VIII Seminário de Pesquisa em Educação Matemática
De 18 a 19 de novembro
Colégio de Aplicação – UFRJ
Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional Rio de Janeiro

A COMPREENSÃO MATEMÁTICA DE VETORES ADQUIRIDA POR ESTUDANTES NAS AULAS DE FÍSICA[1]

Rafael Filipe Novoa Vaz
IFRJ-CPAR; Projeto Fundão-UFRJ
rafael.vaz@ifrj.edu.br

Magno Luiz Ferreira
IFRJ-CVR; Projeto Fundão-UFRJ
Magno.ferreira@ifrj.edu.br

Lilian Nasser
Projeto Fundão-UFRJ
lnasser.mat@gmail.com

Resumo:
A fragmentação das disciplinas do Ensino Médio pode ser observada a partir de diversos exemplos. Em algumas situações, pré-requisitos referentes a outras disciplinas não são ofertados de modo que que outras sejam devidamente cursadas. Este é o caso dos vetores, um conteúdo matemático essencial para o estudo da Física Clássica, estudada no Ensino Médio, e não contemplada nas aulas de Matemática. Não sabemos que tipo de prejuízos esta ausência pode acarretar para a aprendizagem da Física, no entanto pesquisas apontam que o ensino deficitário de vetores pode prejudicar o desempenho destes estudantes em um possível curso superior de Licenciatura em Matemática. Deste modo, surgiu o seguinte questionamento: os estudantes chegam ao Ensino Superior com carência neste conteúdo por que o Ensino de Física que receberam foi deficitário ou por que a Física não consegue suprir a aprendizagem vetorial que a Matemática poderia oferecer? Para buscar algumas respostas, realizou-se uma investigação em dois campi do Instituo Federal do Rio de Janeiro sobre a aprendizagem de vetores no Ensino Médio.

Palavras-chave: Vetores, BNCC, Ensino Médio.

1. Introdução

[1] Este trabalho contou com a colaboração dos demais membros do grupo de pesquisa: os professores Bruno do Espírito Santo Batista, Jeanne Barros, José Alexandre Ramos Pereira, Geneci Alves de Souza, Marcelo André A. Torraca e os estagiários Alan Junior Severo e Juliana Severino Mendonça.

O alto índice de evasão e repetência em Geometria Analítica e em Cálculo I em Instituições de Ensino Superior públicas ou privadas tem sido motivo de preocupação de diversos pesquisadores. Várias atividades investigativas foram realizadas para detectar as possíveis lacunas de aprendizagem que poderiam estar interferindo na aprendizagem dos estudantes recém ingressados no ensino superior (NASSER; SOUSA; TORRACA, 2012, 2015). No desenvolvimento das investigações tomamos conhecimento que o Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (CApUFRJ) adota um ensino diferenciado para a Matemática do Ensino Médio, baseado em vetores. O bom desempenho de seus alunos nas avaliações oficiais e no vestibular de modo geral levou à indagação de como tem sido abordado o tópico de vetores no Ensino Médio da rede pública.

2. Referencial teórico

Nasser, Vaz e Torraca (2015, p.10), investigaram calouros em Licenciatura em Matemática de um campus do Instituto Federal do Rio de Janeiro. Estes pesquisadores procuraram encontrar algumas das possíveis causas para o alto índice de reprovação em Geometria Analítica naquela instituição. De modo análogo às investigações anteriores, relacionadas às dificuldades na aprendizagem de Cálculo (NASSER; SOUSA; TORRACA, 2012, 2015), a pesquisa apontou para carências em conteúdos relacionados ao Ensino Médio e, também, relacionado ao Ensino Fundamental. Foram diagnosticadas dificuldades na compreensão e pouca familiarização no estudo de vetores.

> Em sua maioria, os alunos investigados desconhecem a noção de módulo de um vetor, e sua relação com a distância entre dois pontos. Até mesmo a localização de pares ordenados no plano cartesiano parece que não é dominada. Não ficou claro se os alunos fazem a distinção correta entre reta e segmento de reta. (NASSER; VAZ; TORRACA, 2015, p.10)

Segundo estes pesquisadores, estas lacunas encontradas no conhecimento vetorial acarretam consequências negativas no ensino superior. Foi observado, também, que o conhecimento de vetores adquirido pelos estudantes foi obtido nas aulas de Física, e isto, pode ser justificado por dois aspectos: os estudantes eram, em sua maioria, oriundos da rede pública estadual de ensino e o currículo mínimo de Matemática da Secretaria Estadual de Educação do Estado do Rio de Janeiro (SEEDUC/RJ) não contempla o ensino de vetores. Em Geometria Analítica, tal documento apresenta as seguintes competências:

> Resolver problemas utilizando o cálculo da distância entre dois pontos; identificar e determinar as equações geral e reduzida de uma reta; identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações; determinar a equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral, conhecidos o centro e o raio. (RIO DE JANEIRO, 2012a, p.20)

É importante salientar que estudo vetorial compõe um dos pilares da Física estudada no Ensino Médio. Talvez por isso, o conteúdo de vetores venha sendo ensinado pelos professores de Física, mesmo que não faça parte da própria grade curricular. O Currículo Mínimo da SEEDUC-RJ, por exemplo, aponta algumas Habilidades e Competências para o Ensino de Física no primeiro ano do EM, que possuem como pré-requisitos o estudo de vetores:

> Reconhecer o caráter vetorial da velocidade e da aceleração; reconhecer o modelo das quatro forças fundamentais da natureza: força gravitacional, força eletromagnética, força nuclear forte e força nuclear fraca; reconhecer a diferença entre massa e peso e suas unidades de medida. (RIO DE JANEIRO, 2012b, p.5)

Mesmo necessitando de tais pré-requisitos, estas orientações curriculares não mencionam em nenhum trecho em que momento, nem que disciplina irá suprir tais necessidades. O mesmo ocorre nas ementas de Matemática e Física, dos cursos do Ensino Médio Técnico Integrado em Mecânica e em Eletrotécnica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Rio de Janeiro (IFRJ, 2012).

Ventura e Almouloud (2013) realizaram uma investigação sobre o conteúdo de Geometria Analítica em sete livros didáticos do Ensino Médio, relatando que apenas o livro Contextos e Aplicações, em três volumes, faz referência a vetores.

A inserção de vetores no Ensino Médio pode trazer muitos benefícios para o ensino de Matemática e o ensino de Física. Em Matemática, alguns temas poderiam ser melhor explicados, ou justificados, com uma abordagem vetorial. Consideremos, por exemplo, a condição de alinhamento entre três pontos no plano cartesiano. Sem a utilização de vetores, esta pode ser desenvolvida utilizando proporção, em uma abordagem geométrica. Entretanto, ao relacionar esta fórmula a um determinante, os autores dos livros didáticos utilizam um caminho nada elegante. Há outros exemplos interessantes: o cálculo das coordenadas do baricentro ou da área de um triângulo no plano cartesiano a partir das coordenadas dos seus vértices. Neste último caso, a demonstração da fórmula que associa esta área a um determinante é longa e cansativa (PAIVA, 2010, p.122-123).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), proposta pelo MEC, apresenta a inserção dos vetores no ensino de Matemática. No entanto, esta inserção, ou pelo menos a tentativa de inserção, não é nenhuma novidade. As Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) já sugeriam a inclusão de vetores na Matemática.

> É desejável, também, que o professor de Matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas). Em particular, é importante relacionar as operações executadas com as coordenadas (soma, multiplicação por escalar) com seu significado geométrico. (BRASIL, 2006, p.77)

Este documento mencionava ainda que ocorria uma distorção no Ensino Médio, pois este importante tópico do conhecimento matemático estava presente somente nas aulas de Física (BRASIL, 2006). Mesmo após 10 anos do lançamento deste documento, a distorção continua sendo observada nas ementas curriculares de Matemática no Ensino Médio.

3. Investigando o conhecimento vetorial de estudantes do Ensino Médio

Após a constatação que os estudantes ingressavam no ensino superior sem os pré-requisitos necessários para um melhor caminhar no curso de Licenciatura em Matemática, no que se refere ao conhecimento vetorial, surgiu o seguinte questionamento: os estudantes chegam ao Ensino Superior com carência neste conteúdo por que o Ensino de Física que receberam foi deficitário ou por que a Física não consegue suprir a aprendizagem vetorial que a Matemática poderia oferecer?

Uma premissa importante na construção desta investigação era realizar a pesquisa em uma escola onde os alunos tivessem aulas de Física com a melhor qualidade possível, por isso foi escolhido o Instituto Federal do Rio de Janeiro. Deste modo, foi realizada uma investigação em duas turmas de quinto período, em dois campi, do IFRJ, totalizando 42 alunos. As turmas do quinto período já haviam estudado todos os tópicos de Física do Ensino Médio, pois o conteúdo dessa disciplina é dado no Instituto nos quatro primeiros períodos.

Realizou-se então a aplicação de cinco questões referentes a tópicos iniciais do estudo vetorial: as características de um vetor (módulo, direção e sentido), adição de vetores, projeção de um vetor e cálculo do módulo. A opção em utilizar estas questões é uma tentativa de investigar a compreensão destes conteúdos (matemáticos) nas aulas de Física e se, estes alunos, poderiam utilizar na Matemática os conteúdos vetoriais estudados em Física.

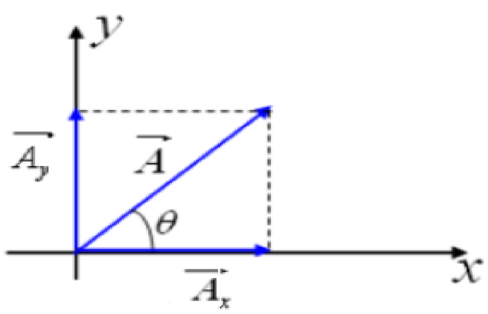
O objetivo da primeira questão (Figura 1) era investigar se os estudantes compreendiam que um vetor é definido geometricamente por três características: direção, sentido e módulo.

Os controladores de tráfego aéreo fornecem informações para os pilotos informando em que direção e sentido eles devem voar. Estas instruções são chamadas de "vetores". Se estas forem as únicas informações dadas aos pilotos, o nome "vetor" estará sendo usado corretamente? Justifique.

Figura 1 - Questão 1

A segunda questão (Figura 2) solicitava que os alunos provassem uma relação muito utilizada na Física. O objetivo era investigar paralelamente se os estudantes diferenciam as representações dos vetores das representações de seus módulos.

Observe as projeções do Vetor A no plano Cartesiano.

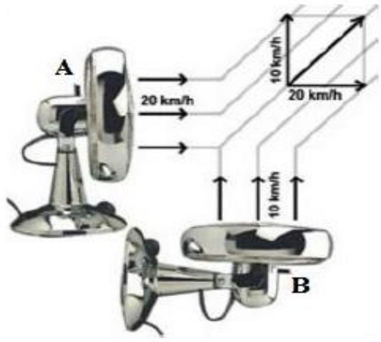


Prove que $|\vec{A}_x| = |\vec{A}|.\cos\theta$

Figura 2 - Questão 2

A terceira questão (Figura 3) apresentava algumas igualdades e operações entre vetores e entre seus módulos, investigando a capacidade dos estudantes de diferenciá-las.

Dois ventiladores são posicionados como descrito na figura abaixo.



Considerando os vetores $\vec{V_a}$ (velocidade inicial do vento no ventilador A), $\vec{V_b}$ (Velocidade inicial do vento no ventilador B) e $\vec{V_c}$ o vetor soma de $\vec{V_a}$ *e* $\vec{V_b}$, complete as afirmativas abaixo com V ou F

( ) $\vec{V_a} = 2\vec{V_b}$
( ) $|\vec{V_b}| + |\vec{V_a}| = |\vec{V_c}|$
( ) $\vec{V_c} = \vec{V_a} + \vec{V_b}$
( ) $|\vec{V_a}| = 2|\vec{V_b}|$

Figura 3 - Questão 3

A figura 4 ilustra a quarta questão, que solicitava ao aluno a representação do vetor soma no plano cartesiano.

A figura abaixo representa parte do procedimento para determinar o vetor $\vec{a} + \vec{b}$. Considere as malhas quadriculadas abaixo de lado igual a 1 cm. Represente o vetor resultante ($\vec{a} + \vec{b}$) na segunda malha quadriculada.

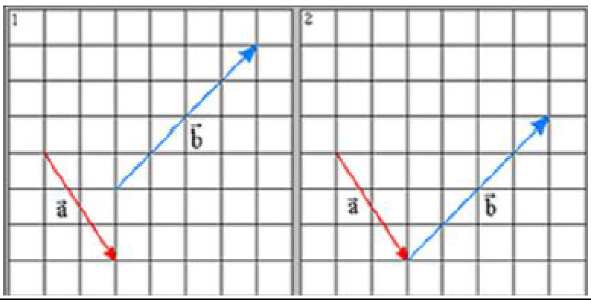


Figura 4 - Questão 4

A questão 5 apresentava o seguinte enunciado:

Em relação ao item anterior, calcule o módulo do vetor $\vec{a}$

Trata-se de uma questão simples e direta que requeria a simples utilização o teorema de Pitágoras.

4. Os Resultados

As soluções obtidas foram analisadas qualitativa e quantitativamente. Apresentaremos aqui os primeiros resultados e algumas considerações sobre estas.

4.1. A questão 1

Por falta de atenção ou por desconhecimento, o índice de acertos da questão 1 foi abaixo do esperado, em torno de 26%. A maioria dos alunos pesquisados não foi capaz de observar a ausência do módulo. Tal índice talvez seja influenciado por não ser uma questão direta, tal como “Quais são as três grandezas que caracterizam um vetor? ”.

4.2. A questão 2

Essa questão apresentou um alto índice de acertos (74%). No que se refere aos aspectos qualitativos, algumas soluções permitem tecer algumas suposições a respeito do conhecimento dos estudantes: 43% dos alunos, resolveram a questão de forma parcialmente correta, utilizando a relação trigonométrica necessária para a resolução da questão. Porém, utilizaram esta relação sem especificar que trabalhavam com o módulo de vetores, apresentando uma divisão vetorial (Figura 5). Esse comportamento permite supor que alguns alunos não fazem distinção, ou tenham dificuldades em distinguir, as representações de um vetor e o do seu módulo.

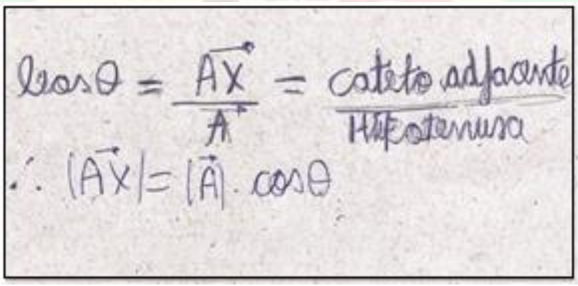


Figura 5 - Divisão entre vetores

4.3. A questão 3

Para uma melhor análise das soluções encontradas na questão 3, as respostas foram classificas em certas, parcialmente certas e erradas (Tabela 1). Nenhum aluno deixou opções em branco.

Tabela 1 - Percentual de acertos da questão 3

	1ªafirmação	2ªafirmação	3ª afirmação	4ªafirmação
ACERTARAM	43%	69%	38%	67%
ERRARAM	57%	31%	62%	33%
TOTAL	100%	100%	100%	100%

Ao observar os resultados encontrados nesta tabela, podemos imediatamente associar um maior índice de acertos às igualdades que faziam referência aos módulos dos vetores (Figura 6).

( ) $\vec{V_a} = 2\vec{V_b}$
( ) $|\vec{V_b}| + |\vec{V_a}| = |\vec{V_c}|$
( ) $\vec{V_c} = \vec{V_a} + \vec{V_b}$
( ) $|\vec{V_a}| = 2|\vec{V_b}|$

Figura 6 – Afirmações da questão 3

A incapacidade de reconhecer o vetor resultante como uma soma de vetores (3ª afirmação) por parte de 62% dos alunos mostra que os mesmos apresentam dificuldades na compreensão dos conceitos e características dos vetores. Estes resultados denotam uma carência de uma abordagem mais específica em relação aos vetores, e evidenciam a dificuldade, já mencionada, em diferenciar vetores de seus módulos.

É importante ressaltar também que a representação vetorial deste enunciado pode ter contribuído para uma maior incidência de erros, pois as dimensões dos vetores não são proporcionais aos seus módulos. Fato que foi observado pelos pesquisadores após a aplicação das atividades.

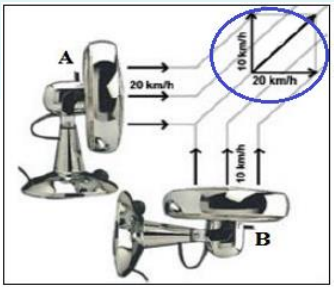


Figura 7 – Possível obstáculo da imagem utilizada

4.4. A questão 4

Esta questão apresentou um baixo índice de acertos (17%) e um grande número de respostas em branco (36%), talvez porque os exercícios de Física se concentrem prioritariamente nos cálculos algébricos e os estudantes tenham pouca habilidade no manejo vetorial no plano cartesiano. Dentre os raros estudantes que acertaram a questão, uma resposta é apresentada na figura 8.

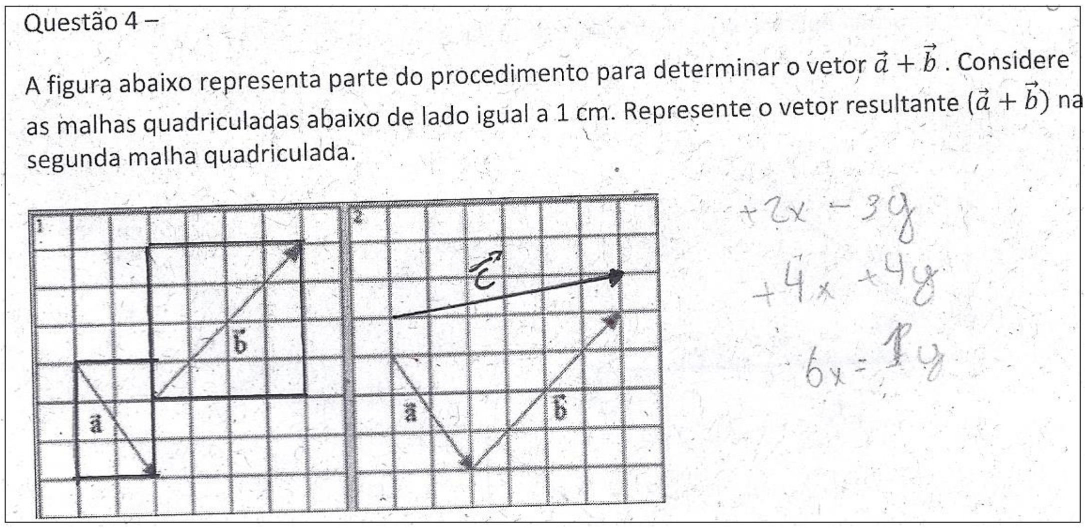
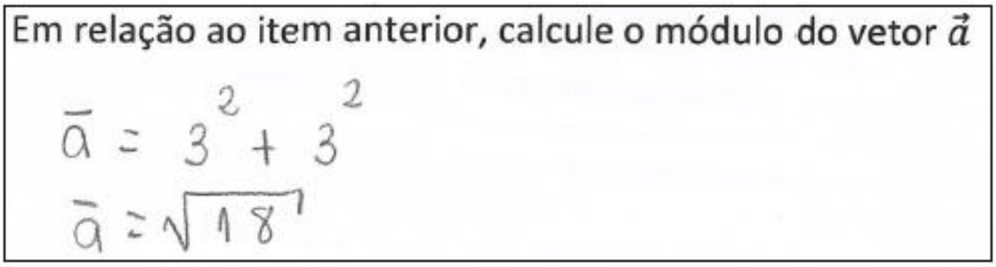


Figura 8 –Solução de adição vetorial

Dois pontos importantes podem ser destacados nesta solução. (i) A solução algébrica apresentada por este estudante, que não possui características de ter sido aprendida em aulas de Matemática e sim uma possível transposição de um conteúdo aprendido nas aulas de Física. (ii) O aluno não posiciona o vetor resultante “se unindo” aos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, como era esperado em uma solução geométrica, podendo caracterizar um aspecto positivo e/ou um negativo. O positivo é que o aluno parece saber que um vetor não possui uma posição definida, sendo um “conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes” (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987, p.4). O negativo é que talvez desconheça como realizar uma soma vetorial geometricamente no plano cartesiano.

4.5 A questão 5

Para resolver a questão 5, os alunos deveriam utilizar o Teorema de Pitágoras para determinar o módulo de $\vec{a}$. A questão também apresentou um índice baixo de acertos (26%) e um alto de respostas em branco (33%), demonstrando talvez a falta de habilidade em compreender o plano cartesiano ou, até mesmo, a malha quadriculada. Esta dificuldade pode ser observada na resolução ilustrada na figura 9.


Em relação ao item anterior, calcule o módulo do vetor $\vec{a}$

$\bar{a} = 3^2 + 3^2$

$\bar{a} = \sqrt{18}$

Figura 9 –Solução equivocada na questão 5

5. Considerações Finais

O Ensino Médio no Instituto Federal do Rio de Janeiro possui disciplinas desconectadas. Mesmo se tratando de um Ensino Médio Integrado, o que se observou nos campi investigados é que não ocorre a desejada e necessária integração entre a Matemática e a Física. Os estudantes se deparam com gráficos de movimentos uniformes e movimentos uniformemente variados antes mesmo de estudarem funções afim e quadrática que, respectivamente, caracterizam estes movimentos. Os vetores, pré-requisitos para o ensino de Física, são estudados nesta disciplina e não em Geometria Analítica. Mesmo se o tópico de vetores fosse estudado em GA, seria inútil na contribuição da aprendizagem em Física, pois tal disciplina é ministrada somente no final do quinto período. É importante destacar que a BNCC pode, e provavelmente irá contribuir para a resolução ou, pelo menos, para amenizar tais discrepâncias no currículo brasileiro do Ensino Médio.

A partir dos dados coletados, identificamos um conhecimento matemático como sendo bem compreendido pelos estudantes: a relação trigonométrica necessária para resolver a questão 2 (74% de acertos). De modo geral, nas demais questões ficou claro que o conceito e algumas propriedades vetoriais não foram bem compreendidas pelos alunos, dentre elas, destaca-se a diferenciação entre um vetor e seu módulo. Não foi possível perceber se os estudantes conseguem realizar alguma transposição do conhecimento aprendido nas aulas de Física para a Matemática, pois esta transposição de conhecimento foi rara nas atividades apresentadas.

Por enquanto, consideramos que o ensino vetorial deva ocorrer, pelo menos inicialmente, nas aulas de Matemática. Em relação à possível transposição de conhecimentos aprendidos na aula de Física para a Matemática, sugerimos a realização de futuras investigações, explorando melhor a complexidade e a relevância do assunto.

Apontamos para a necessidade de pensarmos o currículo e o Ensino Médio de forma democrática e colaborativa. Algo que não pode ser feito por Medida Provisória.

6. Referências

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEB, 2016. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf>. Acesso em 01 jul 2016

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio.* Brasília: MEC/SEB, 2006. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em 01 jul 2016

NASSER, Lilian; SOUSA, Geneci; TORRACA, Marcelo. Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em Cálculo? In: V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2012, Petrópolis. *Atas do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (em CD). SBEM: Petrópolis, RJ, Brasil, 2012.

NASSER, Lilian, SOUSA, Geneci; TORRACA, Marcelo. Aprendizagem de cálculo: dificuldades e sugestões para a superação. In: XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015, Tuxtla Gutierrez. Atas do XIVCIAEM,Tuxtla Gutierrez, México, 2015.

NASSER, Lilian. VAZ, Rafael; TORRACA, Marcelo. Transição do Ensino Médio para o Superior: Investigando Dificuldades em Geometria Analítica. In: VI SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2015, Pirenópolis. Atas do *VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (em CD). SBEM: Pirenópolis, GO, Brasil, 2015.

PAIVA, Manoel. *Matemática: Paiva*. São Paulo: Moderna, 2010.

RIO DE JANEIRO. Secretaria de Estado de Educação e Cultura. *Currículo Mínimo de Matemática*. 2ed. 2012a

___________ Secretaria de Estado de Educação e Cultura. *Currículo Mínimo de Física*. Rio de Janeiro, 2012b.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica*. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

VENTURA, Karen; ALMOULOUD, Saddo. Análise de Conteúdos de Geometria Analítica em Livros Didáticos de Ensino Médio. In: VI CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 2013, Canoas. Atas do *VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática*. Canoas, RS, Brasil, 2013.