicando apenas ter noção de quantidade.

Desconsiderando o erro na representação do número 27 milhões, as respostas registradas pelos alunos mostram que três deles dividiram o volume de água pelo denominador da fração, diretamente, sem associar essa ação ao conceito de número fracionário envolvido. Ainda que as respostas estejam corretas, existe a hipótese de que os alunos associem a situação à divisão de naturais, caracterizando um obstáculo proveniente do seu conhecimento.

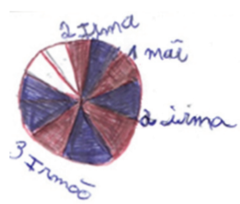
A inabilidade desses alunos em estabelecer relações entre um número fracionário e sua representação figural e compreender o significado da concepção parte-todo são exemplos de dificuldades relacionadas ao conceito de frações. Por outro lado, considera-se que essas ações possam estar vinculadas às regras do contrato didático estabelecido, que valoriza a resolução de exercícios de forma mecânica e condicionada aos exemplos e pistas fornecidas pelo professor.

No segundo problema, é apresentada a seguinte descrição: *"Paulo levou sua esposa e os três filhos a uma pizzaria. Pediram uma pizza tamanho família e dividiram em 10 partes. A esposa estava fazendo uma dieta e só quis comer* $\frac{1}{10}$*, as duas meninas comeram* $\frac{2}{10}$ *cada uma e o menino comeu* $\frac{3}{10}$*. Responda: (a) Qual fração representa a pizza inteira? (b) Qual a fração da pizza ficou para Paulo?".*

Nesse problema, esperava-se que os alunos mobilizassem conhecimentos relativos ao significado das frações e conseguissem utilizá-los para compor representações numéricas de frações que representem partes do todo ou o todo. Especificamente, é solicitado que o aluno represente a fração que representa a pizza inteira. Para responder corretamente, o aluno deve considerar a quantidade de partes em que a pizza foi dividida, ou seja, o denominador da fração, e associar esse número à ideia de que a pizza inteira são dez partes de dez: $\frac{10}{10} = 1$.

Dos quatro alunos observados, apenas um respondeu corretamente, demonstrando compreender, ao menos no âmbito da situação proposta, o significado do numerador e do denominador da fração, porém não conseguiu deixar clara a ideia utilizada para encontrar a solução do problema. As respostas podem ser verificadas na Tabela 4.

Tabela 4 – Respostas ao segundo problema, item *a*.

Sujeito	Resposta	Desenho utilizado
Aluno SY	"Em 10 partes referentes à pizza inteira $\frac{10}{10}$ representa a pizza inteira."	Nenhum
Aluno DE	"$\frac{1}{10}$"	
Aluno SA	"$\frac{10}{2}$, porque cada pessoa comeu 2 pedaços de pizza."	
Aluno RO	"$\frac{10}{2}$ = dividirão a pizza para 2 pedaços cada pessoa."	

Fonte: dados da pesquisa.

Na Tabela 4, pode ser visto como a aluna DE respondeu à pergunta. A aluna faz a figura para representar a pizza e escreve a fração $\frac{1}{10}$, não conseguindo relacionar a figura e a representação fracionária da pizza inteira. Ao perceber o registro da aluna, a pesquisadora pergunta:

– *"Por que um décimo?"*

DE: – *"Porque é uma pizza dividida em dez partes, então um dividido por dez."*

A resposta da aluna reforça a conjectura acerca da existência de um obstáculo que faz com que a ela tenha ideia da fração como um par de números inteiros e não como um único número. Tal fato fica evidenciado quando a aluna indica entender que o inteiro é representado pelo numerador, ou seja, compreende 1 como inteiro (um número) e 10 como as partes constituintes, mas representando outro número.

De outro modo, as soluções encontradas por RO e por SA são as mesmas, como também pode ser visto na Tabela 4. Os dois alunos interagiram durante todo o tempo da atividade, discutindo as questões e por várias vezes requisitaram a intervenção da pesquisadora por não conseguirem entrar em acordo em algumas ideias. No momento dessa questão, eles discutiram sobre a existência de pizza com 10 pedaços e surpreendem a pesquisadora com a afirmação:

– *"Professora, não dá para fazer este, não existe pizza de 10 pedaços!"*

A pesquisadora respondeu:

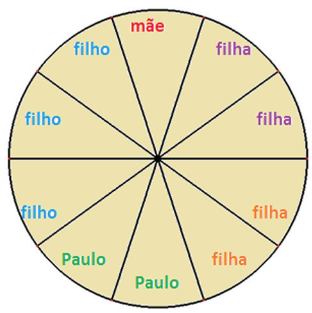
– "*Pensa que é uma pizza tamanho família e eles dividiram em dez pedaços.*"

Antes de responder qual fração representaria a pizza inteira, os sujeitos começaram a contar os pedaços comidos por cada membro da família e em seguida desenharam o que poderia representar a pizza. Como se pode observar, as representações figurais estão corretas, o que não garante a tradução para uma fração que represente uma resposta para o problema. A resposta dada, denotada pela fração $\frac{10}{2}$, pode indicar que a aprendizagem sobre o conceito foi constituída a partir de um contrato didático prescritivo, no qual atividades como as realizadas na pesquisa não teriam lugar. Dessa forma, as concepções desses estudantes aparecem calcadas no pressuposto de que se está lidando com dois números, e não com um número apenas, na representação fracionária. Além disso, na falta da construção mais adequada do conhecimento em uso, os alunos recorrem a uma solução do senso comum: a "improvável" pizza de 10 pedaços fica dividida equanimemente em dois pedaços para cada comensal. Além disso, o que reforça a incompreensão mencionada em relação ao significado do numerador e do denominador em uma fração é o fato de que ambos, na resposta apresentada, aparecem invertidos.

Em continuidade ao mesmo problema (item b), outro questionamento era proposto: "*Qual a parte da fração ficou para Paulo*?". Um caminho para a solução do problema poderia ser a adição e subtração de frações $\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}=\frac{8}{10}$ $\frac{10}{10}-\frac{8}{10}=\frac{2}{10}$

Ou fazer a representação figural da situação, como exposto na Figura 1.

Figura 1 – Exemplo de resolução do item *b* do segundo problema.



Fonte: os autores.

Nesse caso, a visualização facilita a resolução. É necessário, porém, que o aluno compreenda o significado do numerador e do denominador da fração para perceber que a parte que ficou para o Paulo é $\frac{2}{10}$.

Todos os alunos que estavam sendo observados acertaram a resposta, e três deles se orientaram pelas figuras que fizeram no item anterior.

Tabela 5 – Respostas ao segundo problema, item *b*.

Sujeito	Resposta	Desenho utilizado
Aluno SY	"Paulo comeu $\frac{2}{10}$ partes da pizza se duas meninas comeram $\frac{4}{10}$ partes a esposa comeu $\frac{1}{10}$ parte e o menino comeu $\frac{3}{10}$ assim ficou $\frac{2}{10}$ partes para Paulo."	Nenhum
Aluno DE	"$\frac{2}{10}$ cheguei a este resultado por que se duas filhas comeram 2 pedaços cada são 4 pedaços o filho comeu 3 pedaços assoma (*sic*) é 4 + 3 = 7 e a mãe comeu 1 pedaço 4 + 3 = 7 + 1 = 8 sobrou 2 pedaços para Paulo."	Nenhum
Aluno AS	"Ficou 2 pedaços $\frac{2}{10}$."	Nenhum
Aluno RO	"Sobrou para o Paulo $\frac{2}{10}$."	

Fonte: dados da pesquisa.

SY procurou resolver as questões sem interagir com os colegas e pouco solicitou a presença da pesquisadora. Dos quatro alunos observados, foi o único que acertou os dois itens da questão. Observa-se que o aluno, por meio de cálculo mental, fez a soma das partes e chegou ao resultado (Tabela 5), mas o procedimento denota que o estudante usa como estratégia para a resolução a associação da situação com a prática do seu cotidiano, o que evidencia o cumprimento de uma das regras do contrato firmado no início da atividade. Para esse estudante, portanto, a ruptura ocorrida não fez surgir maiores dificuldades.

A exemplo de SY, a aluna DE faz a soma dos pedaços da pizza, chegando à conclusão de que Paulo ficou com 2 pedaços. Entretanto, o trabalho é feito com números naturais, revelando, ainda aqui, indícios do obstáculo já evidenciado ao longo desta análise. É interessante notar que no item *a* do problema, a aluna responde que a fração que representa a pizza inteira é $\frac{1}{10}$ e, para representar 2 pedaços da mesma pizza, utiliza $\frac{2}{10}$, manifestando usar a representação sem entender seu significado, o que revela um dos obstáculos citados por Silva, M. (1997).

SA e RO já haviam encontrado a resposta pelo desenho que fizeram no item *a* da questão (Tabela 4), ou seja, basearam a resposta nos registros figurais utilizados.

O terceiro problema da sequência trazia a seguinte narrativa: *"Um trabalhador gasta $\frac{1}{3}$ do seu salário com aluguel da casa e $\frac{1}{5}$ com transporte. Quanto resta para outras despesas, se seu salário é de R\$ 780,00?"*.

Na resolução dessa questão, os quatro alunos que estavam sendo observados solicitaram a intervenção da pesquisadora, alegando que não haviam entendido o que deveriam fazer. Após alguns esclarecimentos, sem intervenção na resolução dos problemas, passaram a tentar resolvê-lo.

RO e SA, a exemplo das outras questões, conversaram sobre como resolver o problema:

RO: – "*$\frac{1}{5}$ é metade.*"

SA: – "Então ele gasta metade mais isso." (Referindo-se a $\frac{1}{3}$)

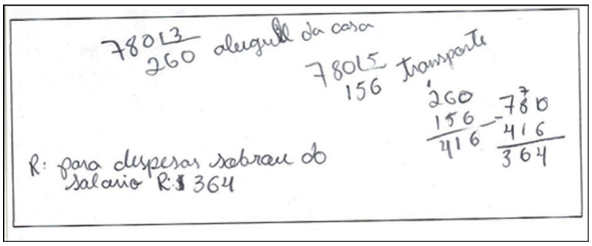
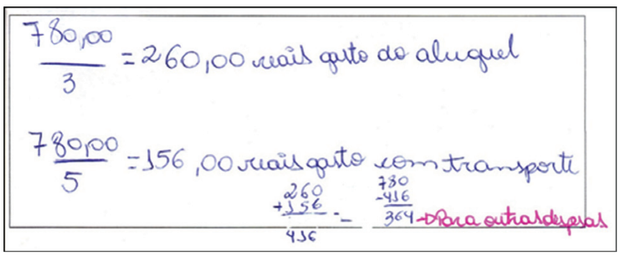
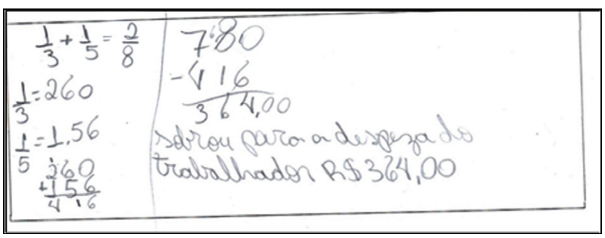
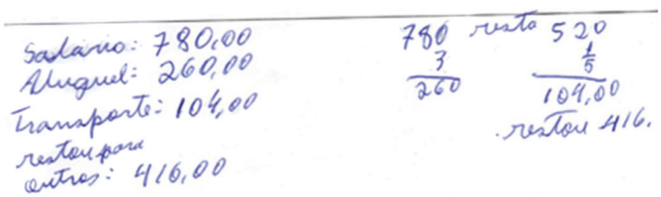
RO*: – "Professora, quanto é um terço?"*

Pesquisadora: – *"Você precisa descobrir."*

Diante das solicitações de ajuda e das perguntas dos alunos, a pesquisadora empenhou-se em manter a proposta investigativa da pesquisa, atuando como mediadora, sem fornecer pistas para os alunos resolverem os problemas e sem dar as respostas que eles esperavam. De acordo com Brousseau (2008), para garantir a aprendizagem, o professor não pode dizer ao aluno qual a resposta que espera dele, mas deve agir de modo que este aceite a responsabilidade de resolver o problema.

Na resposta de RO, exibida na Tabela 6, percebe-se que ele prosseguiu na ideia de somar as frações, fazendo "$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2}{8}$". Dos quatro estudantes observados, foi o único que pensou na soma das frações como um caminho para resolução. Entretanto, o erro na operação e a não continuidade da resolução a partir da fração encontrada na soma indicam que há existência de um obstáculo relacionado ao conhecimento dos naturais. Nesse aspecto, Silva, M. (1997) assegura que tal ocorrência pode levar o estudante à crença de que, na adição de frações, somar os denominadores e os numeradores, como no contexto dos naturais, representa um raciocínio correto. De todo modo, três dos alunos observados encontraram as partes do salário representadas pelas frações, como pode ser constatado na Tabela 6.

Tabela 6 – Respostas referentes ao terceiro problema.

Sujeito	**Operação**
Aluno SA	
Aluno DE	
Aluno RO	
Aluno SY	

Fonte: dados da pesquisa.

Um fato que chama a atenção é o procedimento comum para a resolução do problema. Todos os alunos utilizam conhecimentos de divisão de números naturais. Tal ocorrência não deixa claro se há entendimento do que se realizou ou se os estudantes apenas fizeram uso de um algoritmo. Diante dessa situação, nesse ponto da coleta de dados, decidiu-se por acrescentar um item ao problema, no qual o sujeito deveria fazer uma figura para representar, pintando com cores diferentes, cada parte do salário. Além disso, a resolução de SY apresenta alguns equívocos nos cálculos.

A pesquisadora retornou à escola para promover o trabalho com o novo problema. A questão proposta, relacionada à anterior, foi: *"Faça um desenho e pinte com cores diferentes as partes que representam o valor do aluguel, do transporte e o que sobra".*

Uma resposta esperada para essa questão era a de que os alunos encontrassem um denominador comum para as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$ por meio de frações equivalentes ou soma das frações, obtendo $\frac{5}{15}$ (gasto com aluguel) e $\frac{3}{15}$ (gasto com transporte), ou seja, $\frac{5}{15}+\frac{3}{15}=\frac{8}{15}$ e $\frac{15}{15}-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}$ (gastos com outras despesas). Também poderiam apresentar uma proposta como a indicada na Figura 2.

Figura 2 – Exemplo de resolução do problema quatro.

transporte	aluguel	outras despesas	outras despesas	outras despesas
transporte	aluguel	aluguel	outras despesas	outras despesas
transporte	aluguel	aluguel	outras despesas	outras despesas

Fonte: dados da pesquisa.

Ao ler a questão, DE comenta com NA[4] que não sabe como resolvê-lo, e continua:

NA: – *"O que é um terço?"*

DE: – *" Pinta três."*

NA: – *" E um quinto?"*

DE – *"É cinco."*

DE – *"Eu não sei como é isso, meu marido me falou que divide e depois multiplica, mas eu não lembro."*

No diálogo, é possível perceber que as alunas procuram agir sobre as informações do problema para tentar solucioná-lo e que DE vale-se do mesmo conhecimento equivocado sobre representação figural de fração, exposto no primeiro problema. Percebe-se ainda que a aluna faz a representação sem obedecer a qualquer padrão de divisão em partes iguais, limitando-se a tomar partes consideradas, talvez, proporcionais, para cada gasto e a sobra. Em seu discurso, a aluna repete o erro cometido no item anterior, quando encontrou um valor do aluguel maior que o do transporte, ao considerar a fração $\frac{1}{5}$ (gasto com transporte) maior que $\frac{1}{3}$ (gasto com aluguel), evidenciando um obstáculo de origem epistemológica. No caso de SY, há incoerência entre os valores encontrados no item anterior (Tabela 6) e a representação figural da situação. Quanto a essa observação, pode-se associá-la ao que Silva, M. (1997) identifica em seu estudo: "[...] os alunos, em busca de modelos já aprendidos, não param para refletir sobre o que cada situação apresentava, para perceber que tipo de abordagem era mais conveniente" (p.120).

Ainda em relação às respostas providas, SA indica suas respostas sem considerar a sobra no orçamento, representando o todo, consequentemente, de forma equivocada; além disso, ao representar a fração $\frac{1}{3}$, o aluno faz uma divisão inadequada ao não indicar partes iguais do todo. Pode-se notar que eles pensam a figura repartida em certo número de partes iguais, consolidando a única concepção que detêm acerca dos racionais (parte-todo), como observado na fala de RO, após uma interferência da pesquisadora ao ver a forma como haviam feito a figura:

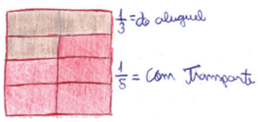
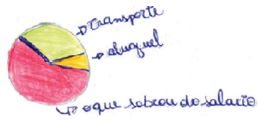
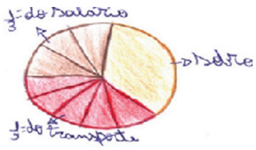
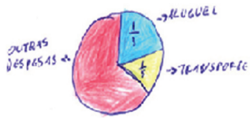
Pesquisadora: – *"Como você define fração?"*

RO: – *"Uma fração, eu defino quando tenho algo que tenho que dividir em formas iguais com as pessoas."*

A figura mostra que RO mobiliza o entendimento que tem sobre frações para resolver o problema. Entretanto, pode-se aventar que o seu conhecimento resume-se à repetição de um

[4] A aluna NA esteve ausente nas três sessões em que foram resolvidas as atividades, participando apenas da aula na qual foi aplicado o item acrescentado ao terceiro problema.

Tabela 7 – Respostas relativas ao problema quatro.

Sujeito	Desenho utilizado	Sujeito	Desenho utilizado
Aluno SA		Aluno DE	
Aluno RO		Aluno SY	

Fonte: dados da pesquisa.

conceito cujo significado não está claro, o que fica evidenciado quando o sujeito descreve ter somado os denominadores das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$ para obter a quantidade de partes em que o todo deveria ser dividido (salário e transporte, em seu entendimento, o que totalizaria $\frac{1}{8}$), enquanto a sobra de salário representaria o numerador, um inteiro, em sua fala, o que o levou a não dividir esse elemento. As respostas do aluno podem estar vinculadas às regras de um contrato didático prescritivo, que o levou a aprender elementos esparsos relativos às frações sem que necessariamente tenha compreendido seu significado enquanto número.

Tanto RO quanto SA, após dividirem a figura, pintam de cores diferentes as partes correspondentes ao denominador de cada fração, reafirmando que não compreenderam o significado do numerador e denominador da fração e evidenciando, portando, o uso de algoritmos sem a respectiva reflexão na representação figural de frações.

Considerações finais

Em um estudo qualitativo, como o aqui descrito, as possibilidades de generalização surgem sempre de forma algo limitada. Entretanto, mais do que generalizar, o objetivo de um estudo qualitativo sob o enfoque da análise de conteúdo é estabelecer conexões com a realidade tendo por base as reflexões constituídas a partir do recolhimento de materiais empíricos, de modo a aprofundar as conexões entre as ideias (BARDIN, 2009). Dessa forma, crê-se que o relato aqui exposto cumpriu seu papel no que se refere à indicação de obstáculos relativos à aprendizagem dos racionais em sua representação fracionária e da influência do contrato didático e seus efeitos sobre a aprendizagem de alunos da EJA.

Os resultados obtidos nesta investigação evidenciam que os participantes dominam alguns algoritmos, mas, em geral, não compreendem o significado dos números racionais em sua representação fracionária. Em relação às concepções, a ideia vigente é a de que estas se limitam à concepção parte-todo, o que pode ser evidenciado por meio da constatação das grandes dificuldades relacionadas à compreensão dos racionais como números e do aspecto por assim dizer transformador da concepção operador: para os sujeitos, a representação fracionária surgia, nas atividades, como uma “montagem” envolvendo dois números naturais, um no numerador, outro no denominador, o que dificultava sobremaneira a compreensão do sentido dessa representação, ou seja, o que de fato ela buscava representar em termos numéricos, ou, ainda, de outro modo, como aquela representação traduzia um elemento da realidade que poderia ser percebido numericamente.

As análises evidenciadas neste estudo apontam para tensões ainda não resolvidas quando da introdução de conceitos relativos aos racionais. Essas tensões, por assim dizer, encontram-se objetivadas na presença de obstáculos de natureza epistemológica, os quais são constitutivos da construção de saberes, uma vez que caracterizam a inadaptação a um conhecimento que, em um cenário anterior, apresenta total acerto e adequação, mas no novo contexto mostra-se insuficiente e inadequado. Em função disso, a compreensão do significado de um número racional na representação fracionária por parte desses alunos não parece consolidada: aparentemente, falta um tratamento didático acerca das questões de aprendizagem suscitadas pelos obstáculos em questão, tendo em vista que estes se apresentam como concepções, advindas de conhecimentos mal adaptados. Em que pese a inevitabilidade desse tipo de obstáculo, estratégias didáticas seriam importantes no auxílio para que os estudantes viessem a superá-los.

No caso da investigação aqui descrita, tais obstáculos ficam evidenciados quando os estudantes tentaram empregar os conhecimentos operacionais relativos aos números naturais no contexto dos racionais com representação fracionária, o que os conduziu à produção de erros típicos, objetivados, por exemplo, na soma direta de denominadores (e, eventualmente, dos numeradores também), raciocínio esse capaz de prejudicar todos os esquemas conjecturais voltados à resolução dos problemas propostos. Desse ponto de vista, como se pode observar a partir das análises, a compreensão de temas como frações equivalentes fica prejudicada – semelhantes erros, consequentemente, descaracterizam a resolução de problemas como o exposto na última atividade analisada neste trabalho. Dessa forma, embora os sujeitos da pesquisa sejam alunos jovens e adultos que, em suas vivências, lidam com os racionais, os dados coletados mostram que eles reconhecem uma representação fracionária, mas não compreendem o conceito e as concepções subjacentes.

Da mesma forma, o desenvolvimento da investigação permitiu observar que a maioria dos alunos da turma possui uma excessiva dependência em relação aos professores para realizar suas tarefas, evidenciando um vínculo resistente em favor de um contrato didático prescritivo. Elementos reveladores dessa relação, evidenciada majoritariamente em termos implícitos, puderam ser percebidos quando da ocorrência de efeitos, relatados por Brousseau (1996), como o *Topaze*. Nesse sentido, outro traço digno de nota e de mais amplos tratamentos por meio de outras pesquisas consistiu na dificuldade apresentada pelos sujeitos quando convidados a explicar seus procedimentos de resolução, revelando outra tensão, relativa ao processo de produção de conjecturas em torno de uma proposta de resolução e a compreensão dos algoritmos empregados nessa iniciativa.

Claramente surgiram, nessas oportunidades, elementos reveladores da fragilidade dos esquemas conceituais relativos aos números fracionários, calcados em uma aprendizagem que se revelou fragmentada e descolada dos significados. Nesse sentido, a necessidade de fazer os desenhos sempre da mesma forma ou de seguir 'protocolos' de resolução muitas vezes não aplicáveis às situações em tela parecem indicar a constituição de obstáculos de natureza didática, ligados às escolhas e estratégias docentes, advindos das experiências estudantis dos sujeitos até aquele momento. As situações problematizadas que se apresentaram não encontraram, no arcabouço cognitivo dos sujeitos, recursos para o fomento de conjecturas consistentes, que pudessem ser avalizadas pelo debate com os pares e/ou pelo confronto com os dados específicos.

De qualquer forma, os indícios levantados por meio deste estudo podem ser considerados indicadores de uma situação típica, que caberia aprofundar por meio de estudos mais amplos, apoiados em metodologias diversas – seria interessante, por exemplo, ampliar o número de sujeitos e diversificar os locais de recolha de dados, considerando diversas turmas de EJA, de modo a complementar, de certo modo, as limitações que este estudo apresenta. Assim, vê-se o tema aqui tratado como um campo aberto a maiores e muito necessárias perquirições.

Referências

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria da Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Brasília, 1997.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v.4, n.2, p.165-198, 1983.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, v.7, n.2, p.33-116, 1986.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, J. (Org.).

Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Horizontes Pedagógicos. 1996. p.35-113.

BROUSSEAU, G. *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas:* conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BARDIN, L. *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70, LDA, 2009.

CAMPOS, T.; JAHN, A. P.; SILVA, M. C. L.; SILVA, M. J. F. *Lógica das equivalências*. Relatório de pesquisa não publicado. PUCSP, 1995. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_22/logica_equivalencias.pdf>. Acesso em 19 out. 2015.

CAVALCANTI, E. M. S.; GUIMARÃES, G. L. *Diferentes significados de fração:* análise de livros didáticos das séries iniciais. Recife: 2007. Disponível em: <http://www.ufpe.br/ce/images/Graduacao_pedagogia/pdf/2007.2/diferentes%20significados%20de%20frao.pdf>. Acesso em 19 out. 2015.

D'AMORE, B. *Elementos de Didática da Matemática*. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia:* saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. A fração na perspectiva do professor e do aluno das séries iniciais da escolarização brasileira. *Boletim de Educação Matemática*, v.21, n.31, 2010.

MERLINI, V. L. O conceito de fração em seus deferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª série do Ensino Fundamental. *Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)*. São Paulo: PUCSP, 2005.

SILVA, B. A. Contrato Didático. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Educação Matemática:* uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2008.

SILVA, M. J. F. Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a Quinta Série. *Tese (Doutorado em Educação Matemática)*. São Paulo: PUCSP, 2005.

SILVA, M. J. F. *As concepções de números fracionários*. Porto Alegre: Instituto de Matemática UFRGS 2004. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/def_mat_concepfracoes1.pdf>. Acesso em 19 out. 2015.

SILVA, M. J. F. Sobre a introdução do conceito de número fracionário. *Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática)*. São Paulo: PUCSP, 1997.

VASCONCELOS, I. C. P. Números fracionários: a construção dos diferentes significados por alunos de 4ª a 8ª séries de uma escola do Ensino Fundamental. *Dissertação (Mestrado em Educação)*. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007.

Gerson Pastre Oliveira – PUCSP, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. E-mail: gpastre@pucsp.br

Edinalva Rodrigues Ferreira – Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. E-mail: nalvarodrifer@hotmail.com