FELIX KLEIN E O PROGRAMA DE ERLANGEN: HISTÓRICO E IMPLICAÇÕES PEDAGÓGICAS

Flávia Trópia
Universidade Federal do Rio de Janeiro – Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática/Cefet-RJ
tropiaflavia@gmail.com

Karen Coutinho Campos Furtado
Universidade Federal do Rio de Janeiro – Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática/Colégio Pedro II
karenccfurtado@hotmail.com

Maria Helena Monteiro Mendes Baccar
Universidade Federal do Rio de Janeiro – Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática/Colégio Pedro II
mhbaccar@gmail.com

Resumo: O presente trabalho apresenta os estudos teóricos realizados no primeiro semestre de 2020 sobre o surgimento e evolução das geometrias como também a discussão e reflexão sobre seu ensino na educação básica e na formação de professores que ensinam matemática. Nossos estudos se apoiaram em Felix Klein, Daniel Perrin e Jean-Pierre Kahane. Para levantar historicamente o surgimento e evolução das geometrias nos baseamos no Programa de Erlangen, de Felix Klein, e nas notas de um curso ministrado pelo professor Daniel Perrin, em Paris, Geometria Projetiva Plana: aplicações às geometrias euclidianas e não euclidianas. Para discutir sobre o ensino das geometrias tanto na educação básica quanto no curso de licenciatura em matemática, nos amparamos no relatório francês da Comissão de Reflexão sobre o Ensino das Matemáticas, coordenado por Jean-Pierre Kahane, que objetivava aconselhar o governo francês sobre questões do Ensino de Matemática. Nosso estudo encontra-se subdividido em três partes, sendo este referente à parte que se debruçou na leitura do Programa de Erlangen, de Felix Klein. Entendemos que as ideias não vêm sozinhas, pois existe um contexto para o qual tal Programa foi criado, reverberando no desenvolvimento das geometrias. Dessa maneira, fizemos um levantamento histórico da vida de Klein. Discorreremos sobre a proposta desse matemático e, ao final, apresentaremos sua preocupação pedagógica em relação ao ensino de matemática e indicaremos nossos outros dois trabalhos, que complementam este. O ensino de Geometria será nosso foco.

Palavras-chave: Programa de Erlangen; Ensino de Geometria; Dupla descontinuidade; Formação de Professores.

1. Introdução

Na casa da matemática há muitas moradas e, dessas, a mais elegante é a geometria projetiva.
Morris Kline

O presente trabalho apresenta os estudos teóricos realizados ao longo do primeiro semestre de 2020 ao participarmos da disciplina “Geometrias Euclidianas e Não Euclidianas” ministrada pelo professor Gerard Grimberg no Programa de Pós-graduação *Stricto Sensu* em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Na disciplina, discorremos sobre o histórico do surgimento e evolução das geometrias como também discutimos e refletimos sobre seu ensino na educação básica e na formação de professores que ensinam matemática. Nossos estudos se apoiaram em Felix Klein, Daniel Perrin e Jean-Pierre Kahane. Para levantar historicamente o surgimento e evolução das geometrias nos baseamos no Programa de Erlangen (KLEIN, 1891) e nas notas de um curso ministrado pelo professor Daniel Perrin, em Paris. Perrin (2012) apresenta um curso de Geometria Projetiva Plana, aplicações às geometrias euclidianas e não euclidianas, ministrado para professores e futuros professores de matemática. Para discutir sobre o ensino das geometrias tanto na educação básica quanto no curso de licenciatura em matemática, nos amparamos no relatório francês da Comissão de Reflexão sobre o Ensino das Matemáticas (KAHANE, 2000), coordenado por Jean-Pierre Kahane. Tal relatório objetivava aconselhar o governo francês sobre questões do Ensino de Matemática.

Nosso estudo encontra-se subdividido em três partes, sendo este, apresentado a seguir, a parte que se refere à leitura do Programa de Erlangen, de Felix Klein. A proposta desse matemático era trabalhar com as matemáticas de maneira diferente. Trouxe uma nova discussão tanto para o campo específico quanto para o ensino. Após uma primeira leitura fizemos um levantamento histórico da vida desse matemático buscando entender sua trajetória até a constituição do que ficou conhecido como Programa de Erlangen. Discorreremos sobre tal Programa e finalmente apresentaremos sua contribuição pedagógica para o ensino de matemática e nossas respectivas ponderações sobre o tema. Nossa atenção está voltada para a Geometria.

2. Felix Klein

Felix Christian Klein nasceu em 25 de abril de 1849, na cidade Düsseldorf, antiga Prússia, atual Alemanha. Filho de Caspar Klein, secretário pessoal do Presidente do Governo, e de Elise Sophie Kayser, é proveniente de uma família de industriais de Aachen. Sua mãe influenciou seus primeiros estudos que se deram inicialmente em casa, frequentando depois uma escola elementar particular durante dois anos e meio. Posteriormente, Klein estudou na Escola de Humanidades em Düsseldorf até concluir o que hoje denominamos Ensino Médio. Tal Instituto não priorizava o ensino de Matemática nem de Ciências Naturais. Naquela época, Klein não adquiriu conhecimentos nas respectivas disciplinas (SOUZA, 2010).

Em 1865, aos dezesseis anos, Klein ingressou na Universidade de Bonn com intuito de estudar Matemática, Física e Ciências Naturais. Devido ao seu destaque intelectual, tornou-se auxiliar do matemático e físico alemão Julius Plücker, que apresentou a Klein seus trabalhos sobre geometria. Num certo sentido, Klein tornou-se sucessor de Plücker no entusiasmo pela área (SOUZA, 2010).

Klein obteve seu doutoramento[1] em 1868 supervisionado por Plücker e Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, matemático alemão. Ao concluir sua tese e com a morte repentina de Plücker, Klein resolveu dar continuidade aos estudos desenvolvidos pelo seu mestre e passou um ano viajando entre Göttingen, Berlim e Paris, continuando assim sua formação. Nessas viagens conheceu o matemático norueguês Marius Sophus Lie. Trabalharam juntos em assuntos relacionados às transformações infinitesimais e suas relações com a teoria dos invariantes. Possuíam ideias próximas sobre geometria e análise (SOUZA, 2010).

Em 1869, aos vinte anos, Klein se familiarizou com o trabalho do matemático britânico Arthur Cayley sobre invariantes algébricos. No primeiro semestre de 1870, Felix Klein e Sophus Lie se encontram em Paris e conheceram os matemáticos franceses Jean-Gaston Darboux, Michel Chasles e Marie Ennemond Camille Jordan (ROWE, 1989 *apud* DIAS, GRIMBERG, 2019). Segundo Yaglom (1988), a partir desses encontros e do acesso à teoria de grupos de Évariste Galois, matemático francês,

1 Tese de doutorado sob o título *Über Die Transformation Der Allgemeinen Gleichung Des Zweiten Grades Zwischen Linien-Koordinaten Auf Eine Kanonische Form* (Sobre a transformação em uma forma canônica da equação geral de segundo grau em linhas-coordenadas).

Klein e Lie decidiram se dedicar integralmente a formalizar uma teoria para o estudo dos grupos contínuos. Em julho de 1870, a guerra Franco-Prussiana interrompe a permanência de Klein na França, forçando-o a retornar à Alemanha.

Nessa época Klein já conhecia bem os polinômios homogêneos e a geometria projetiva. Hawkins (1989, *apud* DIAS, GRIMBERG, 2019, p.218) afirma que o conceito de grupo foi fundamental nos trabalhos de Klein no início de 1871. Neste ano, Klein se tornou professor na Universidade de Göttingen. Em agosto de 1871, expôs suas considerações acerca da classificação das geometrias não-euclidianas num artigo[2] publicado no Mathematische Annalen de Göttingen. Para Dias e Grimberg (2019), Klein trata, neste artigo, de grupo das transformações seguindo uma abordagem muito próxima a de Camille Jordan.

A partir dos estudos do matemático e engenheiro francês Jean-Victor Poncelet, as pesquisas das invariâncias projetivas ganharam eixo de desenvolvimento, assim como os estudos do matemático alemão Karl Georg Christian von Staudt, que publicou uma formulação mais radical na qual se dispensa qualquer resultado métrico. Esses avanços culminaram nos esforços de Cayley e, especialmente, Klein em suas intenções de se compreender unificadamente todas as geometrias (DETONI, VIEIRA, FIGUEIREDO, 2015).

Em 1872, aos vinte e três anos, Klein foi nomeado professor titular da Faculdade de Filosofia e membro do Conselho da Universidade de Erlangen permanecendo até 1875. Como era costume em toda universidade alemã, Klein, como docente novato, teve que proferir um discurso inaugural, no qual apresentou uma palestra e um trabalho escrito mostrando seu interesse pela pesquisa no campo, a matemática. Ele expôs à universidade um programa uma nova estruturação para a Geometria fundamentada nas teorias de Lie para os grupos contínuos de transformações (SILVA, PIETROPAOLO, 2014). Esse programa, originalmente intitulado *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Considerações Comparativas referentes a Recentes Investigações Geométricas), passou a ser denominado pela comunidade acadêmica como Programa de Erlangen.

Para Klein (1891), a Geometria era uma só em essência, mas foi muito dividida no curso do seu rápido desenvolvimento, em uma série de teorias quase distintas, que na época estavam avançando em independência comparativa umas das outras. Klein

---

2 *Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie* (Sobre as chamadas geometrias não euclidianas).

acreditava que uma visão global da Geometria poderia beneficiar o olhar dos matemáticos. Para ele, o método projetivo abraçava toda a geometria, pois as teorias geométricas podiam ser unificadas através do conceito de grupo de simetrias. Cada geometria estudava seu espaço geométrico munido de um grupo de simetrias, considerando as propriedades do espaço que são invariantes em relação àquelas simetrias.

Antes de passarmos para a próxima seção, na qual discorreremos sobre o Programa de Erlangen, gostaríamos de ressaltar que a trajetória do matemático Felix Klein culminando no Programa de Erlangen mostra que as ideias não vêm sozinhas, mas nascem de conversas que ele e Lie mantiveram com outros matemáticos/teorias matemáticas, dentre eles Galois, Cayley, Camille Jordan, Poncelet. Entendemos que existe um contexto para o qual o Programa de Erlangen foi criado, construído a partir de diversas reflexões de Klein com seus pares.

3. O Programa de Erlangen

Felix Klein, como docente novato da Universidade de Erlangen em 1872, proferiu um discurso inaugural, no qual apresentou à comunidade acadêmica um programa expondo uma nova estruturação para a Geometria fundamentada nas teorias de Lie para grupos contínuos de transformações. Klein considerava a Geometria como o campo da Matemática que estuda as propriedades das figuras que permanecem invariantes diante da aplicação de um determinado conjunto de transformações.

A principal discussão proposta por ele no seu discurso está relacionada à aplicação das Transformações Geométricas em pontos do espaço, objetivando facilitar o estudo das propriedades de diversos entes geométricos. Nesse contexto, Klein definiu determinados conjuntos de transformações que verificam a propriedade de composição como grupos (SILVA, PIETROPAOLO, 2014).

O discurso inaugural de Klein na Universidade de Erlangen passou a ser denominado pela comunidade acadêmica como Programa de Erlangen. Neste é apresentado a geometria projetiva, utilizando o conceito proposto por Cayley, incluindo discussões de várias linhas de pesquisa em geometria que são apresentadas em uma introdução e dez itens que vão discorrer sobre essas linhas: raios recíprocos, geometria da inversão e da esfera de Lie, grupos de transformações racinonais, *analysis situs*, grupo de todas as transformações do ponto, variedade de curvatura constante, variedades do plano.

Na introdução, Klein (1891) exalta a geometria projetiva afirmando que o método projetivo abraça toda geometria. As relações ditas métricas não são acessíveis por não serem projetivas. Dessa maneira, a geometria projetiva é uma extensão da geometria euclidiana numa perspectiva. Esta se fez independente e plena, a ponto de tornar todas as outras geometrias até então, euclidianas e não-euclidianas, possíveis derivações dela. Acredita que as geometrias possuem uma só essência.

No primeiro item, Klein (1891) versa sobre o problema geral: grupos de transformações do espaço e grupo principal. Ele aponta a importância de se ter uma noção sobre grupo de transformações, como, por exemplo, transformações homográficas e transformações dualísticas. O grupo principal de transformações não alteram um grupo de propriedades de entes geométricos que permanecem invariantes, independentemente do conjunto de transformações aplicado sobre ele. As transformações lineares se mostram importantes para essa abordagem.

No item seguinte, Klein (1891) trata sobre as transformações que contém umas às outras, discorre sobre diferentes tipos de pesquisas geométricas e suas relações mútuas. Desenvolve as propriedades invariantes não só do espaço, mas de um sistema que forma em relação ao grupo principal escolhido. Klein propõe um teorema que caracteriza os métodos geométricos modernos discutindo e apresentando relações com o método elementar.

No terceiro item, Klein (1891) aborda sobre a geometria projetiva, que, segundo o autor, só surgiu quando nos acostumamos a identificar a figura primitiva e todas as que podemos deduzir por projeção. Klein enuncia as propriedades projetivas de maneira a colocar em evidência sua independência através das modificações trazidas pela projeção. Na geometria projetiva, as propriedades de uma figura dão às propriedades daquelas que são deduzidas por projeção. Essa geometria caminha por duas direções: 1) admite um grupo fundamental de transformações (via dualidade); 2) estende o grupo fundamental de transformações homográficas e dualísticas (admitem elementos imaginários). O grupo fundamental compreende as transformações reais projetivas e por dualidade. Klein discorre também sobre o círculo imaginário ao infinito.

A geometria projetiva surge com a ideia de que as figuras projetadas são essencialmente idênticas à figura original, pois as propriedades desta são transferidas às figuras acompanhadas da projeção. Nessa geometria não é válido o postulado das paralelas de Euclides[3], pois as retas sempre se encontrarão em um ponto. O sistema de retas paralelas na geometria projetiva é chamado de *feixe de retas com centro no ponto no infinito.*

No item subsequente, Klein (1891) estabelece a correlação por meio de uma transformação de multiplicidade fundamental. Aponta a relação com a álgebra retomando a álgebra moderna: teoria das formas binárias e transformação de um grupo baseado em outro. A partir daí indica alguns exemplos de equivalência: a teoria das formas binárias e a geometria projetiva do plano com uma cônica como fundamental; a geometria elementar do plano e o estudo projetivo de uma quádrica com um ponto fundamental; transformações no espaço, plano cônico, quadriculado: estudos idênticos ao da geometria projetiva. Percebemos aqui o método projetivo abraçando as geometrias, conforme Klein defendeu na introdução de seu discurso.

No quinto item, Klein (1891) enuncia sobre a escolha de um elemento no espaço, o princípio da correlação de Hesse e a geometria da reta. Ressalta que o essencial num estudo geométrico é dar o grupo de transformações. Klein aponta que a geometria projetiva da reta equivale à geometria projetiva da cônica. As transformações lineares na cônica tornam-se transformações lineares do plano. Estabelece novas equivalências: a teoria das formas binárias e a geometria projetiva do plano com uma cônica fundamental; a teoria das formas binárias e a geometria métrica projetiva geral no plano; a teoria das formas quaternárias e a determinação métrica projetiva em uma multiplicidade representável por seis variáveis homogêneas. Apresenta sobre o estudo da multiplicidade e a noção de corpo.

No próximo item, Klein (1891) apresenta a geometria dos raios recíprocos e a geometria da inversão cujo grupo fundamental seria a totalidade das transformações resultantes de uma combinação do grupo principal com inversão geométrica. Compara a geometria dos raios recíprocos e geometria projetiva e levanta outras equivalências: geometria dos raios recíprocos no plano e a geometria projetiva sobre uma superfície quadrática; geometria dos raios recíprocos no espaço e o tratamento projetivo de uma

3 No livro Os Elementos, Euclides enuncia o 5° postulado sobre as retas paralelas: "Se uma linha reta, encontrando-se com outras duas retas, fizer os ângulos internos da mesma parte menores que dois rectos, estas duas retas, produzidas ao infinito concorrerão para a mesma parte dos ditos ângulos internos."

variedade representada por uma equação quadrática com cinco variáveis homogêneas. A teoria das formas binárias encontra interpretação na geometria dos raios recíprocos no plano real. A teoria das formas binárias de uma variável complexa encontra representação na geometria projetiva da superfície esférica real. Percebemos que as geometrias vão se inter-relacionando, se apoiando na álgebra linear e encontrando representações na geometria projetiva.

No sétimo item, Klein (1891) estende as considerações anteriores e aborda a geometria da esfera de Lie. Estabelece correspondências: geometria plana e geometria em uma secção cônica, fazendo a reta no plano corresponder ao par de pontos em que encontra a cônica; geometria espacial e geometria na esfera, fazendo cada plano do espaço corresponder ao círculo em que corta a esfera. Ao final desse item, Klein apresenta uma nota sobre a geometria não euclidiana.

A geometria métrica projetiva coincide com a geometria métrica que pode ser desenvolvida sob a não aceitação do axioma das paralelas, e é conhecida hoje com o nome de geometria não euclidiana. A investigação relacionada à teoria das paralelas, e os resultados provenientes dela, têm um valor definitivo para a Matemática de dois pontos de vista. Primeiramente, o axioma das paralelas não é uma consequência matemática dos outros axiomas geralmente assumidos, mas a expressão de um princípio essencialmente novo de percepção do espaço, que não foi abordado nas investigações anteriores. Em segundo lugar, essas investigações deram-nos uma importante ideia matemática: a ideia de uma variedade de curvatura constante. Essa ideia é intimamente conectada com a mensuração projetiva que cresceu independentemente de qualquer teoria das paralelas.

As geometrias euclidiana e não euclidianas são casos particulares de uma superfície projetiva, o que torna equivalente a consistência das duas geometrias. Na geometria projetiva não é válido o postulado das paralelas, 5° postulado de Euclides, pois as retas sempre se encontrarão em um ponto. Apresentaremos outros exemplos de estudos que rejeitam tal postulado e contribuíram com o desenvolvimento da época. A geometria hiperbólica surgiu a partir dos estudos independentes do matemático russo Nikolai Lobathevsky (em torno do ano de 1829) e do matemático húngaro János Bolyai (por volta do ano de 1832). Representaram a construção explícita de uma geometria rejeitando o postulado 5 de Euclides. Em 1854, o matemático alemão Bernhard Riemann comentou que o objetivo da geometria era tratar de modelos gerais. Em seus estudos reobteve a geometria euclidiana, a geometria hiperbólica e outra geometria, a elíptica. Em 1868, Eugenio Beltrami, matemático italiano, provou que a existência da geometria hiperbólica não representava uma contradição à existência da geometria euclidiana. O surgimento das geometrias não euclidianas muda o olhar dos pesquisadores. Os estudos da época contribuíram para tal mudança e influenciaram o trabalho de Klein sobre a geometria projetiva.

Voltando ao Projeto de Erlangen, no oitavo item, Klein (1891) enumera outros métodos baseados em um grupo de transformações do ponto. A geometria elementar, geometria dos raios recíprocos e geometria projetiva são incluídas como casos especiais dentre o grande número de métodos concebíveis baseados em grupos de transformações do ponto, se desconsiderarmos as transformações dualísticas ligadas à troca do elemento espaço. Exemplifica três métodos que adotam grupos de transformações pontuais: o das transformações racionais (admite transformações da primeira espécie que se reduzem às transformações lineares); *analysis situs* (estuda a invariância por transformações infinitamente pequenas, relacionadas às transformações homográficas); grupo de todas as transformações do ponto (as transformações são equivalentes à transformação linear).

No item subsequente, Klein (1891) trata sobre o grupo de todas as transformações de contato, que é entendida, analiticamente falando, por qualquer substituição que expressa valores e suas derivadas parciais. É evidente que essas substituições, em geral, convertem superfícies que estão em contato em superfícies em contato, e isso justifica o nome. Introduz ao elemento espaço o elemento superfície.

No último item, Klein (1891) aborda sobre variedades de um número qualquer de dimensões. Método projetivo ou álgebra moderna é o conjunto das transformações lineares e por dualidade das variáveis empregadas para a representação do elemento da variedade. A teoria dos invariantes é a generalização da geometria projetiva.

Ao discutir as características do conjunto das transformações geométricas no espaço, as propriedades desse conjunto são estendidas a todos os grupos distintos de transformações, definidos para quaisquer dimensões. Partindo dessa teorização, o Programa de Erlangen (KLEIN, 1891) propõe o desenvolvimento da geometria por meio do estudo da invariância geométrica das figuras geradas por um determinado conjunto de transformações. Segundo Klein (1981), a geometria é definida em uma determinada dimensão por um certo grupo de transformações que interagem nessa dimensão. Modificando as estruturas desses grupos, criam-se outros grupos, e dessa maneira outras Geometrias. Os grupos de transformações afins são criados por alterações estruturais do grupo das isometrias, os quais constituem a Geometria Euclidiana. O mesmo ocorre com as transformações projetivas concebidas a partir de alterações do grupo afim. Partindo-se do grupo projetivo de transformações, são criadas as Geometrias não Euclidianas. Eves (2004) ressalta que Klein nos deixou uma famosa definição: "Uma geometria é o estudo das propriedades de um conjunto S que permanecem invariantes quando se submetem os elementos de S às transformações de algum grupo de transformações T" (EVES, 2004, p.606).

A conclusão de que as geometrias euclidianas e a não-euclidianas podiam ser vistas como casos particulares de uma superfície projetiva, torna equivalente a consistência das duas geometrias. Klein desmistificou as novas geometrias ao afirmar que a geometria euclidiana não era mais do que o estudo do grupo das transformações euclidianas, assim como a geometria hiperbólica não era mais do que o estudo do grupo das transformações hiperbólicas. Este matemático ganhou visibilidade nos debates da comunidade matemática no início do século XX.

A apresentação de Klein, dirigida a um extenso auditório universitário em Erlangen, significou um verdadeiro divisor de águas que coroa a longa e brilhante evolução da geometria projetiva. No próximo item discorreremos sobre os desdobramentos das ideias apresentadas em Erlangen por Klein em 1871 e nos ateremos à dimensão pedagógica.

4. O Olhar Pedagógico de Felix Klein e Alguns Apontamentos

O matemático alemão Felix Klein dedicou seus trabalhos à geometria não euclidiana, teoria das funções – a partir do desenvolvimento das ideias de Bernhard Riemann –, módulos elípticos e funções automórficas. Embora tenha trabalhado em vários outros assuntos, sua principal contribuição foi para as geometrias. Entretanto, "além de ser um pesquisador criativo na matemática, interessava-se por questões do ensino" (SILVA, RIOS, 2019, p.60). Klein possuía uma visão pedagógica, indicaremos mais a frente.

Felix Klein acreditava que uma visão global da geometria poderia beneficiar o olhar dos matemáticos. O Programa de Erlangen serviu de inspiração para unificar a geometria sob o ponto de vista dos grupos. Assim, o método projetivo abraçou todas as geometrias, pois as teorias podiam ser unificadas através do conceito de grupo de simetrias. Cada geometria estudava seu espaço geométrico munido de um grupo de simetrias, considerando as propriedades do espaço que são invariantes. As consequências e os prolongamentos de suas ideias motivaram, e continuam motivando, pesquisas tanto em Matemática quanto em Física desde então.

No ano de 1908, em Göttingen[4], Klein criou a Comissão Internacional de Instrução Matemática. Trabalhou de 1908 até os anos 1920, em uma pesquisa cujo objeto era a evolução da Educação Matemática em diversos países. Segundo Miorim (1998), esse foi o "Primeiro Movimento Internacional para Modernização do Ensino da Matemática" espalhado por todos os países. Contudo, suas ideias não foram adotadas de imediato. "Em todos os países continuou a existir, ainda por muito tempo a antiga separação entre a formação clássica e uma técnica" (MIORIM, 1998, p.71).

Também em 1908, Klein publicou a primeira edição da coleção *Elementarmathematik von höheren Standpunkte aus* (Matemática Elementar de um ponto de vista avançado), fruto da participação desse matemático em encontros, congressos e aulas dirigidas a professores (SOUZA, 2010). Essa coleção, destinada aos docentes, procura conectar a matemática vista na universidade à matemática trabalhada na escola. Está dividida em três volumes. Devido ao nosso enfoque, limitamo-nos ao Volume II: Geometria.

No prefácio do Volume II: Geometria, Klein (2009) enfatiza que procurou dar uma visão completa do campo da geometria, de tal amplitude quanto ele desejaria que cada professor do ensino secundário tivesse. Este volume está dividido em três blocos. No primeiro, o foco está sobre os objetos da geometria, dos mais elementares (pontos, segmentos, polígonos) aos mais rebuscados da geometria projetiva. No bloco seguinte, aborda as transformações geométricas que induzem diferentes geometrias nos objetos definidos na primeira seção. Aqui, a organização é aquela defendida pelo autor desde seu discurso inaugural em Erlangen: estudo dos grupos de transformações e das propriedades invariantes por estes grupos. A teoria dos invariantes é, então, apresentada sistematicamente no início do último bloco. Os fundamentos da geometria são abordados sob o enfoque dos temas anteriores.

---

4 A partir de 1886 Felix Klein se estabeleceu definitivamente em Göttingen.

De um lado percebemos o envolvimento sério de Felix Klein com pesquisa matemática e de outro, seu profundo interesse por questões pedagógicas. Ele ressaltava que uma educação completa não poderia negligenciar estudos particulares, nem deixar de integrar a matemática elementar (escolar) à universitária.

> (…) Klein denunciava (…) uma alienação entre a formação universitária de professores de matemática e a prática de sala de aula da escola básica. O autor identifica essa ruptura como uma dupla descontinuidade: por um lado, quando os estudantes ingressam nos cursos universitários de formação de professores, poucas relações são estabelecidas entre a matemática com que passam a ter contato e aquela anteriormente aprendida por eles como alunos da escola básica; e por outro lado, quando concluem esses cursos e iniciam a vida profissional, poucas relações são estabelecidas entre a matemática aprendida durante a graduação e aquela que passa a ser demandada pela prática de sala de aula da escola básica. (GIRALDO, 2018, p.37)

Entendemos que os objetivos de Klein eram alertar, ampliar e prover requisitos para desafiar os professores da educação básica a transmitir a riqueza da matemática contemporânea, usando o currículo escolar. Ele forneceu a matriz de ideias educacionais. Sua proposta no Programa de Erlangen em relação às geometrias foi unificá-las. Usando a geometria projetiva, Klein conseguiu efetivar sua proposta. Entretanto, esses conceitos não são apresentados aos futuros docentes. Percebemos pouca conexão entre o que se é visto na universidade com a prática na sala de aula das escolas, a dupla descontinuidade apontada por Klein (2009).

Para tentarmos estabelecer, na geometria, essa possível concatenação proposta por Klein, indicamos nossos outros dois trabalhos que complementam este primeiro estudo fazendo uma discussão com a Educação Básica e a Formação de Professores. Ambos foram apresentados neste evento. Um deles, *Geometrias Euclidianas e Não Euclidianas: aspectos históricos e reflexões sobre seu ensino,* apresenta as notas de um curso de Geometria Projetiva Plana, aplicações às geometrias euclidianas e não-euclidianas, ministrado em um curso de formação de professores por Daniel Perrin (2012). E o outro, *As Contribuições da Comissão de Jean-Pierre Kahane para as Reflexões sobre o Ensino de Geometria na Educação Básica e na Formação de Professores,* traz a discussão sobre caminhos possíveis de se trabalhar essas geometrias, seja na Educação Básica, seja na Licenciatura em Matemática. Nesse estudo, buscamos embasamento teórico no relatório francês da Comissão de Reflexão sobre o Ensino das Matemáticas, coordenado por Jean-Pierre Kahane, conhecido como Relatório Kahane (2000).

Finalmente, após esses três estudos, entendemos que o Projeto de Erlangen de Felix Klein é uma proposta viável para a Educação Básica, assim como a aproximação entre a universidade e a escola.

5. Referências

DETONI, A. R.; VIEIRA, M. D.; FIGUEIREDO, M. C. Apontamentos para uma História da Geometria Projetiva. *Anais*... São João Del Rei: EMEM/SBEM-MG, 2015. Disponível em <https://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/APONTAMENTOS-PARA-UMA-HISTORIA-DA-GEOMETRIA-PROJETIVA.pdf > Acesso em 15 jul. 2020.

DIAS, L. S.; GRIMBERG, G. E. Classificação das geometrias: um diálogo entre os textos de Arthur Cayley e de Felix Klein. *Revista Brasileira de História da Ciência*, Rio de Janeiro, v. 12, n. 2, p.207-224, jul/dez 2019.

EUCLIDES, *Os Elementos*. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FERNANDES, N C. *O programa de Erlangen de Felix Klein (considerações comparativas sobre as pesquisas geométricas modernas)*. Tradução de Normando Celso Fernandes. São Paulo: Istituto de Física da USP, 1984. Disponnível em: <http://publica-sbi.if.usp.br/PDFs/pd499 > Acesso em 15 jul. 2020.

GONÇALVES, T. S. *Uma Introdução à Geometria Projetiva para o Ensino Fundamental*. 2013. 149f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Rio Grande, 2013.

KAHANE, J. P. *Rapport d'Étape sur la Géométrie et son Enseignement*. Comission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques. France, 2000. Disponível em: <https://www.apmep.fr/IMG/pdf/geo-com6.pdf >; Acesso em 24 jul. 2020.

KLEIN, F. *Considérations Comparatives sur les Recherches Géometriques Modernes*. Traduction de M. H. Padé. Annales scientifiques de l'É.N.S, 3e série, p.87-102, 1891.

________. *Matemática Elementar do Ponto de Vista Superior.* Volume II: Geometria. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009.

MIORIM, M. A. *Introdução à História da Educação Matemática.* São Paulo: Atual, 1998.

PERRIN, D. *Géométrie Projective Plane et Applications aux Géométries Euclidienne et non Euclidiennes*. 2012. Disponível em: <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/ >; Acesso em 24 jul. 2020.

SILVA, J. C. D.; PIETROPAOLO, R. C. Um estudo sobre as contribuições de Felix Klein para a Introdução das Transformações Geométricas nos Currículos Prescritos de Matemática no Ensino Fundamental. *Perspectivas da Educação Matemática*, vol.7, n.14. Mato Grosso do Sul: UFMS, 2014.

SILVA, M. C. S., RIOS, D. F. Apropriação de ideias Modernizadoras de Felix Klein em Práticas Docentes de Matemática no Colégio Gonzaga. Revista *Com a Palavra, o*

Professor. v.4, n.8, p.55-73, janeiro-abril/2019. Disponível em: <http://revista.geem.mat.br/index.php/CPP/article/view/300 >. Acesso em 30 set. 2020.

SOUZA, G. M. *Felix Klein e Euclides Roxo:* debates sobre o ensino da matemática no começo do século XX. 2010. 72f. Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2010.

YAGLOM, I. M. *Felix Klein and SophusLie: Evolution of the idea of Symmetry in the nineteen Century*. Tradução de Sergei Sossinsky. Birhäuser Boston, Estados Unidos, 1988.