

VIII Seminário de Pesquisa em
Educação Matemática
De 18 a 19 de novembro
Colégio de Aplicação - UFRJ

Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional Rio de Janeiro

**TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: INVESTIGANDO
O CONHECIMENTO PROFISSIONAL PARA SEU
ENSINO**

Isabel Campos Barroso

Colégio Pedro II

Universidade Anhanguera

isabelcbarroso@gmail.com

Maria Elisa Esteves L. Galvão

Universidade Anhanguera

elisa.gal.meg@gmail.com

Resumo: Esta pesquisa de doutorado, em andamento, tem por objetivo investigar os conhecimentos necessários ao professor de matemática para o ensino das Transformações Geométricas na Educação Básica. O estudo envolveu 21 professores da rede pública do Rio de Janeiro, participantes do Programa de Residência Docente do Colégio Pedro II e seguiu alguns princípios do Design Experiment. Na fase prospectiva do design foram coletados dados bibliográficos e documentais: o levantamento das pesquisas já realizadas sobre o tema; das ementas das disciplinas da área de Geometria dos cursos de formação de professores; assim como a análise das orientações curriculares para o ensino das Transformações Geométricas e da sua apresentação nos livros didáticos para a educação básica. Essas informações, acrescidas dos dados de entrevistas semiestruturadas realizadas com professores que atuam na Residência Docente e do questionário diagnóstico realizado com os professores em formação, serviram de base para a fase de experimentação: o design de um curso com atividades sobre transformações geométricas utilizando desde material concreto até atividades que devem ser realizadas com auxílio de software de geometria dinâmica. Esta pesquisa está ancorada nos resultados de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem das Transformações Geométricas (JANH, BULF, GRENIER), nos estudos teóricos sobre os conhecimentos docentes (SHULMAN, BALL, THAMES, PHELPS) e o desenvolvimento profissional (NÓVOA, PONTE). Pretendemos, com este estudo, delinear os conhecimentos necessários para o ensino das transformações geométricas, além de promover, junto aos professores residentes, reflexões sobre o ensino e aprendizagem deste conceito.

Palavras-chave: Transformações geométricas; Formação de Professores de Matemática; Residência Docente; Conhecimentos Docentes.

1. Introdução

O interesse por investigar o ensino e aprendizagem da geometria teve início no mestrado da primeira autora, ao realizar um estudo sobre as novas perspectivas para o ensino da geometria que surgiram com a utilização da geometria dinâmica, especificamente o software Cabri-géomètre. Essa experiência propiciou a oportunidade de dar continuidade ao trabalho com a Geometria associado ao uso de software na Licenciatura em Matemática, primeiro numa universidade particular e mais tarde numa universidade pública, ambas no Rio de Janeiro. Essas experiências evidenciaram que muitos estudantes chegam à universidade trazendo pouco ou nenhum conhecimento de geometria, o que confirma, na prática, a realidade do ensino da geometria descrita nas pesquisas de Pavanello (1989), Lorenzato (1995), Perez (1995) e Fainguelernt (1999) que subsidiaram a pesquisa realizada no mestrado e identificaram o que veio a ser chamado de omissão geométrica. Entre os motivos, estava a carência de conhecimentos básicos de geometria e o despreparo em relação ao uso de recursos por parte dos docentes, ou seja, devido a uma formação deficiente tanto em conteúdo quanto em metodologia.

Desde então vem crescendo o número de pesquisas que apontam experiências visando mudar essa realidade e que delineiam alternativas para a superação dos problemas apontados tanto no ensino como na formação inicial dos professores, como é possível ver em Andrade e Nacarato (2004), Nunes (2010), Leivas (2009) e Passos (2000), que indicam o crescente número de trabalhos utilizando a Geometria Experimental, a Geometria Dinâmica e as Transformações Geométricas.

A inclusão das Transformações Geométricas no estudo de conceitos geométricos vem sendo enfatizada por orientações curriculares tanto no Brasil como em outros países. As isometrias, transformações geométricas que preservam distâncias, e as homotetias, transformações geométricas que preservam o paralelismo e a razão entre os comprimentos de segmentos correspondentes, permitem dar um tratamento mais geral à noção de congruência e semelhança e fornecem um método alternativo para resolver certas classes de problemas geométricos.

O estudo das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência. As principais isometrias são: reflexão numa

reta (ou simetria axial), translação, rotação, reflexão num ponto (ou simetria central), identidade. Desse modo as transformações que conservam propriedades métricas podem servir de apoio não apenas para o desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas, mas também para a compreensão das propriedades destas. (BRASIL - PCN, 1998, p. 124)

No entanto as inovações curriculares esbarram na formação inicial do professor. Nesse sentido, assumindo a importância do estudo das transformações geométricas desde o ensino básico, é preciso formar o professor adequadamente para aplicar as propostas das orientações curriculares. O ganho com essa formação vai além de simplesmente torná-lo apto a aplicar as orientações, permitindo uma visão mais integrada da geometria, inclusive com outras áreas da matemática. Contribui para adequar a formação do professor de matemática para poder oferecer um ensino de melhor qualidade. Portanto, partindo do pressuposto da importância das Transformações Geométricas, já destacada em documentos curriculares oficiais, tanto do Brasil como de outros países e nas pesquisas sobre o tema, consideramos que para este tópico chegar até a escola básica é preciso desenvolver junto ao professor de matemática conteúdos especializados para esse ensino.

2. Objetivos e Questões de Pesquisa

Esta pesquisa qualitativa tem por objetivo examinar as contribuições de um estudo das transformações geométricas para o desenvolvimento do conhecimento profissional de professores de matemática participantes do Programa de Residência Docente do Colégio Pedro II. O objetivo central desta pesquisa é identificar em que medida uma formação continuada em Geometria para professores de Matemática em início de carreira pode contribuir para a melhoria da sua formação e fazer com que este conteúdo chegue às salas de aula. Além disso, pretendemos observar a compreensão do conceito de congruência trabalhado pela ótica das transformações, estimulando a sua utilização para a resolução de problemas.

Buscamos respostas para as questões:

- ☞ Quais os conhecimentos profissionais necessários para o ensino das transformações geométricas na educação básica?

- ☞ Um estudo adequado das Transformações Geométricas, particularmente as isometrias no plano, conduz a uma classificação destas e à compreensão de que é possível trabalhar todas as isometrias a partir da composição de reflexões?

Nessa perspectiva, esta pesquisa propõe-se a propiciar uma reflexão, com um grupo de professores de matemática em início de carreira, sobre possibilidades de atividades que trabalhem com as transformações geométricas utilizando desde papel e lápis, materiais manipulativos até softwares de geometria dinâmica em busca dos conhecimentos necessários ao professor para que este se sinta preparado para realizar este tipo de trabalho junto a seus alunos. Pretendeu também fazer emergir conhecimentos para o ensino das transformações geométricas e aprofundar conceitos estudados nos cursos de geometria da licenciatura.

3. As Transformações Geométricas e o ensino da Geometria

Segundo Pavanello (1989) a reforma do ensino advinda com o Movimento da Matemática Moderna (MMM), ao propor um trabalho com a geometria sob o enfoque das transformações geométricas, acabou por esvaziar a geometria.

Problemas ainda maiores surgem com a proposição de programas nos quais a geometria é desenvolvida sob o enfoque das transformações. A maioria dos professores de matemática não domina esse assunto, o que acaba por fazer com que muitos deles deixem de ensinar geometria sob qualquer enfoque. (PAVANELLO, 1993, p. 13)

Leme da Silva (2010) retoma essa representação construída sobre o abandono do ensino de geometria e o MMM trazendo outras questões não abordadas nas pesquisas anteriores. Ela observa que o trabalho de Pavanello é tido ainda como referência e embora não tenha priorizado o MMM, fez uma retrospectiva ampla de diferentes momentos da educação matemática,

Entretanto, acreditamos que essas análises contribuíram para a construção de uma representação sobre o ensino de geometria: o MMM, por propor um ensino de geometria segundo a abordagem das transformações geométricas, foi um dos responsáveis pelo abandono desse ensino a partir dos anos de 1960, assumindo desta forma o papel de “culpado” pelos problemas decorrentes do ensino de geometria nas últimas décadas do século XX. (LEME DA SILVA, 2010, p. 68)

Segundo a pesquisadora, num primeiro momento, o que se propôs para a geometria foi incorporar a linguagem dos conjuntos e fazer algumas mudanças nos axiomas ao invés de adotar as Transformações Geométricas propostas pelo MMM. Questiona ainda se o ensino da geometria na abordagem das transformações chegou de fato a ser experimentado. Para isso, Leme da Silva (2008) analisa a obra de Osvaldo Sangiorgi, considerado um dos principais divulgadores do Movimento da Matemática Moderna no Brasil, e observa que

Sangiorgi, no seu livro “Matemática curso moderno”, se aproximou bem mais da tendência utilizada nos EUA e baseada em Birkhoff, do que da proposta do ensino da geometria pelas transformações geométricas, ligada a Klein. (LEME DA SILVA In: VALENTE, 2008, p. 90).

Não houve na obra de Sangiorgi um posicionamento claro. Por um lado, incorpora as medidas nos postulados e desenvolve a geometria nesses moldes, em uma referência não explicitada a Birkhoff¹. Por outro lado, dá ênfase e considera importante o estudo das transformações geométricas, mas destina o conteúdo ao apêndice do livro didático. Ferreira (2008), ao analisar as orientações curriculares para o ensino da geometria do período da matemática moderna até o momento atual, observa que foi na geometria que Sangiorgi teve a maior dificuldade em introduzir as propostas do movimento. Em virtude das críticas que o MMM recebeu houve uma reação expressa nas propostas curriculares de São Paulo (1985 a 1992). As propostas sugerem o experimentalismo, uso de dobraduras e materiais e situações do cotidiano, assim como partir de problemas históricos, passando a focar na construção da aprendizagem por parte do aluno. No entanto Ferreira (2008) observa que tanto nas coleções didáticas do MMM como nas inspiradas nas propostas curriculares de SP a geometria aparecia no final do livro, de forma compartimentada e estanque. Somente a partir da década de 90, com as contribuições das investigações e experiências da área da Educação Matemática que são elaborados os PCN trazendo uma profunda mudança no tratamento da geometria. Ela passa a aparecer no decorrer de cada série e os conteúdos são contextualizados, propiciando ao aluno a refletir, analisar e conjecturar.

Observa-se uma tendência de revalorização da geometria no intuito de reparar as consequências de ela ter sido vista durante um longo período como uma área sem

¹ Birkhoff (1884-1944) introduz um sistema de axiomas que incorpora o conjunto dos números reais, introduzindo a ideia de medida desde o início. Os segmentos e os ângulos são medidos com os números reais.

grande interesse. Andrade e Nacarato (2004) analisaram os Anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM), buscando identificar tendências didático-pedagógicas para o ensino da Geometria no Brasil. Observaram um número crescente de trabalhos relacionados ao ensino de Geometria, o que comprova que este vem passando por um processo de valorização e de mudanças de concepções. Constataram a emergência de novas abordagens didático-metodológicas. Nunes (2010) compartilhada dessa ideia ao afirmar que do fim do século XX para o início do século XXI o ensino da Geometria ganhou um novo impulso, com diversos estudos e pesquisas sendo feitas no sentido de revitalizá-la,

“emergindo, então, novas tendências didático-pedagógicas como a Geometria Experimental – tida como a geometria baseada na experimentação e na ação humana – e a Geometria Dinâmica, entendida como o estudo da geometria através do movimento de figuras geométricas como, por exemplo, a Geometria das Transformações e a Geometria em ambientes computacionais”.
(NUNES, 2010, pág.112, grifo nosso).

Se por um lado, no interior das Sociedades Científicas de Educação Matemática, o ensino de Geometria vem passando por um processo de valorização e de mudanças de concepções, a prática vivida pelo professor em sala de aula ainda necessita de mudanças. As inovações curriculares não têm produzido os efeitos esperados nas salas de aula porque o estudo da geometria na formação inicial do professor de matemática não tem dado conta de suprir as dificuldades que os professores enfrentam para trabalhar com conteúdos de Geometria, especificamente as Transformações Geométricas. Segundo Gazire (2000) os professores alegam lacunas em sua formação inicial e continuam não ensinando geometria mesmo após a realização dos cursos de formação continuada. No entanto ao responder o item “qual a importância do ensino da geometria no ensino fundamental e médio?” foram unânimes em dizer que a geometria é importante para desenvolver a criatividade e a capacidade de raciocínio do aluno.

Nasser e Tinoco (2004) destacam que é importante incentivar uma postura dinâmica no ensino da geometria. Mas o movimento aparece na Geometria desde os Elementos de Euclides, onde encontramos que coisas que coincidem são iguais. Para Dias (2004) este axioma traz implícita a noção de superposição e aponta as questões: “*que movimento permite levar uma figura a se sobrepor a outra? Qual é a natureza deste movimento?*” Lopes e Nasser (1996) afirmam que é possível lançar mão das Transformações Geométricas para dinamizar o estudo da Geometria ao justificar a

congruência de duas figuras pelas isometrias e o uso da homotetia no ensino da semelhança.

Em Portugal, no Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007, a exploração das isometrias inicia-se no primeiro ciclo do ensino básico com a reflexão, de forma intuitiva, introduzindo a formalização nos ciclos subsequentes. Na virada do século Veloso (2000) já afirmava “é essencial retomar a intenção de dar às Transformações Geométricas o seu papel importante no ensino da geometria”. Luz (2007) reflete sobre as propostas de ensino de isometrias e homotetias, comparando à época do Movimento da Matemática Moderna ao período após os Parâmetros Curriculares Nacionais. Silva (2014) amplia essa reflexão para as Reformas Educacionais Francisco Campos, Capanema e Simões Filho anteriores ao Movimento da Matemática Moderna chegando até as orientações durante esse movimento e na sequência as propostas curriculares do estado de São Paulo e os PCN.

Mabuchi (2000) analisa pesquisas que tratam da incorporação das transformações geométricas no ensino fundamental e tece uma reflexão sobre como esse tema deveria ser incorporado à formação de professores investigando conhecimentos que deveriam ser trabalhados nessa formação. Apesar da preocupação comum com os conhecimentos que devem ser trabalhados na formação de professores, Mabuchi (2000) embasou seus estudos em Van Hiele, Brousseau e Douady analisando aspectos relacionados ao ensino e aprendizagem, tais como os professores entenderem a forma como os alunos aprendem. Diferentemente de Mabuchi, nossa expectativa está em investigar como este professor pode ser continuamente formado e o conhecimento profissional que ele precisa para desenvolver a sua prática. Refletir sobre como os alunos aprendem é um desses conhecimentos. Nesse sentido daremos especial atenção às pesquisas voltadas a formação inicial ou continuada de professores, como Medeiros (2012), Refatti (2012), Lage (2008), Drisóstes (2005). Estas pesquisas serão de grande valia no sentido de apoiarem nos resultados e questões já examinados.

4. Reflexões teóricas

Esta pesquisa terá duas vertentes na literatura, uma direcionada ao objeto matemático Transformações Geométricas, visto que para investigarmos a construção de

um conteúdo matemático é preciso descrever os aspectos relevantes do mesmo, sua evolução histórica, sua inclusão no currículo, formular hipóteses sobre possíveis dificuldades do seu ensino e aprendizagem. Para isso partiremos dos trabalhos teóricos desenvolvidos sobre o tema por Bulf (2008), Grenier (1988) e Jahn (1992).

Jahn (1998) investiga a passagem do trabalho dos alunos com as transformações de um ponto de vista local para um ponto de vista global. As transformações geométricas podem ser abordadas inicialmente como um movimento, isso fica implícito quando dizemos que duas figuras geométricas podem se sobrepor por um movimento. O trabalho com transformações deve ir se aperfeiçoando como uma ação no plano do ponto de vista pontual até passar para uma aplicação de um ponto global. Para Jahn (1998) essa última abordagem raramente é trabalhada nas escolas, essa ideia da figura geométrica como um conjunto de pontos e a ação da transformação sobre esse conjunto precisa ficar mais clara para se chegar ao conceito de transformação do plano no plano que leva uma figura em outra figura e à ação da transformação sobre o plano todo.

Bulf (2006) toma por objeto a simetria ortogonal e parte de estudos sobre como a pessoa pensa e quais os fatores que podem influir de forma positiva ou negativa na identificação mais rápida de uma simetria ortogonal. Faz observações sobre como as pessoas pensam o movimento da simetria ortogonal. A questão de Bulf (2006) é saber se os conhecimentos sobre a simetria ortogonal funcionam como uma alavanca facilitando ou não a aprendizagem das outras transformações. Para isso aborda aspectos culturais, visto que a simetria faz parte do cotidiano, indagando dessa forma se essas noções cotidianas funcionam como alavanca ou não.

Outra vertente volta-se para a formação profissional do professor de matemática e seus saberes docentes, que junto com a primeira, deve orientar o desenvolvimento da intervenção a ser realizada na formação continuada e sua posterior análise de dados. Fiorentini e Lorenzato (2006) tecem considerações sobre a necessidade de diferenciar a práxis do professor de matemática, do matemático e do educador matemático. Para eles a preocupação do educador matemático envolve o domínio do conteúdo específico e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/construção do saber matemático. O surgimento da Educação Matemática, enquanto campo profissional e científico, parte da preocupação de matemáticos e educadores em relação à qualidade e à socialização da matemática. Esse movimento começou, segundo Kilpatrick (2008), na

Alemanha com Felix Klein. Como reflexo desses questionamentos, surgem as primeiras iniciativas das universidades europeias em promover a formação do professor de matemática. Klein foi um dos primeiros a preocupar-se com a formação dos futuros professores reforçando que estes devem ter muito mais conhecimentos do que os que irão expor aos seus alunos, visto que além dos conhecimentos sobre os conceitos e teorias, precisa relacioná-los.

Para os estudos sobre os saberes do professor nos apoiaremos em Shulman (1986) e suas categorias do conhecimento do professor: conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico e conhecimento pedagógico de conteúdo e Ball, Tahmes e Phelps (2008) que refinaram as categorias de Shulman para o conhecimento matemático para o ensino da matemática, definindo subdomínios do conhecimento pedagógico e destacando um conhecimento que não está contido neste, o conhecimento profissional do conteúdo. A contribuição do conhecimento pedagógico e específico consiste em compreender como os professores devem conhecer o conteúdo com a intenção de usá-lo em sua prática. Uma das conjecturas apontada pelos autores está na possível melhoria das oportunidades de os professores aprenderem matemática para ensino na medida em que seja possível identificar tais tipos de conhecimentos e habilidades mais claramente.

As pesquisas voltadas para a formação dos professores buscando a compreensão dos conhecimentos necessários para ensinar destacam a prática na produção dos saberes docentes. Nesse sentido a construção desse conhecimento não se esgota na formação inicial, sendo um processo permanente que visa o desenvolvimento do olhar de maneira profissional. Segundo Llinares (2013), a competência docente “mirar profissionalmente” apoia-se na relação dialética entre o conhecimento da matemática para o ensino e o discurso gerado na resolução de tarefas profissionais. Para Llinares (2013) a identificação das tarefas profissionais é importante tanto por identificar os contextos nos quais o professor usa o conhecimento, selecionando as tarefas adequadas, quanto pelo reconhecimento da influência do contexto na maneira que usa o conhecimento.

5. Aspectos metodológicos

Esta pesquisa segue princípios do Design Experiment por buscar planejar atividades que evidenciem a compreensão de como professores em início de carreira interagem e argumentam sobre tópicos de transformações geométricas. A pesquisadora participa ativamente da construção dessas concepções junto aos residentes, observando-os de perto. Revisar o que os aprendizes dizem e fazem na tentativa de compreender suas realidades matemáticas é uma parte essencial de uma experiência de ensino.

A fase prospectiva do design incluiu a análise das experiências já realizadas com transformações geométricas encontradas em pesquisas na área, das recomendações curriculares oficiais para o ensino das Transformações Geométricas, tanto do Brasil quanto de outros países, assim como dos livros didáticos aprovados pelo PNLD a fim de verificar como as recomendações são atendidas e como o assunto é abordado nas obras didáticas. Para mapear a formação do professor em relação às Transformações Geométricas três fontes foram utilizadas: as ementas dos cursos de Licenciatura das universidades públicas do Rio de Janeiro, entrevistas com 21 professores participantes do Programa de Residência Docente do Colégio Pedro II e um questionário diagnóstico. O Programa de Residência Docente é oferecido a professores já formados, mas em início de carreira² atuantes na rede pública de ensino do Estado do Rio de Janeiro. Nas entrevistas, além da formação inicial, houve a pretensão de compreender se e como os professores trabalham com as Transformações Geométricas nas suas aulas de matemática. Além das entrevistas, utilizou-se um questionário diagnóstico com dois tipos de atividades. A primeira apresenta vários logotipos que todos já devem ter visto em algum tipo de mídia ou no dia a dia. A proposta é que os professores indiquem quais daqueles logotipos apresentam simetria e que tipos de simetria são identificados. A segunda atividade do questionário é composta de cinco questões de geometria retiradas da OBMEP, que com a utilização de alguma transformação geométrica tem a sua resolução facilitada.

As informações obtidas dessa fase prospectiva serviram de base para o design de um minicurso com atividades sobre Transformações Geométricas. Estas atividades apontam para duas direções: aprimorar o conhecimento específico do conteúdo pelo

² O critério de classificação na seleção dos professores é dar prioridade aos professores mais novos e com menos tempo de magistério.

professor e investigar, por meio da discussão das atividades, quais as contribuições deste estudo para o seu trabalho futuro, identificando conhecimentos pedagógicos para o seu ensino. Dessa forma, pretende-se ampliar o conhecimento adquirido nos cursos anteriores de Geometria e refletir sobre alternativas para trabalhar esse conteúdo em sala de aula. As atividades foram escolhidas de forma a contemplar diversos recursos como dobraduras, recortes, geoplano e o uso de um software de geometria dinâmica.

Cabe salientar que o que se quer investigar não é a sequência de atividades, mas compreender como os participantes aprendem, discutem e elaboram as sequências didáticas para levar à sala de aula. Criar situações e modos de interação entre os aprendizes de modo que as hipóteses fundamentadas na leitura e experiência possam ser validadas ou refutadas, pela observação da aprendizagem e argumentação dos participantes.

6. Considerações Finais

Esta pesquisa encontra-se ainda em desenvolvimento, mas podemos apontar algumas considerações sobre o que já foi investigado. É possível observar, com base no levantamento feito das pesquisas sobre o tema, o grande interesse que as Transformações Geométricas têm despertado em termos de pesquisa. Também constatamos que este tópico tem estado presente nas orientações curriculares desde a Reforma Francisco Campos, mantendo-se até hoje. A ênfase no seu ensino vem sendo proposta em documentos curriculares não só no Brasil, seu ensino tem sido fortemente recomendado em países como Portugal, França, Espanha e USA.

Da análise dos livros didáticos pode-se observar que todas as coleções aprovadas no PNLD, fazem alguma referência às Transformações. Variam, no entanto, o tratamento e distribuição dos conteúdos relacionados ao tema. Pode-se notar que eles predominam nos livros do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental. Além disso, há uma ênfase na simetria e na reflexão axial, em detrimento às outras transformações isométricas como a translação e a rotação, ainda pouco abordadas.

Da análise das ementas dos cursos de Licenciatura é possível perceber que hoje, pelo menos nas universidades públicas, examinadas até o momento, todas contemplam cursos de Geometria. No entanto as Transformações Geométricas ainda não estão

presentes nas ementas desses cursos. Quando constam, fazem parte do curso de Desenho Geométrico ou de disciplinas denominadas Laboratório ou Prática de ensino.

Temos consciência que a tarefa não é simples e que ainda tenho muito trabalho a analisar. Esperamos que as observações que venham a surgir a partir desta pesquisa sejam uma contribuição para futuras inovações na compreensão dos conhecimentos que precisam ser trabalhados na formação inicial ou continuada do professor de forma que as Transformações Geométricas cheguem à sala de aula.

5. Referências

ANDRADE, José A. A.; NACARATO, Adair M. Tendências didático-pedagógicas para o ensino de geometria. In: ANPED, 27ª reunião anual, Caxambu, MG, 2004.

BALL, Deborah L.; THAMES, Mark H.; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching what makes it special?. *Journal of teacher education*, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BULF, Caroline. *Etude des Effets de la Symetrie Axiale sur la Conceptualisation des Isometries Planes et sur la Nature du Travail Geometrique au College*. 2008, 363 f. Tese (Doutorado em Didactique des Mathématiques) - Universite Paris Diderot, Paris, 2008.

COBB, P et al. Design Experiments in Educational Research. In: *Educational Researcher*, v. 32, n. 1, p. 9-13, Jan/Fev, 2003.

DIAS, Mônica S. da S. O movimento na Geometria: Abstração ou realidade?. In: *Vértices*, v. 6, n. 2, p. 57-82, 2004.

DRISOSTES, Carlos A. T. *Design Iterativo de um micromundo com professores de matemática do ensino fundamental*. 2005, 263 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, São Paulo, 2005.

FAINGUELERNT, Estela K. *Educação Matemática: representação e construção em geometria*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1999.

FERREIRA, Rogério C. *Orientações curriculares para o ensino da geometria: do período da matemática moderna ao momento atual*. 2008. 252 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). PUC, São Paulo, 2008.

FIORENTINI, Dario.; LORENZATO, Sergio. *Investigação em Educação Matemática: Percursos Teóricos e Metodológicos*. 3ª ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

GAZIRE, Eliane. S. *O não resgate das geometrias*. 2000, 238 f. Tese (Doutorado em Educação). Unicamp, Campinas, SP, 2000.

- GRENIER, Denise. *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. 1988, 429 f. Tese (Doutorado em Didactique des Mathématiques) - Université Joseph Fourier, Grenoble, 1988.
- JAHN, Ana Paula. *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre*. 1998.459 f. Tese (Didactique des Mathématiques) - Université Joseph Fourier, Grenoble, 1998.
- KILPATRICK, Jeremy. *A higher standpoint*. ICME 11. Proceedings, 2008.
- LAGE, M^a Auxiliadora. *Mobilização das Formas de Pensamento Matemática no estudo de Transformações Geométricas no Plano*. 2008, 173 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). PUC, Minas Gerais, 2008.
- LEIVAS, José C. P. *Imaginação, Intuição e Visualização: a Riqueza de Possibilidades da Abordagem Geométrica no Currículo de cursos de Licenciatura de Matemática*. 2009. 294 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.
- LEME DA SILVA, Maria Célia, A Geometria escolar moderna de Oswaldo Sangiorgi. In: VALENTE, Wagner R. (Org.) *Oswaldo Sangiorgi: um professor moderno*. São Paulo: Anablume, 2008, p. 69-93.
- _____. A geometria escolar e o Movimento da Matemática Moderna: em busca de uma nova representação. In: FLORES, C; ARRUDA, JP (orgs), *A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: contribuição para a história da educação matemática*. São Paulo: Anablume, 2010, p. 65-88.
- LLINARES, Salvador. El desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista*, n. 50, p. 117-133, out/dez, 2013. Editora UFPR, Curitiba.
- LOPES, Maria Laura L.L. e NASSER, Lilian (Orgs.) *Geometria na era da imagem e do movimento*. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1996.
- LORENZATO, Sergio. Por que não ensinar geometria? *Educação Matemática em Revista*, Blumenau - SBEM, n. 4, p. 3-13, 1^o sem. 1995.
- LUZ, V. A. *Um estudo sobre o ensino de transformações geométricas: da reforma da matemática moderna aos dias atuais*. 2007, 197 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, São Paulo, 2007.
- MABUCHI, S. T. Transformações geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores. 2000. 259 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC, São Paulo.
- MEDEIROS, Margareth. F. *Geometria Dinâmica no Ensino de Transformações no Plano: uma experiência com professores da Educação Básica*. 2012, 172 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). UFRGS, Porto Alegre, 2012.
- NASSER, Lilian e TINOCO, Lúcia. (Orgs.) *Curso básico de geometria: enfoque didático*. 3^a ed. Rio de Janeiro: UFRJ/IM. Projeto Fundão, 2004.
- NÓVOA, Antonio. Para uma formação de professores construída dentro da profissão. In: _____. *Professores: imagens do futuro presente*. Lisboa: Educa, 2009. p. 25-46.
- NUNES, Celia B. *O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de*

- professores de matemática*. 2010, 430 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), UNESP- Rio Claro, 2010.
- PASSOS, Carmen L. B. *Representações, interpretações e prática pedagógica: a geometria na sala de aula*. 2000, 398 f. Doutorado em Educação Matemática. Unicamp – Campinas, 2000.
- PAVANELLO, Regina M. *O abandono do ensino da Geometria: uma visão histórica*. 1989. 210 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Unicamp - Campinas, 1989.
- PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. *Zetetiké: Revista de Educação Matemática*, v. 1, n. 1, p. 7-18, 1993.
- PEREZ, Geraldo. A realidade sobre o ensino de geometria no 1º e 2º graus no estado de São Paulo. *Educação Matemática em Revista*. Blumenau: SBEM, n. 4, p. 54-62, 1995.
- PONTE, João P. A investigação sobre o professor de Matemática. Problemas e perspectivas. Conferência realizada no I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, promovido pela SBEM, Serra Negra, São Paulo, Brasil, Novembro de 2000.
- PONTE, João P. *Práticas profissionais dos professores de matemática*. Coleção Encontros de Educação. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014.
- REFATTI, Liliane R. *Uma sequência didática para o estudo de transformações geométricas*. 2012, Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática). Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS, 2012.
- SHULMAN, Lee S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, v. 15, n.2, p. 4-14, fev,1986.
- SILVA, Júlio C. D. *As Transformações Geométricas nos currículos prescritos de matemática no ensino fundamental (1930-2010)*. 2014, 171 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNIAN, São Paulo, 2014
- VELOSO, Eduardo. *Geometria: temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 2000.