

VIII Seminário de Pesquisa em
Educação Matemática
De 18 a 19 de novembro
Colégio de Aplicação - UFRJ

Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional Rio de Janeiro

**COMO A MATEMÁTICA É UTILIZADA EM
DESENVOLVIMENTOS TECNOLÓGICOS:
INTEGRANDO SABERES DOS DOCENTES**

Bruna Moustapha Corrêa

UNIRIO

bruna.correa@uniriotec.br

Gladson Octaviano Antunes

UNIRIO

gladson.antunes@uniriotec.br

Michel Cambraíha de Paula

UNIRIO

michel.cambraíha@uniriotec.br

Resumo:

Este artigo traz algumas reflexões sobre o que pode ser feito nos cursos de Licenciatura em Matemática quando se reconhece que o conhecimento matemático do professor é particular. Fundamentamos nosso trabalho nos conceitos de elementarização e translação histórica de Klein e também nos de problematizar e contextualizar no sentido de Roque. Apresentamos como a matemática é utilizada no desenvolvimento de tecnologias que utilizamos no nosso cotidiano, a partir de uma breve discussão sobre como o conceito de matrizes se relaciona com o mecanismo de busca do *Google (PageRank)*. Trazemos, ainda, as nossas impressões sobre duas oficinas já realizadas e apontamos desdobramentos da nossa parceria no curso de Licenciatura em Matemática da UNIRIO.

Palavras-chave: Formação de Professores; Klein; Naturalização; *PageRank*; Matrizes.

Desde o final da década de 1980 a pesquisa sobre os conhecimentos necessários para a formação do professor vem despontando. Além disso, o governo federal vem implementando esforços com vistas a uma formação de professores mais articulada com a prática docente do futuro professor na medida em que na Resolução No. 2 de 01 de julho de 2015 o Conselho Nacional de Educação sinaliza que 400 horas devem ser dedicadas à prática como componente curricular, por exemplo. Cientes de que o

conhecimento matemático do professor é particular e esperançosos de trazer para o curso de Licenciatura em que atuamos um pouco do que se discute na pesquisa em formação de professores, passamos refletir em conjunto sobre o que poderíamos fazer. A nossa estratégia perpassa a nossa formação e as nossas áreas de pesquisa. Juntamos, então, pesquisadores de Matemática Pura com uma pesquisadora em Formação de Professores de Matemática e o resultado [parcial] desta parceria é a realização de oficinas que divulgam *como* a matemática é utilizada no desenvolvimento de tecnologias que utilizamos no nosso cotidiano. Com as oficinas, buscamos inspirar professores e futuros professores a aplicar e motivar a Matemática que ensinam ou ensinarão em suas salas de aula.

Neste artigo apresentamos de que modo fundamentamos teoricamente a nossa proposta, discutimos brevemente sobre como o conceito de matrizes se relaciona com o mecanismo de busca do *Google (PageRank)*, trazemos as nossas impressões sobre duas oficinas já realizadas e apontamos desdobramentos da nossa parceria.

1. Dupla Descontinuidade, Naturalização, Recontextualização, Elementarização, Translação Histórica e Problemas

No início do século XX, Felix Klein, proeminente matemático alemão, publica suas notas de aula demonstrando sua preocupação com a formação de professores. Nessas notas denuncia e identifica um problema central da formação de professores: uma dupla descontinuidade entre a universidade e a escola. Para ele, o curso de formação de professores não se articula com a matemática aprendida por seus estudantes quando frequentavam a escola, nem tão pouco discute a matemática a partir de uma perspectiva de quem futuramente irá ensiná-la em nível básico.

Dentre as propostas de Klein, Kilpatrick (2008) destaca a sugestão de Klein para que na universidade, os professores promovam uma formação que faça com que os futuros professores estejam numa *posição acima* dos conteúdos que lecionarão, com vistas a tornar o ensino de matemática mais dinâmico na escola. Cumpre salientar que olhar para o trabalho de Klein nos leva a refletir sobre os conteúdos a serem ensinados, bem como a considerar a natureza da matemática escolar (SCHUBRING, 2014).

Atualmente, a obra de Klein é vista como um modo de se atentar para a simplicidade e a clareza da matemática, na medida em que considera os elementos da matemática a partir de um ponto de vista superior.

Klein identifica como *matemática elementar* as partes essenciais que encerram a capacidade de sustentar e de estruturar a Matemática. Assim não há diferença de valor entre o que é elementar e o que é superior – são partes que se fundem e se arranjam compondo, sob a mesma importância, a Matemática como ciência (SCHUBRING, 2003). (RANGEL, 2015, p.90, itálico como no original)

Para Schubring (2014), Klein acreditava que seria possível *aprofundar* o entendimento dos conceitos matemáticos mais básicos e *apreciar* a natureza dos conceitos matemáticos quando se buscava explicar as interligações e conexões de partes em geral tratadas de modo disjunto e também a partir de links entre o particular e o todo. Nesse sentido, o professor deveria, desde a sua formação inicial, desenvolver uma visão ao mesmo tempo profunda e panorâmica da disciplina; para tanto as questões científicas deveriam estimular e orientar a atividade docente, o que pressupõe uma articulação entre escola e academia. Schubring (2014) ainda destaca que, para ensinar, o professor precisa de um *metassaber*, isto é, de um saber sobre o saber; assim, o professor de matemática, para Klein, deve ter conhecimento sobre os diversos conceitos e teorias e também sobre a natureza de cada conceito.

Ao analisar a relação entre a matemática escolar e a ensinada no ensino superior, Klein percebe uma alienação da matemática escolar em relação ao progresso da ciência (SCHUBRING, 2014). Nessa alienação podemos constatar a **naturalização** de conceitos matemáticos (e.g. GIRALDO & ROQUE, 2014). Ao abordar os conceitos matemáticos de modo naturalizado “sua existência, sua importância e seu papel na matemática contemporânea são assumidos como dados arbitrariamente, sem que sejam levadas em conta as demandas e tensões que impulsionaram sua gênese.” (GIRALDO & ROQUE, 2014, p. 14). Esses autores argumentam que é necessário que a visão naturalizada dos conceitos matemáticos seja superada, sobretudo, nos cursos de formação de professores. É interessante observar que quando se assume de modo arbitrário conceitos matemáticos, não há preocupação em conectá-los em seus contextos. A perspectiva de contextualização defendida por Tatiana Roque (e.g. GIRALDO & ROQUE, 2014) não compreende o estabelecimento de vínculos com situações concretas da vida cotidiana ou com aplicações práticas da matemática; na

verdade, diz respeito à recuperação das sutilezas genéticas dos conceitos matemáticos e à sua articulação ao ensino.

Para Klein, a conexão entre o progresso científico e a matemática escolar se daria por um processo de **translação histórica** em que se buscaria a **elementarização**.

Klein não se alinha com o entendimento de uma transposição vertical do conhecimento matemático produzido na academia para a escola, à qual caberia apenas o papel passivo de receber e difundir um conhecimento pronto, sem qualquer interferência em sua produção. Segundo Schubring (2014), Klein lida com a relação entre esses domínios do conhecimento admitindo a *elementarização* como um processo de *translação histórica*, por meio do qual, **à medida que a matemática superior é mais bem compreendida, suas partes elementares vão se identificando e se organizando, permitindo o aprofundamento da compreensão e a difusão mais ampla de conceitos** e criando assim condições para a produção de novos conhecimentos. (RANGEL, GIRALDO & MACULAN, 2014, p. 6, *italico como no original, negritos nossos*)

Klein e Schimmack esclarecem que a translação histórica pode ser entendida como o processo de desenvolvimento da ciência no qual “partes superiores e mais complicadas tornam-se paulatinamente mais elementares, devido ao aumento na capacidade de esclarecer os conceitos e à simplificação da exposição” (KLEIN & SCHIMMACK, 1907, p.90 apud SCHUBRING, 2014, p. 50).

Rangel, Giraldo e Maculan destacam que, na perspectiva de Klein, “a escola assume um papel de *autoria e independência* no próprio processo de produção do conhecimento.” (2014, p. 6, *negritos nossos*). Nesse sentido, acreditamos que quanto melhor for a formação do professor, mais bem preparados estarão seus estudantes e, conseqüentemente, a produção científica (matemática ou não) refletirá futuramente essa mudança da concepção matemática.

Um outro aspecto que julgamos interessante trazer para a nossa fundamentação teórica é o de **problematizar**. Mais uma vez, Tatiana Roque não considera a acepção usual da palavra. Assim, problema não é entendido como uma complicação a ser contornada ou um obstáculo a ser vencido ou uma dificuldade em resolver ou explicar. Ela considera que o motor da matemática são os problemas, isto é, para ela a matemática é desenvolvida a partir de problemas, sejam eles corriqueiros, do senso comum, ou inerentes à próprias Matemática. (e.g, GIRALDO & ROQUE, 2014; ROQUE, 2012)

As nossas discussões têm, em parte, esse fundamental teórico e têm também propiciado articulações (direta ou indiretamente) dos conteúdos do ensino superior com os do ensino básico em nossas aulas ministradas na Licenciatura em Matemática da UNIRIO. A partir de agora, passaremos a expor como isso pode ser feito a partir do estudo do algoritmo de ranqueamento do *Google*.

2. PageRank

Desenvolvido inicialmente na Universidade de Stanford a partir de 1995 por Larry Page e posteriormente contando com a colaboração de Sergey Brin, ambos fundadores do *Google*, o *PageRank* (PR) é a métrica utilizada pela ferramenta de busca do *Google* para decidir a posição em que um *site* deve aparecer na lista exibida a partir de uma consulta. O PR de um *site* varia de 0 a 10 e quanto mais próximo de 10 maior é a possibilidade dele aparecer bem posicionado na tela de resultados quando realizamos uma pesquisa no *Google*.

Podemos pensar nesse sistema de ranqueamento como um concurso, digamos mensal, entre as páginas de uma *web* em que os votos são os *links* entre as páginas. Assim, cada vez que uma página envia um *link* para outra é como se ela estivesse dando um voto para aquela página. É importante destacar que nesse concurso os votos não têm todos o mesmo peso, por exemplo um *link* recebido de uma página muito votada, ou seja, que recebeu muitos *links*, vale mais do que um *link* que venha de uma página pouco votada. Além disso, se uma página envia muitos *links* a sua importância (o peso do seu voto) será repartida igualmente.

3. A Matemática do PageRank

Imaginemos que um surfista esteja navegando em uma *web* apenas através dos seus *links*. Como podemos determinar a probabilidade de que, depois de muito tempo de navegação, ele esteja em uma determinada página? Para tanto podemos pensar o ranque em termos percentuais. Uma outra maneira de interpretar isso é pensar nessa probabilidade como sendo o grau de importância de uma página na *web* em que está inserida, e nesse caso, devemos impor a condição de que a soma das importâncias de todas as páginas seja igual a 1 (100%).

Para ilustrar o que acontece nesse ranqueamento, observemos uma *web* com 5 páginas.

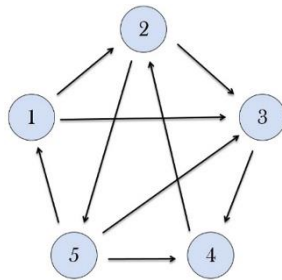


Figura 1: Web formada por 5 páginas e os links entre elas.

Para determinar a importância de cada página dessa *web* é importante saber o número de *links* enviados por cada página.

Tabela 1: Número de links enviados (n_i) por cada página (P_i).

Página	Número de <i>links</i> enviados
P_1	$n_1 = 2$
P_2	$n_2 = 2$
P_3	$n_3 = 1$
P_4	$n_4 = 1$
P_5	$n_5 = 3$

Como a página 1 recebe apenas um *link* da página 5, a sua importância é igual a $\frac{1}{3}$ da importância de página 5 uma vez que $n_5 = 3$.

$$I(P_1) = \frac{I(P_5)}{3}$$

A importância da página 2 é a metade da importância da página 1 adicionada à toda importância da página 4, pois $n_4 = 1$.

$$I(P_2) = \frac{I(P_1)}{2} + I(P_4)$$

Prosseguindo dessa maneira, chegamos ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} I(P_1) = \frac{I(P_5)}{3} \\ I(P_2) = \frac{I(P_1)}{2} + I(P_4) \\ I(P_3) = \frac{I(P_1)}{2} + \frac{I(P_2)}{2} + \frac{I(P_5)}{3} \\ I(P_4) = I(P_3) + \frac{I(P_5)}{3} \\ I(P_5) = \frac{I(P_2)}{2} \end{cases}$$

Dessa forma, para conhecer as importâncias de cada página, é preciso resolver o sistema, considerando ainda que a soma das importâncias de todas as páginas é igual a 1. Essa tarefa pode ser muito trabalhosa, sobretudo, quando a *web* tem muitas páginas e *links*. Na prática, a *web* com que o *Google* trabalha é muito grande, da ordem de bilhões de páginas.

4. Matrizes e Sistemas Lineares: utilizando a tecnologia a nosso favor

Do ponto de vista computacional, os sistemas lineares são resolvidos a partir da sua representação matricial, que facilita a sua implementação em um computador para encontrar soluções de modo rápido e eficaz. A utilidade de uma matriz vai, portanto, muito além de uma notação conveniente, com suas operações e regras específicas bem definidas, elas permitem que diversos problemas computacionais sejam resolvidos de forma mais eficiente.

Sobre as matrizes é também interessante observar que historicamente elas surgiram como uma técnica, entretanto, em geral, são apresentadas como um objeto, muitas vezes com fim em si mesmo (BERNARDES, 2016). É, portanto, parte de nosso objetivo refletir criticamente sobre os conteúdos matemáticos ensinados tanto no ensino escolar, quanto no ensino superior. Acreditamos que o tipo de abordagem apresentado na nossa oficina (e que aqui descrevemos) promove reflexões sobre a utilidade das matrizes que propiciam que se perceba as matrizes como mais do que um objeto, o que permite, por exemplo, uma discussão sobre o motivo pelo qual o produto de matrizes não é feito multiplicando-se termo a termo¹.

¹ Esse tipo de discussão ainda não foi apresentada em nossa oficina, embora a maneira com que ela está organizada permite que isso seja feito.

Por isso, é interessante observarmos o que representam os coeficientes do sistema linear ou as entradas da matriz que o representa, de modo que não precisaremos, necessariamente, passar pelos sistemas lineares para determinar a importância de cada página em uma rede.

$$\begin{bmatrix} I(P_1) \\ I(P_2) \\ I(P_3) \\ I(P_4) \\ I(P_5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I(P_1) \\ I(P_2) \\ I(P_3) \\ I(P_4) \\ I(P_5) \end{bmatrix}$$

Tabela 2: Observações sobre a matriz

O denominador das frações de cada coluna é igual ao número de <i>links</i> que a página correspondente envia.
O numerador da posição a_{ij} será igual a 1 caso a página j envie <i>link</i> para a página i e igual a 0, caso contrário.
A soma das frações de cada coluna é sempre igual a 1.
Nos modelos em que são permitidos mais de um <i>link</i> entre duas páginas, o numerador será exatamente o número de <i>links</i> entre as páginas.

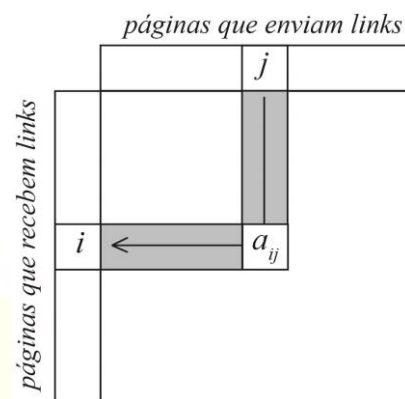


Figura 2: Matriz de transição

É muito comum a resolução de sistemas lineares através do Método de Eliminação Gaussiana ou Método de Gauss-Jordan ou Método de Escalonamento, em que se eliminam algumas das incógnitas adicionando-se, para isso, um múltiplo de uma equação a outra equação. Embora pareça muito complicado realizar essas contas para matrizes muito grandes, um computador é capaz de procedê-las rapidamente.² Contudo, para matrizes gigantes, como é o caso da matriz *Google* (da ordem de 25 bilhões), há métodos mais eficientes em relação ao custo computacional (quantidade de operações

² Na internet é possível encontrar páginas com calculadoras de matrizes *online*, que resolvem sistemas não muito grandes, como por exemplo <https://matrixcalc.org/pt/slu.html>.

básicas realizadas), conhecidos como Métodos de Iteração, cuja convergência e eficiência estão diretamente relacionadas com o espectro de autovalores da matriz.

A partir do exemplo da pequena rede com 5 páginas, é possível perceber que o problema que precisamos resolver se encerra na determinação dos autovetores associados ao autovalor 1.

$$\begin{aligned}v &= A \cdot v \Leftrightarrow A \cdot v = v \Leftrightarrow A \cdot v = 1 \cdot v \\A \cdot v = v &\Leftrightarrow A \cdot v - v = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(A - 1 \cdot I)}_{\substack{\text{matriz com toda} \\ \text{diagonal principal} \\ \text{igual a } -1}} \cdot v = 0\end{aligned}$$

De fato, esse modelo do *PageRank* é um caso particular do que se conhece na literatura como Cadeias de Markov. Trata-se de um processo estocástico em que se tem um número finito de estados possíveis (que seriam as páginas da *web*) e a probabilidade de se passar de um estado para outro depende apenas do estado atual – no caso do *PageRank* isso se traduz dizendo que a importância de uma página é a soma das frações das importâncias das páginas que enviam *links* para ela, ou seja, apenas o estado anterior ao da página que estamos analisando importa.

Não é nosso objetivo apresentar ou demonstrar todas as propriedades das Cadeias de Markov, mas as atividades (desenvolvidas na oficina) permitem a discussão de matemática em nível avançado por meio de ferramentas e abordagem simples. Com efeito, as principais propriedades da matriz (e que são compartilhadas com qualquer matriz de transição de uma Cadeia de Markov) aparecem naturalmente durante as discussões sobre o modelo apresentado para solucionar o problema do ranqueamento das páginas.

Na oficina ainda discutimos sobre as limitações que o modelo apresenta e propomos algumas maneiras de contorná-las. Como é o caso das páginas ou ciclos de páginas que podem se comportar como “ralos” para o modelo, drenando toda a importância das páginas (os chamados *dangling nodes*). Para tal usamos um aplicativo que desenvolvemos no *GeoGebra* onde se pode explorar alguns exemplos e experimentar os casos particulares nos quais os problemas podem surgir. Aproveitamos essa atividade para introduzir o conceito de matriz de teletransporte, uma das peças fundamentais para a definição da matriz *Google*, patenteada por Page e Brin.

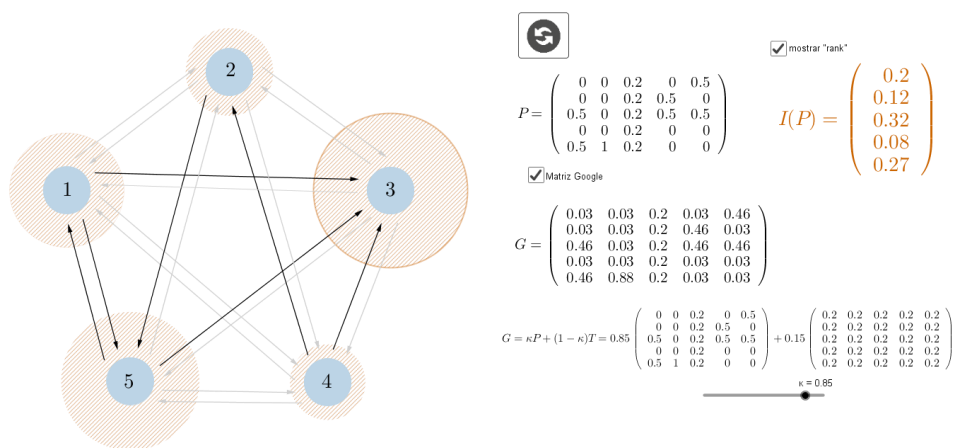


Figura 1: Captura de tela do aplicativo desenvolvido no GeoGebra

Como não é nosso intuito esgotar esse tema neste artigo, julgamos que a descrição aqui feita é representativa da maneira em que temos procurado trabalhar *como* a matemática é usada na tecnologia.

5. A dimensão sócio crítica da Modelagem

Apresentamos um uso para o conceito de matrizes que acreditamos ser, de certa forma, uma simplificação da exposição, uma vez que podemos, através da modelagem de uma situação oriunda da Ciência da Computação, traduzir um problema real que envolve [literalmente] bilhões de variáveis e técnicas matemáticas avançadas em uma linguagem simples e acessível para um estudante de nível médio. A Modelagem Matemática é “uma alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática”. (ALMEIDA & FERRUZI, 2009). Através das atividades desenvolvidas na oficina, buscamos apresentar a Matemática como protagonista no desenvolvimento tecnológico recente.

Gostaríamos de destacar que há uma dimensão sócio-crítica da Modelagem que pode ser trazida à tona nas aulas de Matemática.

As atividades de Modelagem são consideradas como oportunidades para explorar os papéis que a matemática desenvolve na sociedade contemporânea. Nem matemática nem Modelagem são ‘fins’, mas sim ‘meios’ para questionar a realidade vivida. Isso não significa que os alunos possam desenvolver complexas análises sobre a matemática no mundo social, mas que [a] Modelagem possui o potencial de gerar algum nível de crítica. (BARBOSA, 2001, p. 4).

Como Barbosa sinaliza mais a frente “as atividades devem potencializar a reflexão sobre a matemática, a própria Modelagem e seu significado social” (2001, p.5). Com relação ao tema que escolhemos modelar, percebemos que uma reflexão com significado social é possível, por exemplo, na medida em que é possível promover uma discussão que contraponha a ferramenta de busca do *Google* com outras ferramentas utilizadas anteriormente, nas quais era possível burlar o ranqueamento; outro fator que pode ser posto em discussão é o fato de a busca do próprio *Google* exibir primeiramente alguns anúncios.

6. Outras Ideias, Ações já Desenvolvidas e Perspectivas Futuras

Inspirados no sucesso da aplicação da nossa oficina em dois eventos de Educação Matemática, estamos pesquisando sobre outros modos de evidenciar como a matemática é utilizada no desenvolvimento tecnológico. Vemos potencial em temas relacionados à Inteligência Artificial, Processamento de Imagens e Big Data, dentre outros

Além disso, gostaríamos de registrar que os reflexos dessas discussões e reflexões sobre *como* utilizar a matemática para além de apenas indicar *onde* ela pode ser usada tem sido notado em nossas aulas no curso de Licenciatura em Matemática. Em consonância com ideias disseminadas pela literatura nacional e internacional em formação de professores de Matemática, reconhecemos que o professor de matemática tem um conhecimento que lhe é próprio e que precisa ser desenvolvido já na sua formação inicial. Assim, temos proporcionado momentos em que os licenciandos são levados a refletir sobre como é importante ter um olhar de cima (no sentido de Klein) sobre os conteúdos da matemática escolar.

Em uma disciplina do início do curso em que se objetiva rever conteúdos do Ensino Médio com vistas para disciplinas de Cálculo e Álgebra Linear, buscamos colocar os estudantes no papel de professor, por exemplo, ao solicitar a elaboração de uma explicação sobre um conteúdo estudado em sala (essencialmente, relacionado ao estudo das funções) para um colega que tenha faltado. Nessa disciplina também procuramos mostrar que as discussões realizadas na universidades não devem ser realizadas na mesma forma na escola, contudo, é importante que aconteçam para fundamentar a visão de cima proclamada por Klein.

Já em disciplinas mais avançadas do curso, temos tentado articular as discussões sobre os estudo dos conjuntos numéricos realizadas na disciplina de Introdução à Análise Real com a forma com que esses conjuntos são abordados em livros didáticos do Ensino Médio e das séries finais do Ensino Fundamental. Há também ações que refletem em conhecimentos além dos matemáticos, como por exemplo, o que deve ser considerado na elaboração de uma prova. A elaboração de uma prova foi proposta na disciplina de Cálculo Vetorial, nesta oportunidade, além das discussões que permeavam o conteúdo matemático em questão, os próprios estudantes elencaram aspectos que deveriam ser levados em consideração, a saber, o peso dado a cada questão, o equilíbrio entre questões fáceis e difíceis, entre outros.

A elaboração da oficina acabou propiciando que fomentássemos o nosso grupo de estudos e percebemos implicações das nossas discussões e reflexões não apenas em nossas turmas no curso de Licenciatura em Matemática, como também no próprio corpo docente [essencialmente formado por matemáticos puros ou aplicados] que vem tomando para si a responsabilidade de fazer parte de um curso de Licenciatura em Matemática, que, por ser um curso recente, ainda busca sua identidade. O envolvimento tem sido observado com o aumento da participação dos docentes na discussão sobre reforma curricular, por exemplo. Assim, esperamos que iniciativas como as nossas possam continuar nos inspirando de modo que possamos oferecer aos licenciandos e aos professores da Educação Básica uma formação coerente e aplicável na prática docente escolar.

Como Giraldo e Roque (2014) enfatizam, a formação de professores precisa buscar equipar os futuros professores com conhecimentos acerca dos conteúdos que ensinarão que não se reduzem nem à própria matemática, nem à pedagogia. Nessa perspectiva entendemos que a tecnologia permite que uma tal abordagem seja realizada na medida em que é possível problematizar e contextualizar a matemática e também desnaturalizar a apresentação de alguns conteúdos.

7. Referências

ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. C. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. *Alexandria*, 2(2), p. 117-134, 2009.

AUSTIN, D. How Google Finds Your Needle in the Web's Haystack. AMS Feature Columns, 2008. Disponível em < <http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-page-rank>> . Acesso em 12 de abril de 2016.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., Caxambu. Anais. Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM

BATTI, J. C. Um pouco da matemática usada no algoritmo *PageRank* do *Google*. 2015. 63 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática) UFSC, Florianópolis, 2015.

BERNARDES, A. C. S. História e Ensino de Matrizes: promovendo reflexões sobre o discurso matemático. 2016. 272 f. Tese (Programa de Engenharia de Sistemas e Computação) UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro, 2016.

BRASIL/Ministério da Educação, Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP 2 de 01 de julho de 2015. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. Diário Oficial da União, Brasília, 2 de julho de 2015 – Seção 1 – pp. 8-12.

CORRÊA, B. M.; CAMBRAINHA, M. ; CÔRTEZ, A. & ANTUNES, G. Matrizes: uma Tecnologia de Ponta, Anais do XII ENEM, São Paulo, 2016.

GIRALDO, V. A.; ROQUE, T. M. História e Tecnologia na Construção de um Ambiente Problemático para o Ensino de Matemática. In GIRALDO, V. A. & ROQUE, T. M. (Org.), O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, p. 9-37, 2014.

KILPATRICK, J., A Higher Standpoint. *Proceedings ICME 11*, Monterrey, México, 2008.

RANGEL, L. G., *Matemática elementar e saber pedagógico de conteúdo estabelecendo relações em um estudo colaborativo*. 2015. 243 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação) – Coppe, UFRJ, Rio de Janeiro. 2015.

_____; GIRALDO, V.; MACULAN, Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo – Estabelecendo Relações, Professor de Matemática Online, v. 2, p. 1-14, 2014.

ROQUE, Tatiana. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SCHUBRING, G. A Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior: Felix Klein e a sua Atualidade. In GIRALDO, V. A. & ROQUE, T. M. (Org.), O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, p.39-54, 2014.