AS FRAÇÕES NOS LIVROS DIDÁTICOS DO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

The fractions in the textbooks of the sixth grade of Elementary School

Alexandre Marinho
Mônica Cerbella Freire Mandarino

Resumo

O presente artigo contém uma análise da abordagem usada para introduzir o conceito de fração pelos autores de livros didáticos do sexto ano do Ensino Fundamental aprovados no PNLD 2011. O trabalho está fundamentado nas propostas de ensino de frações de pesquisadores como Santos e Rezende (2002), Wu (1998), Nunes e Bryant (1997) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998). Como os objetos de pesquisa eram livros, o procedimento metodológico utilizado foi a análise de conteúdos (BARDIN, 1977). Os resultados desse estudo mostram que, de modo geral, a abordagem utilizada nos livros para introduzir o conceito de fração apoia-se fundamentalmente no modelo parte-todo e desenvolve-se por meio de exemplos, como se estes fossem suficientes para garantir a aquisição do conceito de fração.

Palavras-chave: Fração. Livro didático. Ensino Fundamental.

Abstract

This article is a summary of our dissertation, containing an analysis of the approach used by the authors of textbooks of the sixth grade of Elementary School, approved in PNLD 2011, to introduce the concept of fraction. The work is grounded in the teaching of the proposals by researchers as Santos & Rezende (2002), Wu (1998), Nunes & Bryant (1997) and presents in Parameters National Curriculum (BRASIL, 1998). As research objects were books, the approach used was the content analysis (BARDIN, 1977). The results of this study show that, in general, the approach used in the books to introduce the concept of fraction is based mainly on part-whole model and develops through examples as if they were sufficient to ensure the acquisition of the concept of fraction.

Keywords: Fraction. Textbooks. Elementary School.

Introdução

Ao longo dos anos, a comunidade de Educação Matemática tem se esforçado para produzir trabalhos voltados para o ensino das frações. Wu (1998) considera o ensino das frações um assunto delicado a ser tratado no Ensino Fundamental, dos 6 aos 14 anos, pelo fato de sua definição formal, por meio de classes de equivalência, ser excessivamente abstrata e, portanto, imprópria ao ensino nessa fase de escolarização.

Além disso, o baixo desempenho dos alunos nas avaliações do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e da Prova Brasil é acentuado quando analisamos separadamente os itens que envolvem frações. Foi com base nessa problemática que nos interessamos em estudar que tipo de abordagem é mais frequentemente utilizado para ensinar as frações no Ensino Fundamental. Conhecendo o importante papel que os livros didáticos desempenham nas salas de aula, procuramos responder: que tipo de abordagem os livros didáticos do sexto ano do Ensino Fundamental, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD 2011), privilegiam para introduzir o conceito de fração? Para realizar tal diagnóstico, buscamos investigar os conceitos apresentados e os recursos didáticos utilizados pelos livros quando o objetivo é a aquisição do conceito desse novo número, considerado como uma das ideias mais complexas e importantes a serem tratadas na formação matemática básica (BEHR et al., 1983).

Fundamentação teórica

Os autores dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) afirmam que os alunos chegam ao terceiro ciclo (atual 6º ano) sem compreender os diferentes significados associados às frações. Para eles, as frações assumem diferentes significados dependendo dos diversos contextos em que elas são usadas: relação parte-todo, quociente, operador e razão. Afirma-se também que esses significados não devem ser tratados de forma isolada. Descrevemos, resumidamente, cada um deles a seguir:

Relação parte-todo. Nesse significado, "[...] um todo (unidade) se divide em partes equivalentes. A fração, por exemplo, indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes, é o caso das tradicionais divisões de uma figura geométrica em partes iguais" (idem, p.102). É o caso, também, mais diretamente associado à divisão em partes iguais de uma quantidade de objetos. Segundo os PCN (BRASIL, 1998), nessa situação, supõe-se que "o aluno seja capaz de identificar a unidade que representa o todo (grandeza contínua ou discreta), compreenda a inclusão de classes, saiba realizar divisões operando com grandezas discretas ou contínuas" (idem, p.102).

Quociente. Nesse caso, a fração desempenha o papel de um quociente de um inteiro por outro ($a \div b = \frac{a}{b}$; $b \neq 0$). De acordo com os PCN (BRASIL, 1998) (idem, p.102), essa interpretação diferencia-se da relação parte-todo, "[...] pois dividir uma unidade em 3 partes e tomar 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 unidades em 3 partes iguais. No entanto, nos dois casos, o resultado é dado pelo mesmo número: $\frac{2}{3}$" (idem, p.102).

Razão. A fração é vista como razão quando representa "[...] um índice comparativo entre duas quantidades", ou seja, "[...] quando ocorrem situações do tipo: 2 de cada 3 habitantes de uma cidade são imigrantes, logo $\frac{2}{3}$ da população da cidade é de imigrantes" (idem, p.102). A ideia de razão também está associada a situações que envolvem o conceito de probabilidades, isto é, a chance de sortear uma bola verde de uma caixa em que há 2 bolas verdes e 3 bolas de outras cores é de $\frac{2}{5}$.

Operador. Nesse significado, a fração "[...] desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica. Essa ideia está presente, por exemplo, em problemas do tipo 'que número devo multiplicar por 5 para obter 2'" (idem, p.102-103). Alguns autores (TEIXEIRA, 2008, por exemplo) consideram que situações do tipo "$\frac{m}{n}$ de ..." incluem-se no "significado" operador.

Na contramão da proposta dos PCN (BRASIL, 1998), o pesquisador Wu (1998) sugere trabalhar o conceito de fração por meio da reta numérica, iniciando pela exploração da divisão de qualquer segmento de reta em partes com comprimentos congruentes. Wu (1998) sugere definir fração como ponto na reta numérica e, a partir da ideia de medida, levar o aluno a conceituar as frações como números que ampliam o sistema numérico já conhecido, o conjunto dos naturais. Apesar de Wu (1998) considerar que a introdução de modelos – como um quadrado dividido em quatro partes iguais ou uma torta dividida em seis partes iguais – não causa dano ao ensino, argumenta que seria melhor introduzi-los depois que os alunos se tornarem eficientes na divisão de segmentos de reta e no manuseio das frações na reta numérica. Segundo Wu (1998):

> Uma razão é que nosso raciocínio ao longo do desenvolvimento das frações é feito com a ajuda da reta numérica. Mas há outra razão: a representação de frações da torta, por exemplo, tem o inconveniente de ser desajeitada para representar frações maiores do que 1 porque

> professores e alunos se recusam a desenhar muitas tortas.
>
> Raciocínio feito com o modelo de torta, portanto, tende a acentuar a importância de pequenas frações. Por outro lado, a reta numérica coloca automaticamente todas as frações, grandes ou pequenas, em pé de igualdade para que todas elas possam ser tratadas de maneira uniforme. (WU, 1998, p.2, tradução nossa)

A equipe do Projeto Fundão (SANTOS; REZENDE, 2002) propõe trabalhar o conceito de fração e sua representação decimal antes de conceituar número racional. Defendem um ensino em que o aluno adquira compreensão clara dos conceitos e que evite a memorização de regras, o que leva à resolução de atividades por meio da mecanização de procedimentos. Com base em experiências de sala de aula, a equipe do Projeto Fundão (2002, p.6) acredita, sem pretensões de ignorar os resultados obtidos pelos matemáticos que sistematizaram os conjuntos numéricos, na necessidade de o aluno compreender tal processo de sistematização por meio de sua participação efetiva na resolução de atividades. Para isso, recomendam atividades envolvendo tanto conjuntos discretos quando contínuos, mas iniciando pelo primeiro tipo.

De acordo com Nunes e Bryant (1997), com as frações as aparências enganam, pois embora muitas vezes o aluno consiga resolver as atividades propostas, o entendimento do conceito ainda lhe escapa. Esses autores também criticam abordagens que priorizam regras, procedimentos mecânicos, em detrimento da compreensão dos conceitos. Nesse sentido, criticam a abordagem da relação parte-todo que recorre a figuras geométricas com ênfase na contagem do número de partes pintadas de uma mesma cor e do número total de partes. Para eles, tal abordagem estimula apenas uma espécie de dupla contagem, o que não favorece a compreensão do conceito.

Metodologia

Para analisar a abordagem adotada pelos livros didáticos, recorremos aos procedimentos indicados por Laurence Bardin (1977) para análise de conteúdos. O Quadro 1 apresenta as dez coleções de livros didáticos aprovados no PNLD 2011 que foram objeto de nossa pesquisa.

Quadro 1 – Lista das coleções aprovadas no PNLD 2011.

	Coleção	Autores	Editora
A	Matemática	Edwaldo Bianchini	Moderna
B	A Conquista da Matemática – edição renovada	José Ruy Giovanni Jr. e Benedicto Castrucci	FTD
C	Aplicando a Matemática	Reis e Trovon	Casa Publ. Brasileira
D	Matemática, Ideia e Desafios	Iracema e Dulce	Saraiva
E	Novo Praticando	Imenes e Lellis	Moderna
F	Matemática e Realidade	Iezzi, Dolce e Machado	Saraiva
H	Matemática na Medida Certa	Jacubovick e Centurión	Scipione
I	Projeto Radrix	Jackson da Silva Ribeiro	Scipione
J	Tudo é Matemática	Luiz Roberto Dante	Ática
L	Vontade de Saber Matemática	Souza e Pataro	FTD

Fonte: PNLD 2011.

O processo de análise foi realizado em duas fases, conforme prescreve Bardin (1977):

✓ **1ª fase: pré-análise**

Nessa fase, realiza-se a seleção e a preparação do material que será efetivamente foco de análise, considerado como *corpus* da análise de conteúdos. A seguir, com o *corpus* da pesquisa organizado, fazem-se diversas leituras para dar início à categorização. Segundo Bardin (op. cit., p.96), é nessa fase que o pesquisador estabelece “[...] contacto com os documentos a analisar [...] deixando-se invadir por impressões e orientações”. Assim, os seguintes procedimentos foram realizados:

- seleção do capítulo ou unidade destinado a dar início ao trabalho com as frações, que constituiriam o *corpus* dessa pesquisa;
- cópia da unidade ou capítulo selecionado para possibilitar marcações e anotações durante as leituras;
- identificação da estrutura do capítulo: seções, exemplos, sistematização, atividades, tópicos abordados, etc.;
- leituras sucessivas para identificar a possibilidade de utilização das categorias utilizadas por algum dos autores estudados.

✓ **2ª fase: análise**

Dado que já na pré-análise identificamos que a introdução do conceito de fração ocorre fundamentalmente por meio de exemplos resolvidos e atividades propostas, iniciamos a análise pelo mapeamento dos exemplos e das atividades. Nosso interesse foi compreender como estes (exemplos e atividades) se estruturam e se há alguma sistematização no sentido de levar o aluno a construir o conceito de fração. Nossas primeiras classificações foram por tipo de:

- ilustração usada nos exemplos ou atividades propostas;
- contexto: contínuo ou discreto;
- atividade proposta: simples aplicação ou problematização;
- atividade quanto ao incentivo à participação efetiva do aluno.

Nossas escolhas: um primeiro resultado da pesquisa

Além da classificação proposta nos PCN (BRASIL, 1998), já apresentada resumidamente, outros significados, ideias ou "subconstructos" podem ser encontrados na literatura sobre o ensino de frações. Nossa revisão bibliográfica, tanto dos autores elencados neste artigo quanto de outros (por exemplo, VASCONCELOS; BELFORT, 2006; ROMANATTO, 1999; CANOVA, 2006), evidenciou a necessidade de fazermos escolhas para classificação da abordagem utilizada nos livros analisados. Sem desmerecer cada tipo de subdivisão adotada em outros estudos, decidimos simplificar a categorização que utilizaríamos. Desde a pré-análise percebemos que a diversidade de classificações encontrada na revisão bibliográfica seria desnecessária. Em primeiro lugar, porque os livros não contemplam usos variados desde o capítulo ou a unidade de introdução. Em segundo lugar, porque, mesmo quando subdividem o texto por meio de subtítulos que indicariam a apresentação de diferentes usos das frações, observamos que seria possível classificá-las apenas pela diferenciação do contexto da aplicação.

Assim, decidimos usar inicialmente apenas os contextos – contínuo ou discreto – para classificar os exemplos, as atividades, como também os textos de sistematização. A análise evidenciou que, no caso contínuo, o que de fato ocorre são situações que envolvem medidas de comprimento, área, capacidade, etc., quase sempre ilustradas por figuras geométricas (planas ou espaciais) ou por figuras de objetos como tortas, pizzas, vasilhames,... De outro lado, em todas as obras aborda-se a fração como parte de coleções discretas, consideradas aqui como uma reunião de carros, pessoas, folhas de papel, etc., ou seja, conjuntos de elementos contáveis. Com essa escolha, não consideramos as frações como constructo que possui "vários significados" (BRASIL, 1998) ou "subconstructos" (CANOVA, 2006) e buscamos dar ênfase a outros aspectos da abordagem adotada pelas obras, como passaremos a apresentar nas seções seguintes.

Análise dos recursos didáticos utilizados pelos livros didáticos

Primeiramente vamos discutir os recursos didáticos usados como apoio para introduzir o conceito de fração. Identificamos os seguintes recursos: ilustração de figuras geométricas (FG); ilustração de objetos do cotidiano (bolo, pizza, etc.) (OC); ilustração de uma coleção (CD); desenhos associados à ideia de comprimento (IC); abordagem histórica (AH); material concreto (MC).

Observamos, ainda, os tipos de atividades presentes nas obras: situação que exige a participação efetiva do aluno (AP); aplicação com referência a situações do cotidiano (AC) ou aplicação em situações próprias da Matemática (AM).

No Quadro 2, assinalamos a presença nos livros analisados dos tipos de recursos e de aplicação listados no parágrafo anterior.

Quadro 2 – Tipos de recursos e de aplicação identificados nos dez livros didáticos analisados.

Livro	FG	OC	CD	IC	AH	MC	AP	AC	AM
A	X	X	X	X				X	X
B	X	X	X	X	X	X	X	X	X
C	X	X						X	X
D	X	X	X	X	X		X	X	X
E	X	X	X					X	X
F	X		X			X		X	X
G	X		X					X	X
H	X							X	X
I	X	X		X	X			X	X
J	X	X			X			X	X

Fonte: a pesquisa.

Quanto aos recursos, observamos que todos os livros utilizam situações (exemplos e atividades) envolvendo a partição de figuras geométricas. Quanto ao tipo de atividade, exemplos ou atividades envolvendo o uso das frações para resolver situações do cotidiano ou da própria Matemática também estão presentes em todas as obras. Observando todas as categorias presentes no Quadro 2, apenas o livro B contempla todas elas, e no livro D apenas o uso de material concreto não se faz presente no capítulo introdutório do conceito de frações.

Além de valorizarem a representação de frações por meio de figuras geométricas, verificamos que a mais utilizada é o retângulo, e depois o círculo. Destaca-se que em três dos livros em questão (F, G, H) são usadas apenas figuras geométricas; não foram encontrados outros tipos de figuras (pizza, bolo, etc.).

Para a apresentação de fração de uma coleção de objetos, seis livros trazem ilustração das coleções. Entre eles, três (B, E, F) utilizam fotografias de coleções, e os outros três livros (A, D, G) utilizam desenhos de objetos de uma coleção. No entanto, verificamos que nenhum deles solicita que o aluno utilize material concreto para exemplificar uma coleção. Quanto a esse tipo de abordagem, Santos e Rezende (2002) defendem que os alunos trabalhem a divisão de uma coleção concreta (chapinha, cartões, etc.), dividindo-a em grupos com a mesma quantidade de elementos, antes da representação por meio de desenhos e, principalmente, antes de uma abordagem sem qualquer apoio visual.

Conforme podemos observar no Quadro 2, o uso de desenhos associados à ideia de comprimento (IC) é pouco frequente. Dos dez livros, apenas quatro (A, B, D, I) valorizam a fração em situações de medida de comprimento em suas introduções.

Três livros (B, D, J) usam como recurso uma abordagem histórica das frações, todos fazendo menção ao antigo Egito. Os três mencionam que as frações foram inventadas para auxiliar no processo de medição de terras, quando as enchentes provocadas pelo rio Nilo “desmarcavam” as medições dos terrenos.

A respeito do uso da História da Matemática como recurso didático (AH), no caso das frações, os PCN (1998) sugerem abordar seu uso pelos egípcios, por meio de seus sistemas de medidas. No entanto, alguns historiadores da Matemática (ROQUE, 2012; BOYER, 1974) não trazem dados que confirmem que os egípcios usavam frações para representar medida de comprimento, por meio de corda com nós igualmente espaçados, como se afirma nos livros didáticos mencionados no parágrafo anterior. Verdade histórica ou não, o que nos preocupa de fato é o hiato entre o que vem antes e o que vem depois da abordagem histórica. Não há qualquer articulação entre os assuntos, de tal forma que, após a abordagem histórica, no decorrer do capítulo de introdução, não se usa mais o contexto de medida de comprimento. A sensação é de que a retirada da abordagem histórica não faria diferença alguma.

O incentivo ao uso de materiais concretos foi identificado em apenas dois dos livros (B, F). Em ambos o material concreto é proposto para trabalhar frações correspondentes a uma ou mais partes, com áreas iguais, de uma figura geométrica. No livro F o material concreto é o Tangram, no entanto a obra não propõe atividades que exijam a participação efetiva do aluno. Há apenas ilustrações com peças do Tangram, o que não podemos considerar suficiente para o aluno compreender o processo de repartição do inteiro com aquele tipo de material, especialmente porque a maioria dos demais exemplos de frações de figuras geométricas envolvia partes congruentes. Já a atividade proposta no livro B exige a participação efetiva do aluno na construção do seu conhecimento, orientando que dividam tiras de papel em pedaços com mesma área.

Essa primeira classificação revela um aspecto muito preocupante: dos dez livros, apenas dois (B, D) apresentam atividades que exigem a participação efetiva dos alunos na construção do conhecimento. O livro B traz três atividades propostas, enquanto o livro D propõe apenas uma. Confrontando esse dado com a proposta de Santos e Rezende (2002), pode-se afirmar que a introdução do conceito de fração, da maioria dos livros aprovados pelo PNLD 2011 ainda não leva em conta a recomendação de que o aluno precisa envolver-se na construção de seu conhecimento, por meio de atividades lúdicas, visando estabelecer bases firmes para auxiliar a passagem do concreto para o abstrato. Não temos dúvidas de que apenas exemplos apoiados por ilustrações não são suficientes para o aluno compreender o conceito de fração.

Análise dos contextos utilizados pelos livros didáticos

Iniciamos pelo contexto que envolve área por ser o que dá início à sistematização das frações em todos os livros. Apesar de comprimento, volume, massa e capacidade, entre outras, também serem grandezas contínuas, a presença de situações envolvendo-as é pouco significativa nas obras analisadas. Finalizamos a seção discutindo o tratamento dispensado nas obras a frações de coleções discretas.

Contextos que envolvem medida de área

O contexto mais frequente é o que envolve a divisão da superfície de uma figura geométrica em partes iguais ou a divisão da superfície da ilustração de um objeto, como uma pizza, em partes iguais. Em tais situações, a área total (unidade) é dividida em partes com áreas iguais, quase sempre congruentes. A partir desse tipo de contexto, a maioria dos livros informa ao aluno que cada parte é associada a uma fração com representação $\frac{1}{n}$. Assim, a fração é apresentada, por exemplo, usando a ilustração de um quadrado dividido em quatro partes congruentes, e informa-se que cada parte corresponde a $\frac{1}{4}$ do quadrado.

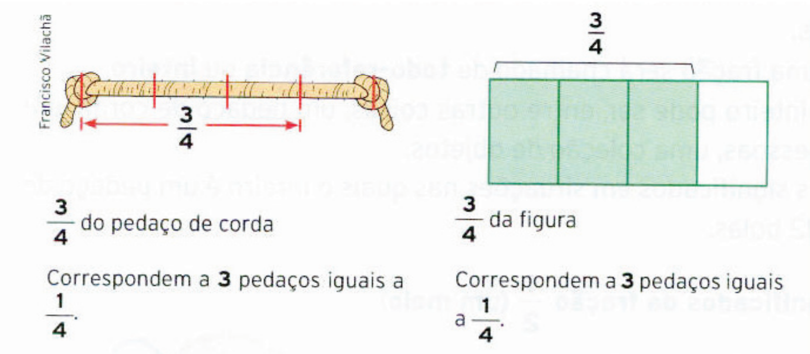
Além de recorrerem às figuras geométricas, como vimos no Quadro 2, também é frequente recorrerem a atividades que remetem a situações do cotidiano como: *Carlota vai comer* $\frac{1}{4}$ *do chocolate. O que significa isso?* (Livro E, p.113). Exemplos desse tipo são acompanhados de ilustrações – nesse caso, ilustração do chocolate dividido em quatro partes iguais, com uma delas destacada. Como conclusão, diz-se que “[...] a quantidade que Carlota vai comer corresponde a uma das 4 partes, ou seja, $\frac{1}{4}$”. (Livro E, p.113).

Logo depois de poucos exemplos dos tipos acima mencionados, a maioria dos livros (A, C, D, F, H, I, J) apresenta a nomenclatura dos termos de uma fração (numerador e denominador), e o vocabulário para leitura do denominador.

Apesar de o recurso mais utilizado ser figuras geométricas planas, divididas em partes congruentes, apenas um dos livros traz uma situação que contribui para o aluno compreender que o que está em jogo é a igualdade das áreas das partes, e que, portanto, as partes não precisariam ter a mesma forma, ou seja, as partes não precisariam ser congruentes. Observamos, também, que não há discussão de assuntos importantes, como o próprio conceito de área, nem do que se deve considerar para que as partes sejam iguais na divisão de coisas como pizzas, bolos e até frutas. Observamos que, dos dez livros, nove apenas mencionam o fato de que “as partes do inteiro são iguais”, como se isso bastasse para um aluno do sexto ano compreender o significado de “partes iguais” em diferentes situações.

Encontramos dois tipos de abordagens para associar uma ou mais partes de uma figura geométrica a uma fração. Uma delas apresenta figuras geométricas divididas em n partes congruentes e dá ênfase ao fato de cada parte corresponder à fração $\frac{1}{n}$, mesmo que a ilustração mostre, por exemplo, a fração $\frac{3}{4}$, como se vê na Figura 1. Esse tipo de abordagem é usado por quatro livros (B, D, F, G).

Figura 1 – Fração da área de uma figura.

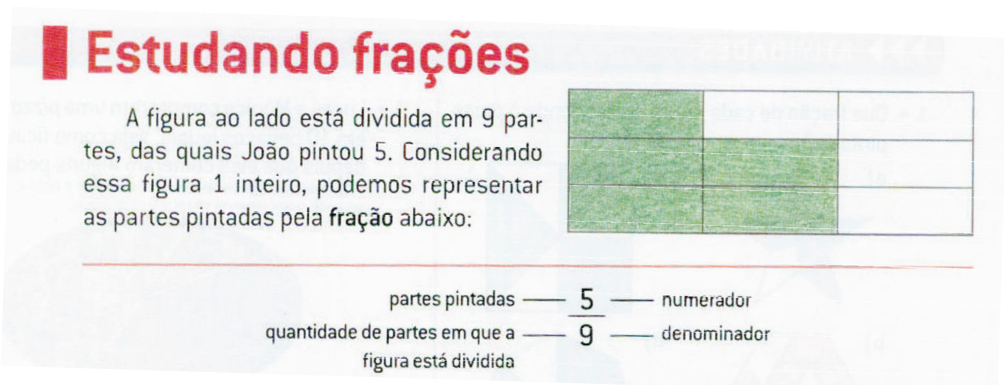


Fonte: Livro D, p.154.

Consideramos que esse tipo de abordagem pode evitar que o aluno determine a fração desejada apenas contando o número de partes pintadas e o número total de partes, o que pode levar a considerar a fração como uma sobreposição de dois números, resultantes das duas contagens, o que cria um obstáculo à compreensão da fração como um número.

O outro tipo de abordagem, que também parte de figuras geométricas divididas em n partes com áreas iguais, é o que leva o aluno a considerar o número m de partes pintadas da mesma cor (o numerador) e o número total n de partes que compõem a figura (o denominador), formando a representação fracionária $\frac{m}{n}$. Esse tipo de abordagem é usado por seis dos livros analisados (A, C, E, H, I, J), como exemplificado na Figura 2.

Figura 2 – Fração da área de uma figura.



Fonte: Livro H, p.115.

Nesse exemplo, a parte pintada de verde do retângulo maior foi associada à fração $\frac{5}{9}$ por uma relação entre o número de partes pintadas e o número total de partes em que o retângulo foi dividido. Não há na obra qualquer referência ao fato de cada parte do retângulo estar associada à fração $\frac{1}{9}$. Como já comentado, esse tipo de abordagem pode levar o aluno a representar corretamente frações de ilustrações como a do exemplo, sem um entendimento do conceito que possa levá-lo posteriormente a compreender a fração como um número. Segundo os estudos de Campos et al. (1995), citados por Nunes e Bryant (1997), nesse tipo de abordagem estimula-se apenas uma espécie de contagem dupla, o que não favorece a compreensão do conceito de fração.

Contexto de medida de comprimento e a reta numérica

Formalmente, a fração no contexto de medida de comprimento seria definida após atribuir um sentido a um segmento de reta $\overline{OA}$, por exemplo, e dividi-lo em partes congruentes. Nesse contexto, cada uma das partes do segmento original corresponde à fração $\frac{1}{n}$. Seja $OA = n \times OP$, onde OA é a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{OA}$ e OP é a medida de comprimento de qualquer uma das partes.

Dos dez livros, verificamos que cinco (A, B, D, G, I) apresentam o uso da fração para expressar medida de comprimento, apesar de não sistematizá-lo formalmente. O livro A apresenta uma ilustração que mostra uma pessoa medindo o comprimento de uma praça, usando como unidade de medida o comprimento de seu passo. Já o livro I apresenta uma ilustração de uma pessoa medindo o tampo de uma mesa, usando como unidade de medida o comprimento de seu palmo. Nos livros B e D, a ideia de medida de comprimento aparece na abordagem histórica das frações no antigo Egito, como mencionado na seção sobre recursos didáticos. No livro D, afirma-se que os egípcios usavam cordas com nós igualmente espaçados para medir comprimento e apresentar uma ilustração desse instrumento de medida. Já no livro B encontramos apenas uma ilustração para exemplificar uma corda com nós, sem comentários sobre a igualdade do espaçamento entre os nós. O objetivo das quatro situações parece ser apenas mostrar que nem sempre a unidade de medida escolhida cabe um número inteiro de vezes no comprimento que se deseja medir, e por conta disso houve a necessidade de repartir a unidade, o que deu origem às frações.

No livro G, a ideia de medida de comprimento está presente em um exemplo. Sem apoio de ilustração, afirma-se:

> Se você precisar medir um comprimento em metros, pode ser que o resultado não seja um número natural. Por exemplo, pode ser um valor entre 1 e 2. Como se indica essa parte do metro que está entre 1 e 2? Para situações como essas, foram criados os números fracionários. Vamos estudá-los, começando pelas frações. (p.126)

O que se informa ao aluno é extremamente vago, e consideramos pouco provável que um aluno do sexto ano consiga compreender o que se pretende sem sequer ter, antes, experimentado concretamente o uso das frações para representar uma medida de comprimento usando o metro como unidade.

Por certo, a abordagem nos cinco livros busca mostrar ao aluno a limitação dos números naturais no campo das medidas, que consequentemente levou o homem a criar as frações. No entanto, suas abordagens desenvolvem-se com base em exemplos, como se estes fossem suficientes para o aluno compreender a necessidade que levou o homem a dividir a unidade de medida para continuar o processo de medição. Poderia haver, pelo menos, um desafio para o aluno realizar medições, usando diferentes unidades, e tomar decisões sobre o que fazer para medir uma parte menor do que a unidade que está sendo usada.

Observamos que em nenhuma das obras o uso de frações em situações de medida de comprimento se associa com a representação da fração na reta numérica, como defende Wu (1998). Mesmo considerando os volumes do 6º ano como um todo, apenas nas coleções A e D, no capítulo destinado aos números decimais, a reta numérica é associada aos racionais.

Contextos que envolvem medida de volume, massa e capacidade

O uso de frações em situações envolvendo medida de volume, de massa ou de capacidade está presente nas listas de atividades propostas ao aluno de todos os livros. Em quatro livros (I, B, J, H), situações desse tipo são mencionadas nas páginas de abertura do capítulo/unidade ($\frac{3}{4}$ do tanque de combustível, por exemplo). No entanto, se presentes, servem apenas como exemplos de usos de frações no cotidiano e ficam em aberto. Não há qualquer discussão a respeito do uso dessas outras grandezas e, muito menos, do que se deve considerar para realizar uma divisão em partes iguais nesses casos. De fato, como o que ganha ênfase nas atividades são as medidas, o aluno lida com números pouco importando seu significado na situação. Cabe ressaltar que quando os exemplos envolvem objetos do cotidiano, nas figuras ilustrativas o que é levado em conta é a área da superfície maior e que sempre possui um formato conveniente (circular ou retangular).

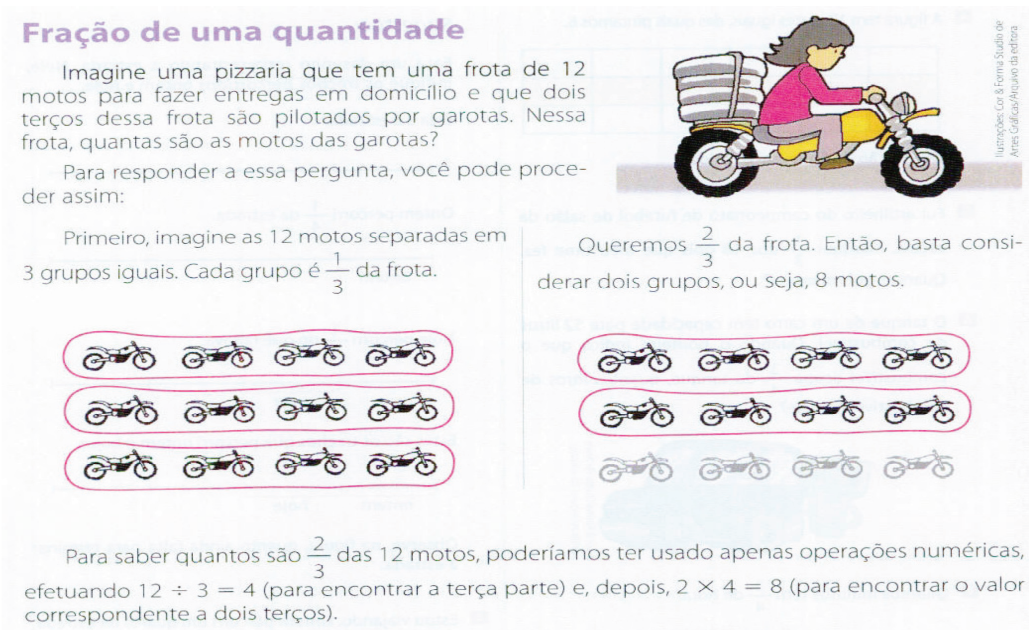
Contextos que envolvem coleções

Os exemplos e as atividades que envolvem as frações de coleções discretas de objetos podem ser separados em três tipos, dependendo do que solicitam:

- Conhecendo o total de elementos da coleção e a fração, determinar a quantidade de elementos de cada parte e, se o numerador for maior do que 1, obter a quantidade de elementos das partes indicadas pelo numerador.
- Conhecendo o total de elementos da coleção e a quantidade de elementos de uma parte, determinar a fração que associa essas quantidades.
- Conhecendo a quantidade de elementos de uma parte e a fração que essa quantidade representa do total de elementos, determinar a cardinalidade da coleção.

No primeiro caso, a fração dada representa a quantidade de elementos de uma parte (o que se deseja determinar). As obras indicam como obter tal número por meio de uma sequência de cálculos, recorrendo a situações resolvidas, como se observa no exemplo da Figura 3. A Figura 3 ilustra ainda uma estratégia adotada em dois livros (E, G). A saber: os exemplos mostram uma ilustração da coleção, já dividida em *n* grupos com a mesma quantidade de elementos, onde *n* é o denominador da fração envolvida no enunciado. Esse tipo de ilustração contribui, por um lado, para dar mais significado ao problema; por outro, retira do aluno a necessidade de pensar em estratégias para realizar tal divisão, parte essencial de um problema envolvendo frações. Observada a quantidade de elementos que compõe cada parte da coleção, sem dúvida, a apresentação do procedimento fica facilitada.

Figura 3 – Fração de uma coleção.


Fração de uma quantidade

Imagine uma pizzaria que tem uma frota de 12 motos para fazer entregas em domicílio e que dois terços dessa frota são pilotados por garotas. Nessa frota, quantas são as motos das garotas?

Para responder a essa pergunta, você pode proceder assim:

Primeiro, imagine as 12 motos separadas em 3 grupos iguais. Cada grupo é $\frac{1}{3}$ da frota.

Queremos $\frac{2}{3}$ da frota. Então, basta considerar dois grupos, ou seja, 8 motos.

Para saber quantos são $\frac{2}{3}$ das 12 motos, poderíamos ter usado apenas operações numéricas, efetuando $12 \div 3 = 4$ (para encontrar a terça parte) e, depois, $2 \times 4 = 8$ (para encontrar o valor correspondente a dois terços).

Fonte: Livro G, p.127.

A outra forma de abordar frações de uma coleção é determinar a fração por meio de uma relação entre o número de elementos das partes de uma coleção e o número total de elementos que compõem a coleção. A título de exemplo, reproduzimos um problema do livro F: “Um casal tem 5 filhos: Alfredo, Carlos, Ênio, Lucas e Marisa. Na família, os homens representam 5/7 (cinco sétimos). E as mulheres 2/7 (dois sétimos) do total de pessoas” (p.166). Dos dez livros, cinco (A, B, D, F, J) trazem situações desse tipo. No entanto, há uma sutil diferença entre o tratamento adotado, como passaremos a explicar.

Em três dos livros (B, F, J) analisados, os exemplos são como o apresentado no parágrafo anterior: informam-se as quantidades de elementos que compõem as partes de uma coleção e, consequentemente, a soma dessas quantidades fornece a cardinalidade da coleção como um todo. O objetivo é encontrar a fração que representa uma relação entre as partes e o todo (no exemplo anterior, homens e mulheres de uma família). Nesses casos, não se apresenta um procedimento (nem isso é necessário) para determinação do resultado, ou seja, da fração. Espera-se que o aluno compreenda que basta contar o número *n* de elementos que compõem cada parte da coleção e o número de elementos da coleção, e escreva a representação fracionária $\frac{m}{n}$. O problema é que há situações nas quais essa associação direta não basta, e isso nos faz lembrar que Nunes e Bryant (1997) afirmam que com as frações as aparências enganam, pois o aluno pode acertar as atividades que envolvem o conceito de fração sem de fato ter entendimento do conceito.

O outro tipo de abordagem é realizado pelos livros A e D. Neles há um exemplo que mostra uma coleção dividida em *n* grupos com a mesma quantidade de elementos, em que cada grupo corresponde à fração $\frac{1}{n}$. Consideramos que essa abordagem abre caminho para compreensão, a *posteriori*, do procedimento usado para resolver problemas do tipo: $\frac{3}{4}$ de uma coleção com 12 elementos equivale a *x* elementos.

$\frac{1}{4}$ de $12 = 12 \div 4 = 3 \rightarrow \frac{3}{4}$ de $12 = 3 \times 3 = 9$.

Como já mencionado na análise dos recursos, parece-nos inadequado que nenhuma coleção solicite ao aluno o uso de material concreto para trabalhar a repartição de uma coleção em partes com a mesma quantidade de elementos. Vimos que o único recurso utilizado são ilustrações, desenhos ou fotografias.

Outro fato preocupante é a mistura de exemplos que envolvem coleção com os que envolvem área de figuras geométricas, presente nos livros A, B, D, E e J, sem ao menos comentar que os procedimentos usados para associar uma fração correspondente a uma parte de uma coleção são diferentes dos procedimentos usados para associar uma fração correspondente a uma parte da área de uma figura geométrica. Em nenhum momento discute-se que, o “todo” que representa a área de uma figura geométrica é diferente do “todo” que representa uma coleção. Já os livros F e G separam cada tipo de contexto por meio de subtítulos. Entretanto, esses livros também não contribuem para que o aluno compreenda a diferença entre o “todo” nas duas situações. É claro que um aluno do sexto ano não tem maturidade para compreender uma explicação teórica sobre tal assunto. Mas uma maneira didática de explicar ao aluno a diferença entre a natureza de ambas as situações é propor atividades lúdicas, como sugerem Santos e Rezende (2002). Parece óbvio que $\frac{1}{3}$ de 15 equivale a 5.

No entanto, Monteiro e Costa argumentam que:

> [...] $\frac{1}{3}$ de uma unidade contínua ou $\frac{1}{3}$ de um conjunto discreto de 15 elementos são situações diferentes, e o fato de 5 (unidades simples) corresponder à segunda situação pode construir um motivo de perturbação para os alunos. (MONTEIRO; COSTA, 1996, p.61)

Como já mencionamos, os PCN (BRASIL, 1998) sugerem trabalhar os vários significados da fração de maneira conjunta. Um dos livros (J) tenta contemplar tal proposta, mas sua abordagem apresenta alguns equívocos ao apresentar a fração com “significados” de razão e quociente. Na Figura 4, a seguir, a obra informa que “Também podemos usar as frações como razão”. Logo em seguida, apresenta um exemplo do que seria tal uso. De fato, no exemplo apresentado, a situação pode ser traduzida como parte-todo, com 26 elementos, cada elemento sendo representado pela fração $\frac{1}{26}$, ou seja, o todo dividido em 26 partes, sendo 14 delas de um tipo, meninas.

Figura 4 – Fração de uma coleção.

Nos casos vistos anteriormente, as frações estão relacionadas à ideia de **parte de uma figura**. Também podemos usar as frações como **razão**, conforme a situação a seguir.

> Em uma sala de aula estudam 26 alunos, dos quais 14 são meninas. Podemos representar a quantidade de meninas dessa sala pela fração $\frac{14}{26}$, isto é, 14 dos 26 alunos da sala são meninas, ou, ainda, a quantidade de meninas da sala está na razão de 14 para 26.

Fonte: Livro J, p.110.

O exemplo da Figura 5, também do livro J, anuncia a fração como "quociente de uma divisão". No entanto, o que de fato apresenta é o caso de uma fração com numerador igual ao denominador e traz como ilustração uma situação típica da relação parte-todo em uma figura geométrica. Evidentemente, não conceitua fração como divisão de dois naturais quaisquer. Como agravante, induz o aluno a considerar válido um comportamento condenável em Matemática – generalizar a partir de um único exemplo – e, pior, exemplo de um caso atípico. Lembramos que, segundo os PCN (BRASIL, 1998), o aluno diferencia "significado" parte-todo do "significado" quociente, pois, "[...] dividir uma unidade em 3 partes e tomar 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 unidades em 3 partes iguais. No entanto, nos dois casos, o resultado é dado pelo mesmo número $\frac{2}{3}$ " (p.102).

Figura 5 – Fração da área de uma figura.

A fração também está relacionada ao **quociente de uma divisão**. A fração $\frac{5}{5}$, por exemplo, representa 1 inteiro, ou seja, $\frac{5}{5} = 1$. Como $5 : 5 = 1$, temos que $\frac{5}{5} = 5 : 5$.

Assim, podemos escrever uma fração na forma de divisão e vice-versa. O traço da fração representa uma divisão.

Fonte: Livro J, p.110.

Considerações finais

Esta pesquisa evidencia que o principal contexto utilizado pelos dez livros analisados é o que envolve área de figuras geométricas, com ênfase no uso da fração para expressar uma ou mais partes da figura. Sem dúvida, como a publicação dos PCN apontava nos anos 1990, a relação parte-todo continua sendo privilegiada. Hoje, percebe-se que a maioria dos livros (sete) passou a incluir, na introdução do conceito de frações, contextos que envolvem coleções.

Como já era apontado nos PCN publicados em 1998, a ênfase na relação parte-todo exemplificada por meio de figuras geométricas continua sendo a mesma nos livros aprovados para serem adotados 22 anos depois. Mesmo levando em conta que os Parâmetros não modificaram de fato os currículos das escolas e as salas de aula brasileiras, o MEC tem recomendado aos autores de livros didáticos a tomarem esse documento como referência. Naquele documento curricular se defende a ideia de trabalhar as frações e seus vários significados, de forma sistemática e concomitante, para que o ensino seja eficaz. Não é nosso papel defender tal princípio, já que não há comprovação, por meio de pesquisa, de que o trabalho simultâneo, desde a introdução do conceito, com todos os usos das frações, seja eficaz para a compreensão do conceito.

Como contraponto, lembramos que Wu (1998) defende, e tem realizado experiências nesse sentido, que o aluno deve ser eficaz em um modelo antes de ser exposto a outro. Para Wu (1998), a abordagem das frações por meio da reta numérica tem uma vantagem, pois é possível trabalhar, de maneira uniforme, todos os tipos de frações, desde as "pequenas" às "grandes" frações, o que ajuda a conceituá-las como números que ampliam o sistema numérico já conhecido.

O que mais nos chama a atenção, no entanto, é que, além de pouco diversificada do ponto de vista dos usos, a introdução do conceito de fração é feita de modo bastante superficial, como tentamos deixar claro neste artigo. De modo geral, a abordagem dos livros desenvolve-se por meio de exemplos, como se estes fossem suficientes para promover a aquisição do conceito de fração. Nos contextos que envolvem área de figuras, apenas um dos dez livros apresenta uma atividade que exige que o aluno divida um material concreto em partes iguais. Os demais livros apresentam modelos prontos, ou seja, figuras geométricas ou outros tipos de figuras, já divididas em partes iguais, impedindo que o aluno compreenda, de fato, a necessidade das áreas das partes serem iguais, e que não há necessidade de que as partes sejam figuras congruentes.

O conceito de medida de comprimento que poderia favorecer a compreensão das frações não é valorizado nas obras. Não foram identificadas atividades que explorassem situações de medição e de divisão de um segmento de reta qualquer em partes com a mesma medida. Quando algum exemplo relacionado a ideias de medida de comprimento com a de fração está presente, ele tem um caráter ilustrativo, a ponto de, se retirado, não comprometer em nada o restante do que é proposto. Por certo, apenas exemplos não são suficientes para que um aluno do sexto ano compreenda as frações como um instrumento utilizado para expressar medida de comprimento.

Nos contextos que envolvem coleções, nenhum livro apresenta atividade de manipulação de material concreto, que exigiria do aluno dividir uma dada coleção em grupos com a mesma quantidade de elementos. Mais uma vez, o recurso usado são ilustrações de coleções, o que pode não ser suficiente para o aluno diferenciar o "todo" que representa a área de uma figura do "todo" que representa uma coleção de objetos.

A proposta de Santos e Rezende (2002) é bem clara em relação à participação efetiva do aluno na construção do conhecimento, durante a introdução dos conceitos. O principal objetivo é evitar a memorização de regras que possivelmente leva o aluno a resolver as atividades por meio de uma mecanização de procedimentos, sem o entendimento dos conceitos. Nesse aspecto, as coleções também deixam a desejar.

Respondendo nossa questão de pesquisa: que tipo de abordagem é privilegiada na introdução ao conceito de fração nos livros didáticos do sexto ano do Ensino Fundamental, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2011? Por certo, os livros privilegiam contextos que envolvem área de figuras geométricas, com ênfase no uso da fração para expressar uma ou mais partes da área da referida figura. De modo geral, suas abordagens desenvolvem-se por meio de exemplos que buscam mostrar "como se faz". O aluno não é estimulado a pensar e a usar sua criatividade, pois tudo já aparece pronto. Na realidade, a abordagem dos livros analisados não convida o aluno a construir o conceito de fração.

Referências

BARDIN, Laurence. *Análise de conteúdos.* Lisboa: Edições 70, 1977.

BEHER. M. J. et al. *Rational number, and proportion.* In: GROUWS, D. A. (Ed.). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning New York: Macmilian, 1983. p.296-333.

BOYER, Carl B. *História da Matemática.* São Paulo: Edgard Blüncher, 1974.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação de Ensino Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília, DF, 1998.

CANOVA, R. F. *Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclo do Ensino Fundamental com relação à fração.* São Paulo, 2006. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

MONTEIRO, C.; COSTA, C. *Revista Educação e Matemática n° 40* – Dificuldades na Aprendizagem dos números racionais, 1996.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Compreendendo Números Racionais.* In: NUNES, Terezinha, BRYANT, Peter. *Crianças fazendo matemática.* Porto Alegre: Artmed, 1997.

ROMANATTO, M. C. *Número racional:* uma teia de relações. *Zetetiké*, CEMPEM, FE/Unicamp, v.7, n.12, p.37-49, jul./dez. 1999.

ROQUE, Tatiana. *História da Matemática:* uma visão crítica desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro, 2012.

SANTOS, V. M. P.; REZENDE, J. F. (orgs.). *Números:* linguagem universal. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2002.

VASCONCELOS, C.B.; BELFORT, E. *Diferentes significados de um mesmo conceito:* o caso das frações. In: Boletins do Salto para o Futuro, Discutindo práticas em Matemática. TVE, 2006. Disponível em: http://www.tvbrasil.org.br/saltoparaofuturo/publicacaoeletronica.asp?ano=2006 , acessado em 31 jul. 2013.

TEIXEIRA, A. M. *O professor, o ensino de fração e o livro didático:* um estudo investigativo – Dissertação do Mestrado Profissional em Ensino da Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2008, PUCSP.

WU, H. *Key Mathematical Ideas in Grades 5-8.* Technical report # 3840 Department of Mathematics. C. Berkeley. September 12, 2005. Apresentado no NCTM, 2005.

WU, H. *Teaching fractions in elementary school:* A manual for teachers. 1998.

Alexandre Marinho é professor de Matemática. Mestrando em Ensino da Matemática da UFRJ. xandymarinho@ig.com.br

Mônica Cerbella Freire Mandarino é professora de Matemática, Mestre em Estatística e Doutora em Educação. Docente do Mestrado em Ensino de Matemática da UFRJ e responsável pelo Enade na Fundação Cesgranrio. mmandarino@globo.com