

NÚMEROS IRRACIONAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: DOCUMENTOS CURRICULARES E CONHECIMENTOS DE ALUNOS BRASILEIROS E FRANCESES¹

Irrational numbers in Basic Education: Curriculum documents and knowledge of Brazilian and French students

Veridiana Rezende

Clélia Maria Ignatius Nogueira

Resumo

Apresentamos neste artigo parte dos resultados de uma pesquisa que teve como objetivo analisar conhecimentos relacionados aos números irracionais mobilizados por alunos brasileiros do Ensino Fundamental, Ensino Médio e níveis correspondentes franceses, respectivamente, *Collège* e *Lycée*. Como procedimentos metodológicos, realizaram-se entrevistas individuais, que foram filmadas e envolveram resolução de atividades matemáticas. Os resultados apontam que, independentemente de os números irracionais estarem ou não explícitos nos currículos e livros didáticos, os conhecimentos mobilizados por alunos do Ensino Fundamental e *Collège*, e alunos do Ensino Médio e *Lycée* (TES), relacionados aos números irracionais, são equivalentes, não sendo possível apontar diferenças significativas entre alunos desses dois países. De acordo com as análises, é a experiência e a diversidade de situações matemáticas que influenciam na compreensão dos números irracionais, pois foram os alunos franceses do *Lycée* (TS) que apresentaram respostas mais precisas, com menores indicativos de erros.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Educação Básica. Conhecimentos.

Abstract

It is presented in this paper the results of a research whose goal was to analyze the knowledge related to the irrational numbers done by Brazilian and French students who are concluding elementary school, high school and French corresponding levels, *Collège* and *Lycée*. As methodological procedures, it was done some personal interviews which were recorded and some mathematical activities were solved as well. The results indicate that, whatever irrational numbers are or not stated on the curriculum and textbooks, the knowledge presented by the students related to irrational numbers are similar, therefore it is not possible to indicate significant differences between Brazilian and French students. According to the analysis, it is the experience and the diversity of mathematical situations that influence the understanding of irrational numbers, so the French students of the *Lycée* (TS) had more precise answers, less indicative of errors related to irrational numbers.

Keywords: Mathematics Teaching. Basic Education. Knowledge.

¹ Este artigo é uma ampliação do texto apresentado no VI SIPEM, 2015.

Introdução

Apresentamos neste trabalho parte dos resultados da tese² de doutorado de uma das autoras, sob orientação da outra, que teve como objetivo principal analisar conhecimentos mobilizados por alunos brasileiros e franceses relacionados aos números irracionais.

Esta investigação foi motivada por uma das autoras ao identificar que seus alunos do 4º ano de Licenciatura em Matemática apresentavam incompreensões relacionadas aos números racionais, irracionais e reais, sendo que os maiores equívocos estavam relacionados aos números irracionais. As incompreensões dos alunos eram tão elementares, tais como erros ao classificar os números em racionais ou irracionais, erros relacionados à natureza do número π , sobre a inclusão dos conjuntos numéricos, entre outras questões que devem ser estudadas, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino de Matemática (PCN) (BRASIL, 1998), a partir do 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental.

Considerando esses fatos, buscou-se investigar conhecimentos relacionados aos números irracionais de alunos que finalizavam os três níveis de ensino: Fundamental, Médio e Superior de Matemática, com a intenção de analisar as diferenças e semelhanças que poderiam surgir nas respostas de alunos desses três níveis de ensino. Ao iniciar essa investigação no Brasil, surgiu a possibilidade de se realizar parte da pesquisa na França. Sendo assim, e considerando as diferenças culturais e entre os sistemas de ensino desses dois países, sobretudo no que se refere aos números irracionais, como será especificado no decorrer deste texto, ampliaram-se os sujeitos da pesquisa para investigar os conhecimentos relacionados aos números irracionais de alunos dos sistemas de ensino brasileiro e francês.

Nesse contexto, os sujeitos da pesquisa foram 21 alunos brasileiros que estavam em fase de conclusão do Ensino Fundamental, Médio e Licenciatura em Matemática, e 21 alunos franceses de

níveis de ensino correspondentes, *Collège*, *Lycée* e Licenciatura em Matemática. No entanto, para este artigo o foco está na apresentação da estrutura dos sistemas de ensino investigados, com destaque para a abordagem dos números irracionais nos documentos curriculares da Educação Básica do Brasil e da França. Na sequência, será exibida parte dos resultados das entrevistas realizadas apenas com os alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio e os correspondentes níveis no sistema de ensino francês. A coleta de dados ocorreu por meio de entrevistas semiestruturadas, individuais, que foram gravadas em áudio e vídeo, com atividades matemáticas previamente elaboradas para os alunos resolverem.

A pesquisa foi fundamentada na teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud (VERGNAUD, 1990), teoria de desenvolvimento cognitivo que adota o pressuposto de que o conhecimento se adapta e se desenvolve com o tempo e em função das situações que o sujeito vivencia, sendo reelaborada a cada nova situação enfrentada. Ainda, com base em Vergnaud (1990), o estudo realizado refere-se ao campo conceitual dos números irracionais, considerando Campo Conceitual como um conjunto de situações, conceitos, representações simbólicas, propriedades e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas.

A seguir, apresentamos os documentos curriculares, os níveis de ensino e a abordagem dos números irracionais dos documentos curriculares da Educação Básica de ambos os países envolvidos na pesquisa, buscando explicitar as semelhanças e diferenças no que se refere ao estudo dos números irracionais no Brasil e na França.

Documentos curriculares, níveis escolares e os números irracionais nos sistemas de ensino brasileiro e francês

Os sistemas de ensino brasileiro e francês apresentam algumas semelhanças e diferenças em suas estruturas. Tanto o sistema de ensino brasileiro quanto o sistema de ensino francês consiste de cinco anos de educação infantil não obrigatória, doze anos de escolaridade obrigatória e ensino universitário não obrigatório. Uma síntese dos níveis desses dois sistemas de ensino é apresentada no Quadro 1.

² Tese de doutorado defendida no ano de 2013. Esta pesquisa contou com bolsas de estudo da Fundação Araucária – Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Paraná – e auxílio financeiro e bolsas de estudo do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) para o período de estágio de doutorado sanduíche realizado na Universidade Lille 3, França.

Quadro 1 – Correspondências entre os sistemas de ensino brasileiro e francês.

SISTEMA DE ENSINO BRASILEIRO			SISTEMA DE ENSINO FRANCÊS		
Nível de escolaridade	Duração	Idade	Nível de escolaridade	Duração	Idade
Educação infantil	5 anos (não obrigatório)	De 0 a 5 anos	Escola maternal	5 anos (não obrigatório)	De 0 a 5 anos
Ensino Fundamental: Anos iniciais	5 anos	De 6 a 10 anos	Escola elementar	5 anos	De 6 a 10 anos
Ensino Fundamental: Anos finais	4 anos	De 11 a 14 anos	<i>Collège</i>	4 anos	De 11 a 14 anos
Ensino Médio	3 anos	De 15 a 17 anos	<i>Lycée</i>	3 anos	De 15 a 17 anos

Fonte: autoras desta pesquisa.

Para complementar as informações sobre os níveis de ensino da Educação Básica brasileira e francesa, elaboramos o Quadro 2, que consiste

das nomenclaturas correspondentes a cada ano de escolarização, desde o primeiro ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio.

Quadro 2 – Nomenclaturas dos sistemas de ensino brasileiro e francês.

SISTEMA DE ENSINO BRASILEIRO	SISTEMA DE ENSINO FRANCÊS
Ensino Fundamental: Anos iniciais	Escola elementar
1º ano	Curso Preparatório ou CP
2º ano	Curso Elementar 1º ano ou CE1
3º ano	Curso Elementar 2º ano ou CE2
4º ano	Curso Médio 1º ano ou CM1
5º ano	Curso Médio 2º ano ou CM2
Ensino Fundamental: Anos finais	<i>Collège</i>
6º ano	<i>Sixième</i>
7º ano	<i>Cinquième</i>
8º ano	<i>Quatrième</i>
9º ano	<i>Troisième</i>
Ensino Médio	<i>Lycée</i>
1º ano do Ensino Médio	<i>Seconde</i>
2º ano do Ensino Médio	<i>Première</i>
3º ano do Ensino Médio	<i>Terminale</i>

Fonte: autoras desta pesquisa.

Especificamente em relação ao nível correspondente ao Ensino Médio, existem modalidades diferentes nesses dois países. No Brasil, além do

Ensino Médio, que oferece uma educação geral para todos, modalidade mais frequente nas escolas brasileiras, e que busca preparar os estudantes tan-

to para a vida cotidiana quanto para o vestibular, existem cursos de nível médio de educação profissional e tecnológica, com duração de três ou quatro anos, destinados aos estudantes que concluíram o Ensino Fundamental. Como exemplos de cursos dessa modalidade de ensino citam-se os cursos em Alimentos, Contabilidade, Informática, Programação de Jogos Digitais, Mecânica, entre outros; e curso de Formação de Docentes, também com duração de quatro anos, que habilita para a docência na educação infantil e nos anos iniciais.

Na França, existem três tipos de *Lycée*: o geral, o tecnológico e o profissional. O geral e o tecnológico preparam os alunos principalmente para entrar na universidade, e o *Lycée* profissional prepara os alunos para a vida profissional. A *Seconde* é o ano escolar comum para todos os alunos; é nesse momento que os alunos escolhem o tipo de *Lycée* em que vão continuar seus estudos, seja pela via geral ou tecnológica. Contudo, mesmo se o aluno faz a opção pelo *Lycée* geral, que o prepara para a entrada na universidade, após cursar a *Seconde*, ele deve escolher uma das três opções para cursar essa modalidade de ensino: (i) *Économique et Social* (E.S.), especialidades de escolhas: Ciências Econômicas e Sociais, Matemática, Línguas; (ii) *Littéraire* (L), especialidades de escolhas: Letras Clássicas, Letras e Línguas, Letras e Artes, Letras e Matemática; (iii) *Scientifique* (S), especialidade de escolhas: Matemática, Física-química, Ciências da vida e da terra, Ciências do engenheiro. Desse modo, o *Lycée* geral proporciona aos alunos franceses amplo conhecimento específico da área que pretendem seguir na universidade. Os alunos que desejam realizar o ensino superior na área de ciências exatas, como Matemática, por exemplo, devem optar pelo *Lycée Scientifique*, opção de ensino que propicia maior ênfase em disciplinas dessa área.

Quanto aos documentos que norteiam a educação básica desses dois países, temos no Brasil os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), as diretrizes de alguns estados, como é o caso do Estado do Paraná, que possui as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (DCE) para cada disciplina, que norteiam os conteúdos e metodologias para os professores dos anos Finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio. Além disso, cada instituição de Ensino Fundamental e Médio possui suas próprias Propostas

Pedagógicas Disciplinares (PPD), documentos elaborados em conjunto pelos professores das disciplinas de cada instituição.

Na França existe um único documento nacional para cada nível de ensino, denominado *Programmes*. Esses documentos contêm os conhecimentos essenciais e os métodos aos quais os alunos devem ser submetidos no decorrer de sua aprendizagem, e devem ser seguidos por todas as instituições de ensino, sejam elas públicas ou privadas.

Para nossa pesquisa, que se refere aos conhecimentos de números irracionais mobilizados por alunos desses dois países, buscou-se saber, de acordo com esses documentos curriculares, em que momento do ensino e com quais abordagens os números irracionais fazem oficialmente parte do currículo escolar dos alunos brasileiros e franceses.

No Brasil, no que se refere ao Ensino Fundamental, o conteúdo números irracionais é explicitado no currículo da Educação Básica, e deve ser ensinado no quarto ciclo do Ensino Fundamental, que corresponde aos 8º e 9º anos desse nível de ensino (BRASIL, 1998). Nesse ciclo, os conteúdos são apresentados em quatro blocos: Números e operações; Espaço e formas; Grandezas e medidas; Tratamento da informação.

No que concerne ao estudo dos números, os objetivos para o quarto ciclo do Ensino Fundamental, segundo os PCN (1998), são:

- Ampliar e consolidar os significados dos números racionais a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos e reconhecer que existem números que não são racionais.
- Resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.
- Selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo com números naturais, inteiros, racionais e irracionais. (BRASIL, 1998, p.81)

Segundo os PCN (BRASIL, 1998), no quarto ciclo é necessária a ampliação dos significados

dos números por meio do reconhecimento da existência dos números irracionais. De acordo com esse documento, é importante que o aluno vivencie situações em que os números racionais não são suficientes para resolvê-las, tornando-se necessária a consideração de outros números: os números irracionais. Recomenda-se que no ensino dos números irracionais não sejam enfatizados os cálculos com radicais e que o aluno:

[...] identifique o número irracional como um número de infinitas casas decimais não periódicas, identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados, reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros; conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções geométricas com régua e compasso. Esse trabalho inicial com os irracionais tem por finalidade, sobretudo, proporcionar contraexemplos para ampliar a compreensão dos números. (BRASIL, 1998, p.83)

Nos PCN também são apresentadas aos professores orientações didáticas para a abordagem dos irracionais em sala de aula, no que se refere à medida de números irracionais, à prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$, às aproximações sucessivas do número π , ao número π como razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, possibilidades de cálculos aritmético e algébrico com números irracionais (BRASIL, 1998).

No que diz respeito aos números irracionais, os PCN alertam que seu ensino por meio exclusivamente dos radicais não tem contribuído para o desenvolvimento desse conceito, e que um ensino formal desse conteúdo nessa fase de escolaridade também não é adequado. Nesse sentido, apresentam as indicações que julgam adequadas para a abordagem desse conceito (BRASIL, 1998, p.106-107):

- O estudo dos números irracionais pode ser introduzido por meio de situações-problema que evidenciem a necessidade de outros

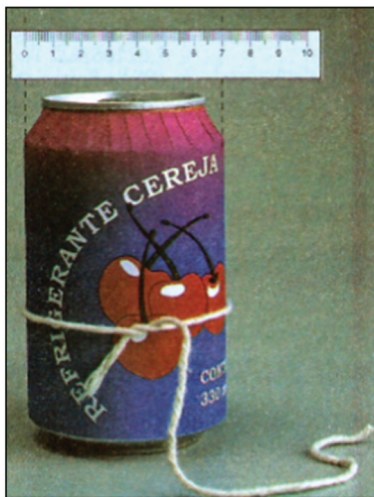
números além dos racionais. O problema clássico de encontrar o comprimento da diagonal de um quadrado, tomando o lado como unidade, que conduz ao número $\sqrt{2}$. Nesse caso, pode-se informar (ou indicar a prova) da irracionalidade de $\sqrt{2}$, por não ser uma razão de inteiros. O problema das raízes quadradas de inteiros positivos que não são quadrados perfeitos, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc., poderia seguir-se ao caso particular de $\sqrt{2}$.

- Outro irracional que pode ser explorado no quarto ciclo é o número π . O número π nessa fase do aprendizado aparece como a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro.
- Deve-se estar atento para o fato de que o trabalho com as medições pode se tornar um obstáculo para o aluno aceitar a irracionalidade do quociente entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, uma vez que ele já sabe que as medições envolvem apenas números racionais.
- É possível, no entanto, propor situações que permitam aos alunos várias aproximações sucessivas de π . Ao trabalhar com essas aproximações, é interessante usar diferentes calculadoras e informar os alunos a respeito dos cálculos que são feitos em computadores de grande porte, que produzem o valor de π com milhões de dígitos sem que haja o aparecimento de um período na expansão decimal.
- Com relação aos cálculos aritmético e algébrico com números irracionais, configuram-se duas possibilidades: Numa delas o aluno deve ser orientado a efetuar os cálculos seguindo regras operatórias análogas às que são válidas para os racionais. Esse fato pode conduzir, inclusive, à obtenção de infinitos irracionais por meio das operações fundamentais. Por exemplo, explorar números na forma $(a+b)\sqrt{2}$, com a e b racionais, pode con-

tribuir para a superação da ideia equivocada de que há poucos irracionais. Uma segunda possibilidade é a de efetuar cálculos com os irracionais por meio de aproximações racionais. Nesses casos apresenta-se uma situação apropriada para tratar o conceito de arredondamento e utilizar as calculadoras.

Em relação ao número π , assim como sugere os PCN, é importante o professor ficar atento ao fato de que atividades relacionadas a medições de objetos redondos no que se refere ao comprimento da circunferência e do diâmetro com o intuito de se explorar o número π , pode tornar-se um obstáculo para os alunos compreenderem sobre a irracionalidade desse número. Ademais, não é raro encontrar atividades dessa natureza em livros didáticos brasileiros. Como exemplo, cita-se a obra do 8º ano da coleção *A Conquista da Matemática*³, na qual, na seção intitulada *Um irracional importante: o número π* propõe uma atividade em que os alunos devem medir o diâmetro e a circunferência de alguns objetos circulares tais como moeda, lata de refrigerante e pneu e determinar a razão entre estas duas medidas que resultam aproximadamente 3,14...

Figura 1 – Atividade número π .



Fonte: Giovani Júnior e Castrucci (2009).

Segundo os autores dessa obra, esse fato se repete para qualquer circunferência, e esse valor é representado pela letra grega π . De acordo com os PCN (BRASIL, 1998), esse fato pode induzir os alunos a compreenderem o número π como um número racional, pois os resultados das medidas obtidas com os objetos circulares são aproximações do número π que resultam em números racionais, e que dependem da espessura do barbante utilizado para a medição, de precisão e condições da medição que podem conduzir os alunos a contradições e equívocos, prejudicando a aprendizagem sobre o número π . Ressalta-se que atividades como essa não foi encontrada nas obras analisadas francesas do *Collège* (nível correspondente ao Ensino Fundamental).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), os conteúdos a serem ensinados nesse nível de ensino são apresentados em três eixos: Álgebra: números e funções; Geometria e medidas; Análise de dados. No que concerne aos números, o objeto de estudo é o campo dos números reais, e eventualmente o conjunto dos números complexos. “Os procedimentos básicos desse tema se referem a calcular, resolver, identificar variáveis, traçar e interpretar gráficos e resolver equações de acordo com as propriedades das operações no conjunto dos números reais e as operações válidas para o cálculo algébrico” (BRASIL, 2000, p.120-121). No que concerne especificamente aos números irracionais, os PCNEM apontam que esses números devem estar relacionados com geometria e medidas, e que nessa etapa é necessário que o aluno seja capaz de diferenciar valores exatos e aproximados de acordo com os instrumentos disponíveis.

Ao contrário da abordagem nos documentos curriculares brasileiros, na França a expressão números irracionais não é mencionada nos *Programmes* do *Collège* e do *Lycée*. No entanto, é possível perceber que, embora sem formalizar e sem mencionar os números irracionais, os alunos franceses têm os primeiros contatos com esses números na *Quatrième* (corresponde ao 8º ano), no estudo do teorema de Pitágoras, uma vez que, dependendo dos valores considerados para as medidas dos lados dos triângulos retângulos, podem surgir cálculos com números irracionais algébricos, isto é, números da forma \sqrt{n} , sendo n um número inteiro positivo que não é quadrado

³ GIOVANI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. *A conquista da Matemática*. Ensino Fundamental, 8º ano. São Paulo: FTD, 2009.

perfeito. Esse fato pode ser percebido nos livros didáticos franceses da *Quatrième*.

Nos *Programmes* da *Troisième* (corresponde ao 9º ano) (FRANCE, 2008) também são percebidos indicativos do estudo dos números irracionais no campo Números e Cálculos e no campo Geometria. No campo Números e Cálculos é solicitado que os alunos conheçam cálculos elementares sobre radicais (raiz quadrada de um número positivo; produto e quociente entre dois radicais), resolvam equações do segundo grau da forma $x^2 = a$, sendo a um número positivo, estudem sobre propriedades geométricas elementares de figuras planas e de sólidos: quadrado, retângulo, losango, paralelogramo, triângulo, círculo, cubo, paralelepípedo retângulo, cilindro, esfera.

Desse modo, embora os números irracionais não estejam explicitamente citados nos *Programmes* do *Collège*, eles fazem parte dos estudos escolares dos alunos do *Collège*. Como exemplo, citamos os números irracionais algébricos que são estudados por meio do teorema de Pitágoras, raízes quadradas, soluções de equações do segundo grau, cálculos de áreas de figuras planas, relações trigonométricas. O número irracional transcendente π também é utilizado nesse nível de escolarização em cálculos envolvendo área e perímetro do círculo, área e volume de sólidos redondos como o cilindro e a esfera. De acordo com uma das coleções de livros analisada,⁴ notamos que as primeiras vezes em que o número π aparece nos estudos do *Collège* é na *Sixième*, nível correspondente ao sexto ano do Ensino Fundamental, em tarefas relacionadas a áreas e perímetros de círculos e circunferências. O símbolo do número π é utilizado nas fórmulas dessas figuras geométricas, e sua aproximação, o número 3,14, é utilizada sempre que necessário, mas com o devido cuidado para que seja indicado como uma aproximação e não como uma identificação entre os números π e 3,14.

Nos *Programmes* da *Troisième* (FRANCE, 2008) também são percebidos indicativos do conceito de números irracionais no campo Números e Cálculos e no campo Geometria. No campo Números e Cálculos, é solicitado que os alunos conheçam:

- Números inteiros e racionais (divisor comum entre dois inteiros; frações irredutíveis; operações sobre os números relativos em escrita fracionária).
- Cálculos elementares sobre os radicais (raiz quadrada de um número positivo; produto e quociente de dois radicais). As competências neste campo devem ser:
- Saber que, se a designa um número positivo, \sqrt{a} é o número positivo cujo quadrado é a e utilizar as igualdades: $(\sqrt{a})^2 = a, \sqrt{a^2} = a$.
- Determinar, por meio de exemplos numéricos, os números x tal que $x^2 = a$, sendo a um número positivo.

E, de acordo com o campo Geometria, os alunos devem estudar sobre:

- Propriedades geométricas elementares de figuras planas e de sólidos: quadrado, retângulo, losango, paralelogramo, triângulo, círculo, cubo, paralelepípedo retângulo, cilindro, esfera.

Provavelmente decorre dessas situações relacionadas aos números irracionais que autores de livros didáticos de *Troisième*⁵ definam números irracionais no capítulo específico sobre Raízes Quadradas de suas respectivas obras e, algumas vezes, insiram fatos históricos e atividades sobre o número de ouro.

Sendo assim, não se pode negar que são várias as situações presentes no processo escolar dos alunos franceses que propiciam conhecimentos sobre os números irracionais, em particular sobre os irracionais algébricos e o transcendente π .

No que se refere ao *Lycée*, a partir de setembro de 2010 começou a vigorar um novo *Programme* da *Seconde* (FRANCE, 2009), no qual os conjuntos numéricos não são mencionados. Por consequência, os livros didáticos editados depois desse período não apresentam nomenclaturas e propriedades dos conjuntos numéricos, com o primeiro capítulo dos livros didáticos lançados após a reforma de 2009 partindo diretamente do

⁴ *Collection Sésamath. Mathématiques 6e*. Editora Génération 5, France, 2015.

⁵ BRAULT, R. et al. *Collection Phare. Mathématiques 3e*. Editora Hachette Éducation, Paris, 2008.

CUAZ, L. et al. *Collections Prisme.Math 3e*. Ed. Berlin, Paris, 2008.

MALAVAL, J. et al. *Coleção Transmath.Troisième*. Editions Nathan, Paris, 2008.

conteúdo *funções*, sem mencionar os conjuntos numéricos.

Considerando o estudo realizado no que se refere à presença e/ou ausência dos números

irracionais nos documentos curriculares e livros didáticos de ambos os países contemplados na pesquisa, elaboramos uma síntese apresentada no Quadro 3, disponibilizado a seguir.

Quadro 3 – Síntese da presença ou não dos números irracionais nos currículos brasileiro e francês.

Nível	Brasil	França
Ensino Fundamental	Presença do conceito de números irracionais no currículo oficial de Matemática. Por consequência: <ul style="list-style-type: none"> Números irracionais são explicitados nos livros didáticos de 8º e 9º ano. 	Ausência do conceito de números irracionais no currículo oficial de Matemática. Por consequência: <ul style="list-style-type: none"> Na 4º, durante do estudo do teorema de Pitágoras e aplicações, nota-se a presença dos números irracionais algébricos sem explicitá-los e sem nomeá-los. Na 3º existe a presença dos números irracionais algébricos no estudo das raízes quadradas e do número π no estudo de figuras planas e sólidos geométricos. Porém, a explicitação ou não desse conceito fica a cargo dos autores de livros didáticos e professores de Matemática.
Ensino Médio	Presença do conceito de números irracionais no currículo oficial de Matemática. Por consequência: <ul style="list-style-type: none"> Números irracionais são explicitados nos livros didáticos do 1º ano no decorrer do estudo dos conjuntos numéricos. 	Ausência do conceito de números irracionais no currículo oficial de Matemática. Por consequência: <ul style="list-style-type: none"> Até o ano letivo de 2009, os números irracionais eram mencionados nos livros didáticos na seção destinada ao estudo dos conjuntos numéricos. A partir de 2010, a explicitação desses números está ausente dos livros didáticos.

Fonte: autoras desta pesquisa.

Assim, notamos que, em relação ao sistema de ensino brasileiro, pode-se afirmar que o estudo dos números irracionais é oficialmente explicitado nos PCN de Matemática para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1998), inclusive com propostas e sugestões para o professor explorar esse conteúdo em sala de aula, no quarto ciclo desse nível escolar. No que se refere ao Ensino Médio, apesar de os números irracionais não serem enfatizados pelos PCN, os livros didáticos e as Propostas Pedagógicas Curriculares dos colégios, que também foram analisadas para essa pesquisa, mencionam esse conceito ao revisar e aprofundar o estudo dos conjuntos numéricos e suas operações.

No que diz respeito ao sistema de ensino francês, o conceito *números irracionais* não é explicitado nos *Programmes* do *Collège* e do *Lycée*, ficando a cargo do professor de Matemática e dos autores de livros didáticos explicitarem ou não este conteúdo. No entanto, na *Quatrième*, por meio do teorema de Pitágoras, e na *Troisième*, por meio do capítulo sobre Raízes Quadradas ou no bloco de Geometria, em conteúdos relacionados às figuras geométricas planas e aos sólidos geométricos, não há como negar a presença de

números irracionais algébricos e do número π . No decorrer do estudo das raízes quadradas, alguns autores de livros didáticos, assim como Malaval et al. (2003)⁶, chegam a mencionar e a definir os números irracionais como sendo aqueles que não são racionais.

Desse modo, embora exista diferença no que se refere à presença explícita e formal do conteúdo números irracionais nos documentos curriculares desses dois países, é possível identificar que em ambos os alunos vivenciam situações relacionadas a esse conceito no decorrer do processo escolar, mobilizando conhecimentos similares, conforme os resultados obtidos na investigação realizada que são descritos a seguir.

A pesquisa: conhecimentos de alunos brasileiros e franceses da Educação Básica relacionados aos números irracionais

Neste texto, apresentamos uma análise sucinta contendo os principais resultados de parte

⁶ MALAVAL, J. et al. *Coleção Transmath.Troisième*. Editions Nathan, Paris, 2008.

das entrevistas realizadas com alunos brasileiros e franceses do Ensino Fundamental e Ensino Médio, e níveis correspondentes franceses. As informações analisadas foram obtidas mediante a realização de entrevistas individuais, sustentadas na resolução de nove atividades pelos alunos, que foram filmadas.

Cada atividade do instrumento de pesquisa estava associada a pelo menos uma das ideias base de número irracional, conforme estabelecidas por Rezende (2013), e foram elaboradas de modo que a cada atividade o grau de complexidade aumentava, no sentido de ampliar conceitos, representações simbólicas e propriedades envolvidas.

Além disso, na pesquisa original foram levados em consideração pressupostos de Vergnaud (1990), conforme os quais, para a compreensão de um conceito, o sujeito deve vivenciar uma diversidade de situações relacionadas a esse conceito.

Durante as entrevistas realizadas individualmente, procurou-se, como sugere Carraher (1989, p.32), “[...] acompanhar o raciocínio de cada sujeito, estando atenta ao que o sujeito diz ou faz, sem corrigir automaticamente as respostas dadas pelo sujeito de acordo com seu raciocínio e sem completar o que o sujeito diz”, oportunizando que o sujeito formasse suas conclusões.

Para as respostas de cada atividade, foram solicitadas justificativas, permitindo que os sujeitos demonstrassem seu nível de compreensão. Procuraram-se meios de esclarecer as ambiguidades surgidas nas respostas. Com esse modo de conduzir as entrevistas, juntamente com os pressupostos teóricos de Vergnaud (1990), foram analisadas as informações buscando identificar os conhecimentos implícitos nas respostas dos sujeitos, de forma a atingir o objetivo da pesquisa. No entanto, para este texto, optamos por apresentar as principais discussões realizadas sobre quatro atividades, aplicadas a sete alunos que finalizavam o Ensino Fundamental, sete alunos do Ensino Médio e de alunos de níveis correspondentes franceses, sendo sete alunos do *Collège*, nove alunos do *Lycée* (quatro alunos de *Terminale*⁷ *Lycée Économique et Social* (TES) e cinco alunos do *Terminale Scientifique* (TS)).

⁷ *Terminale* corresponde a 3º ano do Ensino Médio.

Para preservar a identidade dos sujeitos colaboradores da pesquisa, os alunos foram identificados por uma sigla correspondente a uma letra inicial de seu respectivo nível de ensino e um número que varia de 1 a 7, conforme a legenda a seguir:

Quadro 4 – Siglas dos sujeitos colaboradores da pesquisa.

Níveis do Sistema de Ensino Brasileiro	Sigla
Ensino Fundamental	F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7
Ensino Médio	M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7
Níveis do Sistema de Ensino Francês	Sigla
<i>Collège</i>	C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7
<i>Terminale Economique et Social</i> (TES)	ES1, ES2, ES3, ES4
<i>Terminale Scientifique</i> (TS)	S1, S2, S3, S4, S5

Fonte: autoras desta pesquisa.

As atividades aqui apresentadas correspondem às atividades 2, 3, 4 e 8 do instrumento de pesquisa, e que para o presente texto foram enumeradas de 1 a 4. A escolha por cada uma delas deve-se ao fato de representarem situações, significantes e ideias base (REZENDE, 2013) distintas em relação ao conceito de números irracionais: a atividade 1 refere-se à representação decimal dos irracionais e ao uso da calculadora; a atividade 2 diz respeito à impossibilidade de se representar um irracional por meio de fração entre números inteiros; a atividade 3 trata de soluções algébricas irracionais de equações do segundo grau e a atividade 4 aborda a construção de um segmento de medida irracional.

A atividade⁸ 1 teve por objetivo investigar se os alunos mobilizam corretamente o fato de que os números disponíveis no visor da calculadora são números decimais, e por esse motivo, ao teclar um número irracional na calculadora,

⁸ O instrumento de pesquisa consistiu de nove atividades. No entanto, por considerar que não influenciaria a apresentação dos resultados, para este texto, serão apresentadas as análises das atividades 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9. Porém elas foram reenumeradas de 1 a 7 para dar coerência ao texto.

como por exemplo $\sqrt{2}$, o resultado não passa de uma aproximação desse número. Sendo assim, duas questões iniciais foram lançadas aos alunos: a) Ao teclar o número 2 na calculadora seguido da tecla $\sqrt{\quad}$, qual o número que aparece no visor da calculadora? b) Podemos afirmar que $\sqrt{2}$ é igual ao número que apareceu no visor da calculadora, ou seja, que a igualdade $\sqrt{2} = 1,414213562$ é verdadeira?

Para os alunos que afirmaram que a igualdade $\sqrt{2} = 1,414213562$ é verdadeira, questionava-se: c) Quanto é $\sqrt{2}$ elevado ao quadrado? d) Quanto é 1,414213562 elevado ao quadrado? e) Compare os valores encontrados no item (c) e no item (d). Por que você acha que os resultados foram diferentes?

Para os alunos que afirmaram que a igualdade $\sqrt{2} = 1,414213562$ é falsa, questionava-se: por que você acha que a igualdade não é verdadeira? Você acha que existem mais alguns ou existem muitos números além desses que aparecem no visor da calculadora? Como são estes números? Você acha que eles apresentam um período ou não apresentam um período?

Embora o número $\sqrt{2}$ seja um número irracional utilizado com certa frequência nas aulas de Matemática e livros didáticos, os alunos investigados, brasileiros e franceses, não ofereceram indicativos, em suas respostas, de que compreendessem a natureza desse número. Essa afirmação é baseada no fato de que nenhum aluno do *Collège* e do Ensino Fundamental respondeu que a igualdade $\sqrt{2} = 1,414213562$ é falsa.

Após a realização dos questionamentos previstos para a atividade, predominou nas respostas dos alunos o fato de eles suspeitarem que $\sqrt{2}$ possui mais casas decimais além daquelas que aparecem no visor da calculadora; conforme mostra a fala do aluno francês C4: “Sim, eles são iguais porque a gente tecla na calculadora e este é o resultado. [...] Elevando ao quadrado os resultados são diferentes, mas é bem próximo de dois... acho que tem mais alguns dígitos”. Nesse caso, depois de induzido a elevar ambos os lados da igualdade $\sqrt{2} = 1,414213562$ ao quadrado, o aluno apresenta indicativos de perceber as limitações da calculadora.

No que se refere aos alunos do Ensino Médio e do *Lycée*, dez desses alunos também indicam em suas respostas a decimalização de

$\sqrt{2}$. No entanto, os alunos do Ensino Médio e *Lycée* manifestaram ciência de que a calculadora proporciona a decimalização dos números, conforme a fala do aluno brasileiro M4: *Eu acho que não, porque na calculadora não aparece todos os números. Vai ter mais números.*

No que se refere à irracionalidade de $\sqrt{2}$, parece haver um avanço por parte dos alunos de TS, pois, entre os 12 alunos do Ensino Médio e *Lycée*, apenas as respostas de dois alunos de TS estavam relacionadas à irracionalidade de $\sqrt{2}$, no que se refere às suas infinitas casas decimais não periódicas.

Observa-se que 18 alunos da Educação Básica (de um total de 30 alunos entrevistados), sendo seis alunos brasileiros (de um total de 14 alunos brasileiros entrevistados), três do Ensino Fundamental e três do Ensino Médio, e 12 alunos franceses (de um total de 16 alunos franceses entrevistados), sendo seis do *Collège*, três de TES e três de TS, não souberam dizer se existem muitas ou poucas casas decimais além dos números que aparecem no visor da calculadora: “[...] A calculadora arredonda os resultados e não dá pra saber se tem mais dígitos ou não” (ES2). Segundo Jacquier (1996), o fato de os alunos não reconhecerem as infinitas casas decimais de um número irracional algébrico pode ser justificado por escutarem frequentemente de seus professores “Quando nós utilizamos a tecla $\sqrt{\quad}$ na calculadora, nós obtemos um valor aproximado do número na calculadora” (p.35), ou especificamente em se tratando de $\sqrt{2}$: “Isto que vocês leem na calculadora de vocês não é $\sqrt{2}$ ” (p.44). De acordo com essa pesquisadora, esse tipo de frase pode causar certo mecanismo aos alunos, conduzindo-os a afirmar que a igualdade $\sqrt{2} = 1,414213562$ não é verdadeira, porém, a natureza do número $\sqrt{2}$ não é reconhecida pelos alunos.

A atividade 2, que objetivou identificar os conhecimentos relacionados ao fato que um número irracional não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros, questionava os alunos sobre a existência de dois números inteiros p e q , $q \neq 0$ com os quais podemos escrever $\sqrt{2}$ igual a $\frac{p}{q}$.

Nessa atividade, três alunos brasileiros do Ensino Fundamental e quatro alunos franceses do *Collège* responderam que um número não

inteiro não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros, conforme mostra a fala do aluno F2: “Eu acho que não [que não é possível representar $\sqrt{2}$ como a razão entre dois números inteiros]... porque a gente fez raiz de dois na calculadora e deu um número com vírgula”.

Ainda em relação a este mesmo nível de Ensino – Ensino Fundamental e *Collège* – Cinco alunos responderam que existem dois números inteiros p e $q, q \neq 0$ tal que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, associando $\sqrt{2}$ com um número decimal (racional), como mostra a fala de F3: “O que deu mais aproximado foi 15 dividido por 13... que deu 1,1538”.

Em relação ao desempenho dos alunos do Ensino Médio e alunos do *Lycée* (TES e TS), a possibilidade de avanço desse nível de ensino, perante os alunos do Ensino Fundamental e *Collège*, é indicada apenas nas respostas dos alunos de TS, pois dois desses alunos argumentaram, corretamente, apesar de demonstrarem dúvidas, conforme exemplifica a fala de S2: “Pra mim não... pra mim as raízes não podem ser escritas como a divisão entre 2 inteiros, as raízes não são inteiras”. Já nenhum dos alunos do Ensino Médio e TES responderam corretamente, conforme ilustra a fala do aluno francês ES3: “Não, eu penso que não... são números com vírgula, não são números como 1,2,3,4”.

Com a atividade 3, pretendeu-se investigar se os alunos consideram, ou não, a existência de solução para as equações da forma $x^2 = a$, com $a \in R$, sobretudo quando a não é um número quadrado perfeito, resultando numa solução irracional algébrica. Sendo assim, os alunos foram questionados se as seguintes equações do segundo grau possuem solução no conjunto dos números reais: a) $x^2 = 16$; b) $x^2 = 17$; c) $x^2 = -9$; d) $x^2 = \pi$.

Neste texto, apresentamos as análises realizadas das respostas para as equações b) e d), que dizem respeito aos irracionais.

Quatro alunos do Ensino Fundamental e cinco alunos do *Collège* alegaram que as equações $x^2 = 17$ e $x^2 = \pi$ não possuem soluções, conforme justifica o aluno francês C2: “Não tem solução... porque não tem 17 na tábua de multiplicação”. Quanto a apresentar solução decimal com o auxílio da calculadora para as equações propostas, apenas um aluno brasileiro desse

nível de ensino o fez, dizendo que a solução de $x^2 = 17$ é $x = 4,123105626$.

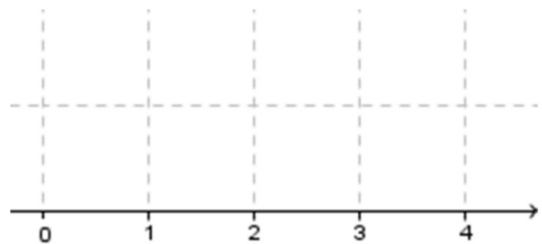
A influência da decimalização proporcionada pela calculadora está mais presente nas respostas dos alunos do Ensino Médio e TES, do que nas dos alunos de Ensino Fundamental, pois quatro alunos do Ensino Médio e dois de TES responderam, equivocadamente, que as soluções das equações $x^2 = 17$ e $x^2 = \pi$ são valores iguais ou aproximados ao número disponibilizado pelo visor da calculadora.

No que diz respeito a considerar corretamente as soluções irracionais algébricas, apenas um aluno brasileiro e dois alunos de TES indicaram considerá-las, pois exibiram como solução das equações $x^2 = 17$ e $x^2 = \pi$ os números $\sqrt{17}$ e $\sqrt{\pi}$, respectivamente. No entanto, é preciso destacar que as soluções negativas $-\sqrt{17}$ e $-\sqrt{\pi}$ não foram mencionadas por esses alunos.

Já nas respostas dos alunos de TS, nota-se avanço no desempenho desses alunos quanto ao domínio numérico para os valores de raízes quadradas, pois, eles consideram como solução os números $\sqrt{17}$ e $\sqrt{\pi}$, bem como as respectivas soluções negativas $-\sqrt{17}$ e $-\sqrt{\pi}$, que não foram citadas pelos alunos já mencionados.

A atividade 4 teve por objetivo analisar os conhecimentos dos alunos relacionados a representar um número irracional algébrico, tal como $\sqrt{2}$, na reta numérica. A intenção era que os alunos representassem o segmento de medida $\sqrt{2} u.c$ na reta, com o auxílio da construção de um triângulo retângulo de catetos unitários, transportando a medida da hipotenusa $\sqrt{2} u.c$ para a reta numérica.

Figura 2 – Representação da reta numérica.



Fonte: autoras desta pesquisa.

No que se refere aos alunos brasileiros e franceses da Educação Básica, entrevistados

nesta pesquisa, pode-se dizer que eles não vislumbram a possibilidade de se representar um número irracional algébrico, tal como $\sqrt{2}$, na reta numérica. Pois 16 alunos de um total de 30 sujeitos, sendo três do Ensino Fundamental, quatro do *Collège*, um do Ensino Médio, quatro do TES e quatro do TS, responderam que não é possível representar $\sqrt{2}$ na reta numérica, conforme exemplifica: F7: “Não. [...] Porque é um número grande demais”. E, os demais 14 alunos da Educação Básica – quatro do Ensino Fundamental, três do *Collège*, seis do Ensino Médio, um do TS – responderam que é possível representar aproximadamente o referido número, conforme ilustrado pela fala de M5, após representar um ponto entre 1 e 2 na reta e escrever o número 1,414213562: “É, da pra representar aproximadamente, né? Exato eu acho que não”.

No entanto, na atividade seguinte do instrumento de pesquisa, que apresentava a construção do caracol pitagórico com a intenção de que os alunos refletissem sobre o método de representar números irracionais algébrico na reta numérica, apenas dois alunos do Ensino Médio demonstraram compreender a construção e representação do segmento de medida $\sqrt{2}$ u.c., enquanto que sete alunos do *Lycée* o representaram corretamente, apresentando avanços, em relação às suas respostas nas atividades precedentes. É preciso destacar que apenas um aluno de TES e um aluno de TS não souberam representar o número $\sqrt{2}$ na reta, porém, disseram que tal representação é possível, como ilustra a fala de S4: *Sim... Mas eu não sei como representar* (o aluno construiu um triângulo retângulo de catetos unitários, mas não chegou a transportar a medida da hipotenusa para a reta).

Conclusões

Os resultados encontrados nesta investigação indicam que, embora os documentos curriculares e livros didáticos brasileiros explicitem os números irracionais, sendo que os livros didáticos de 8º ou 9º ano apresentam pelo menos um capítulo para o estudo dos conjuntos numéricos, e que no currículo e nos livros didáticos franceses a expressão números irracionais não é mencionada, os alunos brasileiros do Ensino Fundamental e os alunos franceses do *Collège*, colaboradores desta pesquisa, não apresentaram

diferenças significativas em suas respostas, e mobilizaram conhecimentos equivocados ou adequados de forma equivalente.

Em relação aos alunos do Ensino Médio e *Lycée* (TES e TS) foram identificadas semelhanças e diferenças em seus desempenhos, com os alunos de TS, apresentando respostas mais precisas, menor frequência de erros e maior indicativo de desestabilização, ou pelo menos de perturbação local, de conhecimentos equivocados. Desse modo, comparando o desempenho dos alunos entrevistados de Ensino Médio, TES e TS, é possível afirmar que existe avanço no desempenho dos alunos de TS, diante de situações do Campo Conceitual dos números irracionais contempladas nesta pesquisa. Esse fato não surpreende, uma vez que os alunos de TS são preparados para ingressar em cursos universitários de Ciências Exatas, recebendo, portanto, maior ênfase nas disciplinas de Matemática, com carga horária desta disciplina mais ampla do que os alunos dos demais *Lycée* e do Ensino Médio brasileiro.

Desse modo, a presente pesquisa mostra que, independente de este conceito estar explícito ou não nos currículos e livros didáticos, de apresentar ou não a definição dos números irracionais aos alunos, de se inserir ou não um capítulo nos livros didáticos para se estudar a natureza dos números – racionais, irracionais, reais –, esses fatores não interferem na aprendizagem dos alunos em relação à natureza dos números. Ao contrário, os resultados da presente investigação apontam que é a experiência escolar, a diversidade de situações matemáticas vivenciadas pelos alunos, e a disponibilidade do professor em apresentar a seus alunos diferentes atividades que favoreçam a desestabilização de conhecimentos errôneos, que vai favorecer a apropriação do conceito de números irracionais.

Referências

- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação, 1998.
- CARRAHER, Terezinha Nunes. *O método clínico: usando os exames de Piaget*. São Paulo: Cortez, 1989.

FRANCE. Bulletin Officiel (B. O.) n° 30 du 23 du juillet 2009. *Programmes des Mathématiques. Classe de Seconde*, 2009.

FRANCE. *Programmes de l'enseignement de Mathématiques*. Bulletin Officiel spécial (B. O.) n° 6 du 28 du août, 2008. Programmes du Collège, 2008.

JACQUIER, I. Quelles conceptions des nombres chez des élèves de troisième? *Petit x*, n.41, Grenoble, IREM, p.27-50, 1996.

REZENDE, V. *Conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses: um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino*. (Tese de Doutorado). Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, v.10, n.2.3, p.133-170, 1990.

Veridiana Rezende – Doutora pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM), professora adjunta do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná (Unespar) – Campus de Campo Mourão. E-mail: rezendeveridiana@gmail.com

Clélia Maria Ignatius Nogueira – Doutora pelo Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual Paulista (Unesp) – Campus de Marília. Docente da Unicesumar. Orientadora desta pesquisa de doutorado. E-mail: voclelia@gmail.com