VIII Seminário de Pesquisa em Educação Matemática
De 18 a 19 de novembro
Colégio de Aplicação – UFRJ
Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional Rio de Janeiro

DESEMPENHO EM CÁLCULO: INVESTIGANDO A TRANSIÇÃO DO ENSINO MÉDIO PARA O SUPERIOR[1]

Lilian Nasser
Projeto Fundão - IM/UFRJ
lnasser.mat@gmail.com

Geneci Alves de Sousa
SENAI-CETIQT, SEEDUCRJ, SME-RJ, Projeto Fundão - IM/UFRJ
prof.geneci@yahoo.com.br

Marcelo André A. Torraca
SENAI-CETIQT, SEEDUCRJ, UVA, Projeto Fundão - IM/UFRJ
torraca@gmail.com

Resumo:
Pesquisas nacionais e internacionais têm sido desenvolvidas, com o objetivo de identificar as razões para os altos índices de evasão e repetência na primeira disciplina de Cálculo. O objetivo desta pesquisa, desenvolvida no âmbito do Projeto Fundão (IM/UFRJ), é investigar como se dá a transição do Ensino Médio para o Superior, e empreender ações para melhorar esses índices, a partir da análise de soluções apresentadas por alunos calouros de Engenharia numa universidade particular, na disciplina de Cálculo I. O baixo desempenho nessa disciplina é atribuído, em geral, a lacunas na aprendizagem de Matemática na Escola Básica e a prontidão para a aprendizagem de Cálculo depende de vários conteúdos trabalhados nessa etapa, como geometria, vetores e funções. Em geral, esses tópicos são abordados de modo isolado, sem conexão e com abrangência limitada. Os resultados indicam que as dificuldades na transição para o Ensino Superior, em especial na disciplina de Cálculo, podem ser amenizadas por abordagens adequadas de alguns tópicos do Ensino Médio.

Palavras-chave: Cálculo; Transição; Ensino Médio; Ensino Superior.

1. Introdução

[1] Este trabalho contou com a colaboração dos demais membros do grupo de pesquisa: os professores Bruno do Espírito Santo Batista, Jeanne Barros, José Alexandre Ramos Pereira, Magno Luiz Ferreira, Rafael Felipe Novoa Vaz e os estagiários Alan Junior Severo e Juliana Severino Mendonça.

Esta pesquisa foi motivada pela observação das dificuldades apresentadas por alunos calouros na primeira disciplina de Cálculo, causando altos índices de reprovação e de evasão (OLIVEIRA e RAAD, 2012). Nosso grupo, formado por professores de Cálculo e do Ensino Médio, resolveu desenvolver esta pesquisa, com os objetivos de investigar como se dá a transição do Ensino Médio para o Superior em relação à aplicação de conteúdos básicos para o Cálculo e empreender ações para diminuir tais índices. A meta é a elaboração de material didático para professores que atuam no Ensino Médio, sugerindo abordagens adequadas para alguns conteúdos, tais como funções, vetores e Geometria, de modo a diminuir as dificuldades em Cálculo.

Os estudos relatados a seguir mostram que há uma preocupação nacional e internacional em investigar estratégias de ensino que tornem mais amena a transição para o ensino superior, em especial, na disciplina de Cálculo.

2. Revisão de literatura

Observa-se que grande parte dos problemas propostos na disciplina de Cálculo depende de uma representação visual adequada, como os problemas típicos de "máximos e mínimos", de "taxas relacionadas" e de "área entre curvas". Em geral, a dificuldade dos alunos nesses problemas não é na aplicação do conceito de derivada ou de integral, mas na sua representação geométrica e na identificação de relações entre as grandezas envolvidas no problema ou os elementos da figura. Balomenos, Ferrini-Mundy e Dick (1994) afirmam que muitos professores não percebem a conexão da geometria do Ensino Médio com a matemática do Curso Superior. Vários conceitos fundamentais de Cálculo são introduzidos por meio de figuras, como os conceitos de integral definida, derivada, área entre curvas, máximos e mínimos, e os problemas de taxas relacionadas. Esses pesquisadores observaram que os alunos resistem ao uso de estratégias geométricas e espaciais, embora seus professores enfatizem o uso de diagramas na resolução de problemas de Cálculo (p. 241). Essa resistência se deve, provavelmente, à falta de domínio dos conceitos geométricos por parte dos alunos de Cálculo. Esses autores afirmam ainda que

> o verdadeiro desafio está na habilidade de desenvolver uma representação geométrica de situações físicas a partir de uma descrição verbal complicada. Muitas vezes, a chave da solução

> consiste em resolver um problema geométrico em que o tempo é "congelado". (BALOMENOS et al, 1994, p. 247)

Sarubbi e Soares (2009) investigaram as dificuldades na resolução de problemas de taxas relacionadas, observando que para a compreensão adequada de alguns conteúdos é necessário apelar muitas vezes para a álgebra do ensino médio ou a geometria do ensino fundamental. Assim, deficiências trazidas da álgebra, da aritmética, da geometria plana e espacial contribuem para o insucesso também em problemas no ensino superior em disciplinas como o Cálculo Diferencial e Integral (SARUBBI e SOARES, 2009, p.4).

Outra pesquisa, desenvolvida por Irias *et al* (2011), analisou as dificuldades em Cálculo Diferencial e Integral em uma turma de Licenciatura em Matemática. Esses pesquisadores constataram, por meio da análise das avaliações e de entrevistas com os professores, que as dificuldades dos alunos estão em:

- ✓ Funções: na construção de gráficos e na descrição do domínio e da imagem;
- ✓ Manipulação algébrica;
- ✓ Interpretação dos dados.

Nasser (2009) investigou o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos, constatando que as dificuldades se devem, principalmente, à falta de preparação prévia e sugere ações que podem ajudar a superá-las, como o uso dos estilos de aprendizagem dos alunos no desenvolvimento de estratégias de ensino apropriadas, em particular, enfatizando exercícios sobre transformações de gráficos. Nessa abordagem, os alunos chegam ao gráfico pretendido por meio de transformações nos gráficos básicos. São mostrados exemplos de gráficos de retas, parábolas e funções envolvendo $|x|$, $ln\ x$ e e^x,obtidos por esse processo.

3. Referencial teórico

Analisando os desafios enfrentados por alunos ao iniciar os estudos em Matemática avançada, Robert e Schwarzenberger (1991) apontam mudanças quantitativas:

> mais conceitos, menos tempo, necessidade de mais reflexão, mais abstração, menos problemas significativos, mais ênfase em demonstrações, maior necessidade de aprendizagem versátil, maior

> necessidade de controle pessoal sobre a aprendizagem. A confusão causada pelas novas definições coincide com a necessidade de mais pensamento dedutivo abstrato. A junção dessas mudanças quantitativas gera uma mudança qualitativa que caracteriza a transição para o pensamento matemático avançado (ROBERT e SCHWARZENBERGER, 1991, p. 133).

Tall (1991) também aponta a falta de domínio do pensamento matemático avançado como uma das causas para um resultado insatisfatório dos alunos nas disciplinas de Cálculo, ao afirmar que "[...] a mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significativa: da descrição para a definição, do convencimento para a demonstração de uma maneira lógica, baseada naquelas definições." (TALL, 1991, p.20)

Em sua tese de doutorado, Rezende (2003) afirma que as dificuldades em Cálculo são de natureza epistemológica, requerendo uma preparação anterior ao início dos estudos de Cálculo. Ele sugere que um trabalho no Ensino Médio sobre a variabilidade de funções pode facilitar a aprendizagem nessa disciplina.

A metodologia de análise de erros foi usada numa investigação sobre as dificuldades na aprendizagem de Cálculo, desenvolvida por Cavasotto e Viali (2011), concluindo que "[...] o maior obstáculo enfrentado pelos educandos não está nos conteúdos específicos do Cálculo, mas sim nos conhecimentos da Matemática básica, estudados nos níveis Fundamental e Médio."(CAVASOTTO e VIALI, p.15)

O conceito de função, fundamental na aprendizagem de Cálculo, tem sido tema de estudos e pesquisas. De acordo com Caraça (1984), o conceito de função está ligado à ideia de correspondência entre dois conjuntos. A função é vista como uma busca da compreensão da 'Realidade', com suas características fundamentais: a interdependência e a fluência (p. 109). Isto é, a função surge da necessidade de interpretar fenômenos da natureza, observar a interdependência entre duas grandezas e descrever regularidades. Como exemplo, Caraça apresenta a variação quantitativa de espaço e tempo no fenômeno da queda livre de um corpo no vácuo (CARAÇA, 1984, p. 126).

Even (1990) também observou dificuldades no domínio de funções em sua pesquisa. Ela relata a dificuldade de futuros professores em decidir se $g(x)=\begin{cases} x, \text{ se } x \text{ é um número racional} \\ 0, \text{ se } x \text{ é um número irracional} \end{cases}$ é ou não uma função. Checando com a definição de função, um sujeito da pesquisa afirmou que é uma função, já que "há uma imagem única para cada número" (p. 528). No entanto, na tentativa de traçar o gráfico dessa função, esse futuro professor marcou alguns números irracionais no eixo dos x e esboçou uma parte da reta $y = x$ com buracos.

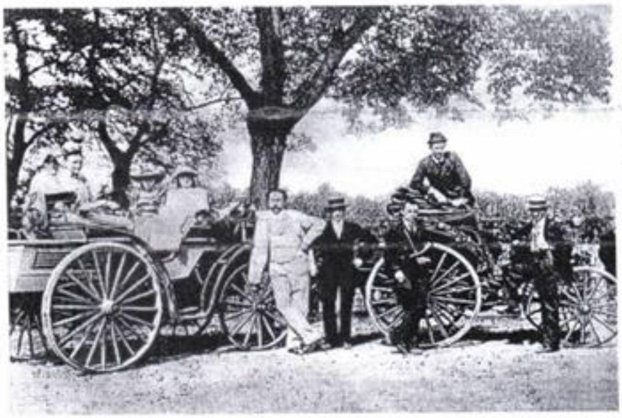
Em relação às funções, a diversidade de representações também impede o domínio total do conceito. De acordo com Duval,

> há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é a condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato.(DUVAL, 2003, p. 31).

4. Metodologia

A investigação recaiu sobre a análise de soluções apresentadas por alunos calouros de Engenharia numa universidade particular, na disciplina de Cálculo I. A seguir, são apresentadas algumas soluções extraídas de avaliações formais, que exemplificam as dificuldades e erros mais comuns.

2) "Bertha Benz e a primeira viagem de automóvel"
Leia mais sobre esse assunto em http://oglobo.globo.com/economia/bertha-benz-a-primeira-viagem-de-automovel-2871698#ixzz1efJc8fLj



(...) Entusiasta das bicicletas e dos motores, Benz acabou inventando o automóvel... Sua mente genial bolou um chassi tubular, um sistema de tração e pronto - nasceu o Patent-Motorwagen. O curioso é que, a menos de 100km de distância e sem o conhecimento de Benz, outro alemão também avançava na criação do automóvel. Era Gottlieb Daimler. Só em 1926 é que as empresas se uniriam, formando a Daimler-Benz.

O primeiro exemplar do Benz Patent-Motorwagen, de 1886, hoje está no Deutsches Museum, em Munique. Depois, vieram aperfeiçoamentos, até que as vendas ao público enfim começassem, em 1888.

Na primeira viagem de automóvel, iniciada em 5 de agosto de 1888, era Bertha Benz quem estava ao volante em um veículo que viaja para o Sul a 60 Km/h, e em um outro veículo estava seu compatriota Gottlieb, que se descolava rumo ao oeste a uma velocidade de 25 km/h. Suponhamos que as velocidades se mantiveram constantes e que tenham partido do mesmo local (origem), a que taxa estaria aumentando a distância entre os veículos duas horas após a partida?

Figura 1 - Questão aplicada numa turma de Cálculo I, do 1º período de Engenhariadisciplina de Cálculo I.

As soluções dos 15 alunos que resolveram esta questão foram assim divididas: três alunos deixaram a questão em branco; quatro apresentaram uma solução parcialmente correta; sete alunos erraram a questão e somente um aluno acertou completamente. Os 4 alunos que resolveram parcialmente a questão representaram corretamente o problema através de um desenho, identificaram as variáveis, correlacionaram-nas, derivaram e “resolveram” o problema. Entretanto, apresentaram pequenos erros ao longo de seu desenvolvimento, como exemplificado na figura 2.

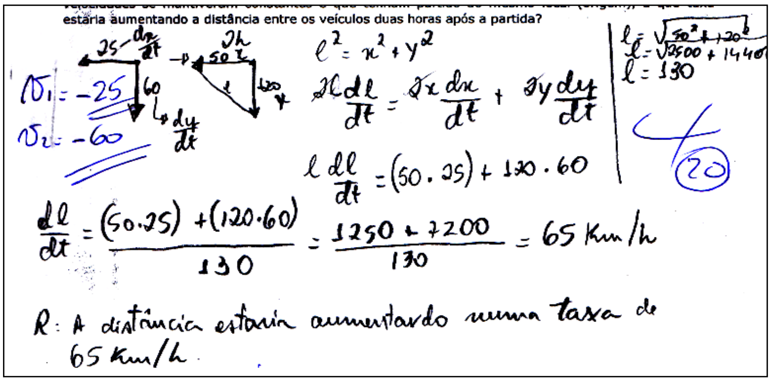


Figura 2 - Erro na representação do plano cartesiano

Dentre as 7 respostas erradas, podemos destacar os seguintes erros: não conseguir representar, no plano cartesiano, a situação problema; representar o triângulo mas, não identificar as variáveis; representar o triângulo e as variáveis mas, por não identificar que se tratava de um triângulo retângulo, não souberam como relacioná-las por meio do Teorema de Pitágoras.

O problema a seguir foi objeto de um artigo de pesquisa com alunos de Cálculo, levantando algumas hipóteses a respeito das causas das dificuldades (SARUBBI e SOARES, 2009). Esse mesmo problema foi aplicado em nossa pesquisa, como uma questãodo exame final, realizado por 23 alunos.

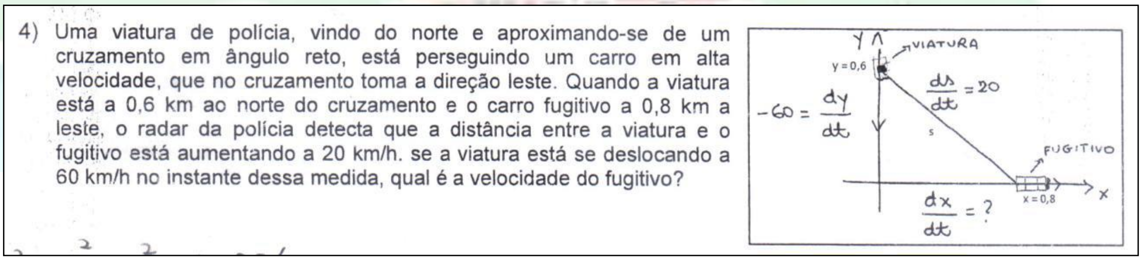

4) Uma viatura de polícia, vindo do norte e aproximando-se de um cruzamento em ângulo reto, está perseguindo um carro em alta velocidade, que no cruzamento toma a direção leste. Quando a viatura está a 0,6 km ao norte do cruzamento e o carro fugitivo a 0,8 km a leste, o radar da polícia detecta que a distância entre a viatura e o fugitivo está aumentando a 20 km/h. se a viatura está se deslocando a 60 km/h no instante dessa medida, qual é a velocidade do fugitivo?

Figura 3 - Questão aplicada no Exame Final de Cálculo I, adaptada de Weir, Hass e Giordano, (2009, p.234).

No total obtivemos sete respostas erradas, duas parcialmente corretas e quatorze respostas corretas. Dentre as sete respostas incorretas destacamos erros naaplicação do Teorema de Pitágoras e erros nas operações com números decimais, mostrados nas figuras 4 e 5.

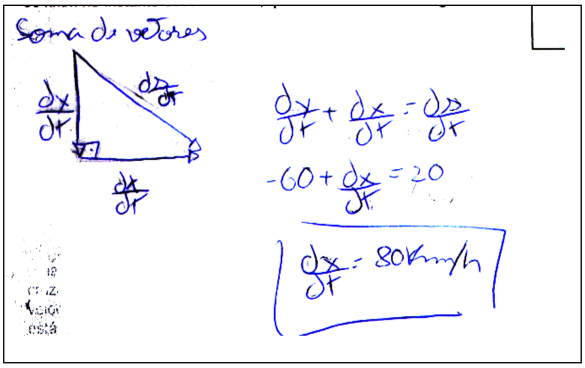


Figura 4 - Erro na aplicação do Teorema de Pitágoras

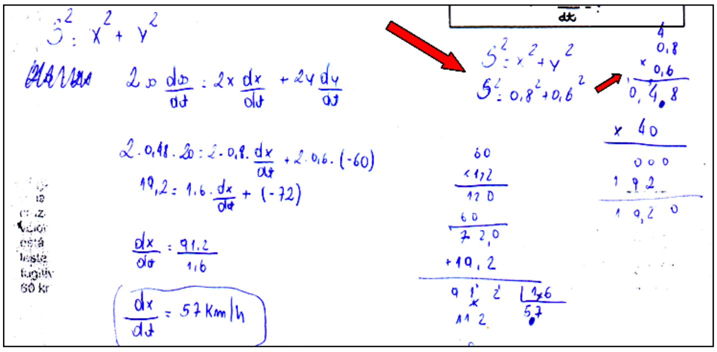


Figura 5- Erro nas operações com números decimais.

Apesar dos erros básicos cometidos, o índice de acertos da questão 4 do Exame Final foi bem maior que o da questão 2 da P2 (figura 1). Enquanto apenas um dos 15 alunos que fizeram a prova bimestral (6,7%) acertou essa questão, 14 alunos acertaram a questão do Exame Final, o que corresponde a 60,9% dos 23 alunos que o realizaram. Essa melhoria no índice de acertos pode ser justificada pela discussão com a turma sobre os erros cometidos na P2.

Em questões típicas de taxas relacionadas, os erros causados por dificuldades específicas da disciplina de Cálculo, em geralocorrem no cálculo das derivadas ou pela substituição de valores na expressão antes de derivar. Já o estabelecimento de uma equação relacionando as variáveis do problema depende de conhecimentos anteriores, como a semelhança de triângulos ou a aplicação de fórmulas ou de teoremas, como nos problemas analisados.

Na resolução de problemas de máximos e mínimos observamos grande número de erros no estabelecimento da sentença matemática que equaciona o problema, no trato algébrico e no cálculo de derivadas. A figura 6 mostra a solução de um aluno, que cometeu erro ao equacionar o problema.

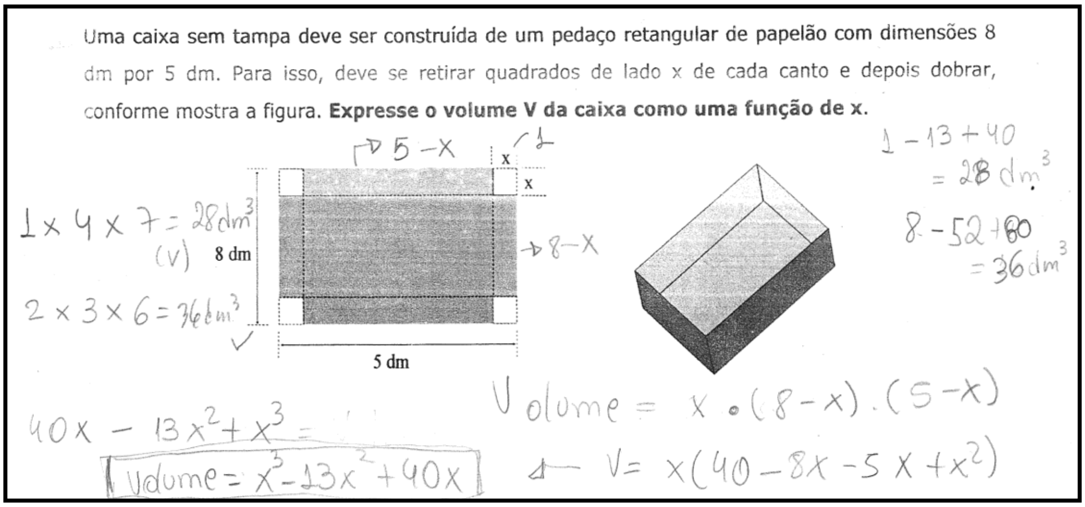


Figura 6 – Erro ao equacionar um problema de máximos e mínimos.

Por sua vez, o aluno que apresentou para o mesmo problema a solução da figura 7 escreveu a sentença correta, mas errou na multiplicação para obter a expressão da função.

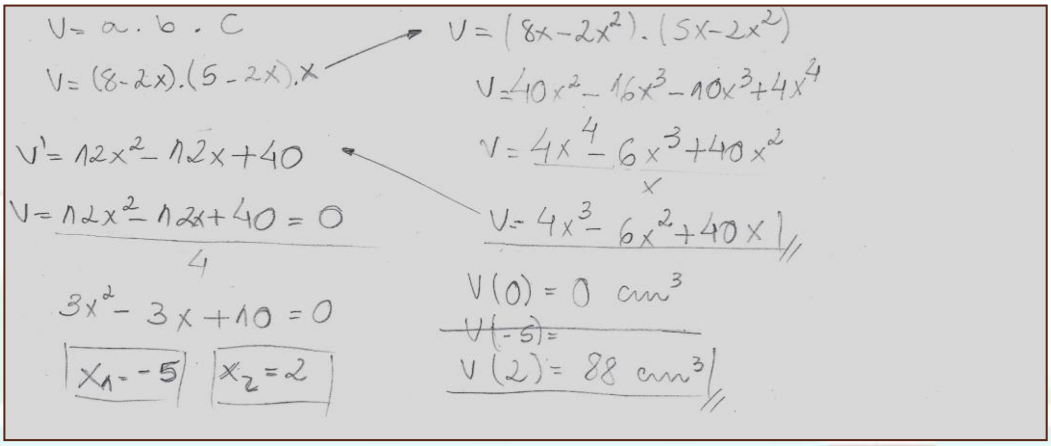


Figura 7 – Erro na multiplicação de expressões algébricas.

5. Recomendações para minimizar as dificuldades

Com base nas pesquisas citadas, na experiência e nos trabalhos já desenvolvidos pelo nosso grupo (NASSER, SOUSA & TORRACA, 2012), algumas ações no Ensino Médio podem ser destacadas como favoráveis à superação de obstáculos à construção do conceito de função e ao domínio do traçado de gráficos, minimizando as dificuldades.

- ✓ **o incentivo às habilidades com o trato algébrico**, em particular as operações e fatoração de expressões algébricas, e o completamento de quadrados, necessário, por exemplo, no cálculo de limites e na translação de gráficos (figura 8 a seguir).

- ✓ **o reconhecimento de padrões em sequências de figuras, que constitui uma boa prontidão para o conceito de função**, e pode ser explorado desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. Cândido (2000) relata uma experiência propondo um caráter dinâmico para o ensino de funções. Inicialmente, a ênfase é na familiarização com a variação de grandezas, observando a dependência entre as variáveis. A seguir, numa segunda etapa, as atividades abordam a análise e comparação de variações, em que as grandezas são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou nem direta nem inversamente proporcionais. A partir daí, passa-se à familiarização com as idéias que dão suporte ao conceito de função do 1º grau, com suas características algébricas e geométricas.

- ✓ **a exploração de funções definidas por mais de uma sentença,** que contribui para derrubar a crença de que toda função deve ser representada por uma expressão algébrica. Problemas práticos como o custo de estacionamentos, dependendo do tempo de permanência, do imposto de renda a ser pago são exemplos representados por funções definidas por várias sentenças. Os alunos têm chegado ao Ensino Superior sem vivenciar esse tipo de gráficos.

- ✓ **o tratamento das progressões como funções, cujo domínio é o conjunto dos números naturais.**Esta é uma recomendação do PCN/EM (1999, p.225) que é reforçada na segunda versão da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2016), ainda em discussão.Ainda no tópico de funções, é recomendada a idéia de relacionar esse conceito com outros conteúdos da Matemática e de outras Ciências.

- ✓ **o uso de transformações no plano para chegar ao gráfico pretendido por meio de translações e reflexões nos gráficos básicos.** Os alunos devem ser incentivados a traçar gráficos de funções afim e quadráticas usando transformações a partir dos gráficos básicos de $y = x$ e $y = x^2$, respectivamente. A figura 7 mostra as transformações aplicadas à parábola $y = x^2$para obtenção da parábola $y = x^2 – 4x + 3$. É preciso completar o quadrado e expressar essa função por $y = (x – 2)^2 – 1$.

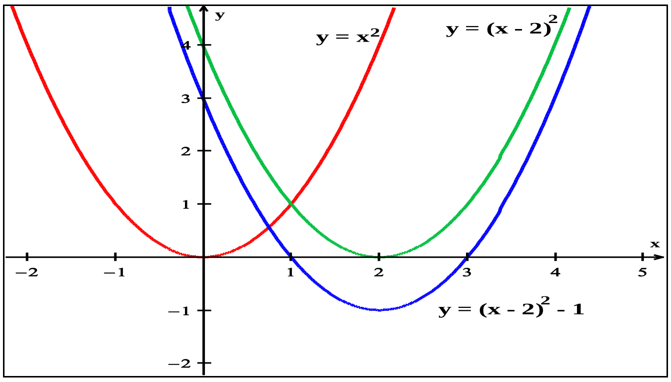


Figura 8– Gráfico obtido a partir de translações.

Ainda na disciplina de Cálculo I, esse método também pode ser usado para traçar gráficos de funções envolvendo variações das funções $y = \ln x$ e $y = e^x$. Mais adiante, em Cálculo III, o mesmo procedimento pode ser usado com funções de duas variáveis, para facilitar a identificação de parabolóides, cones, cilindros e esferas por meio de transformações de superfícies centrais básicas (NASSER, 2009, p.52).

✓ **o uso da tecnologia para a observação de modificações no traçado de gráficos.** Perspectivas de melhoria do ensino–aprendizagem podem ser criadas com o uso de softwares para visualizar gráficos de funções (Torraca, 2005), tais como Excel, Derive, Maple e Winplot. Além desses, podem ser usados o Geogebra e o Régua e Compasso, de fácil aplicação. Por exemplo, os alunos podem ser desafiados a investigar o que ocorre com o gráfico da função quadrática $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ quando são feitas alterações nos coeficientes *a*, *b* e *c*, separadamente. Em particular, utilizando o Winplot, é possível traçar uma família de funções da forma $f(x) = x^2 + bx + 1$ quando o coeficiente de b varia no intervalo $-4 \leq b \leq 4$. O lugar geométrico dos vértices dessa função quadrática quando b varia é uma função quadrática da forma $f(x) = -x^2 + 1$, que pode ser observada na figura 9.

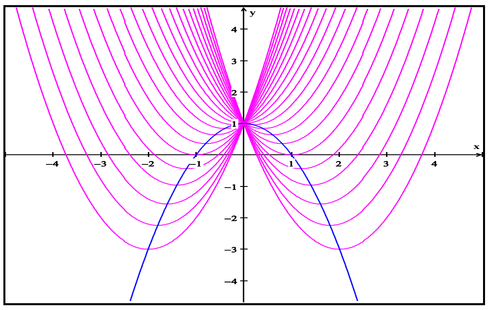


Figura 9 – Lugar geométrico dos vértices do gráfico de $\boldsymbol{f(x) = x^2 + bx + 1}$ quando o coeficiente b varia.

6. Considerações finais

As dificuldades na aprendizagem de Cálculo e em particular na aquisição do conceito de funções têm preocupado os professores, gerando várias linhas de pesquisa.

As respostas de alunos às questões de Taxas Relacionadas e de Máximos e Mínimos analisadas neste trabalho indicam que é considerável o número de erros devidos a conteúdos referentes à Escola Básica. Como vimos, isso tem sido motivo de estudos e pesquisas nacionais e internacionais. As conclusões apontam soluções a curto prazo, no sentido de preencher as lacunas na aprendizagem de Matemática básica por meio de disciplinas que antecedem ou são concomitantes com a introdução ao estudo de Cálculo. No nosso ponto de vista, isso não basta. É preciso desenvolver ações que gerem a prontidão para o estudo de Cálculo ao longo do Ensino Médio. Os alunos devem explorar exercícios envolvendo a modelagem de problemas, com a análise das variáveis envolvidas e sua relação. Outro aspecto importante é a visualização de sólidos geométricos, com análise dos elementos que aparecem em suas seções transversais e interseções, que podem facilitar a resolução de problemas de máximos e mínimos. A Geometria Analítica também pode preparar para a representação e visualização das situações, como no caso dos problemas analisados neste trabalho. A falta de interpretação correta das informações fornecidas pelos enunciados dos problemas apresentados é outro fator que pode ser minimizado por um trabalho adequado ao longo da Educação Básica. Como desdobramento desta pesquisa, pretendemos desenvolver um material de apoio para professores de Matemática do Ensino Médio, com o enfoque dos livros de Cálculo I.

7. Referências

BALOMENOS, R., FERRINI-MUNDY, J. e DICK, T. Geometria: prontidão para o Cálculo. In: M. Lindquist e A. Shulte (org.). Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo, Atual Editora, p. 241;247, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. BNCC, 2ª versão, Brasília, DF, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, Brasília, DF, 1999. P.225.

CANDIDO, S. L. Uma experiência sobre o ensino e aprendizagem de funções. *Educação Matemática em Revista*, São Paulo, ano 7, nº 8, p. 46-56, 2000.

CARAÇA, B. J.*Conceitos Fundamentais da Matemática*.Livraria Sá da Costa Editora. Lisboa, Portugal, 1984.

CAVASOTTO, M e VIALI, L. Dificuldades na aprendizagem de Cálculo: o que os erros podem informar. In: *Boletim do GEPEM*, Rio de Janeiro, nº 59, p. 15-33, 2011.

DUVAL, R.*Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. In: MACHADO, Silvia D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas: Papirus, p. 11-33, 2003.

EVEN, R. Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, 21, p. 521-544, 1990.

IRIAS, D. F. *et al*. Cálculo Diferencial e Integral: analisando as dificuldades dos alunos de um curso de licenciatura em matemática. *Revista de Educação Matemática da UFOP*, Vol I. (2011). Disponível em:

<http://www.cead.ufop.br/jornal/index.php/redumat/article/view/343>.Acesso em: 10 de março de 2013.

NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: Frota, M.C.R. e Nasser, L (org.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates,* SBEM, p. 43-58. 2009.

NASSER, Lilian., SOUSA, Geneci. & TORRACA, Marcelo. Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em cálculo? In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, V, 2012, Petrópolis, *Atas*.... Rio de Janeiro, SBEMRJ, 2012,disponível em CD.

OLIVEIRA, M. C. A. e RAAD, M. R. A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo. In: *Boletim do GEPEM*, Nº 61, p. 125-137. Rio de Janeiro, 2012.

REZENDE, Wanderley Moura. *O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. 2003. 468f. São Paulo. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, SP, 2003.

ROBERT, A. e SCHWARZENBERGER, R..*Research in teaching and learning Mathematics at an advanced level*. In: David Tall (Ed.): Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1981.

SOARES, F.; SARUBBI, P.A. Investigando Dificuldades de Alunos de Cálculo em Problemas de Taxas Relacionadas. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, XXXVII, 2009, Recife, *Anais*..., Pernambuco, ABENGE, 2009, disponível em: http://www.abenge.org.br/cobenges-anteriores/2009/artigos-2009/artigos-publicados_11. Acesso em: 10 de março de 2013.

TALL, D. (Ed.) Advanced Mathematical Thinking, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1991.

TORRACA, Marcelo André Abrantes. *Um estudo sobre álgebra em sistemas computacionais formativos,* 2003, 250 f. Rio de Janeiro. Dissertação (Mestrado em Informática), Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, RJ, 2005.

WEIR, M.; HASS, J.; GIORDANO, F. Cálculo de George B. Thomas Jr. v.1. São Paulo, Ed. Pearson, 2009.