

## IX Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Rio de Janeiro

**O QUE DIZEM (FUTUROS) PROFESSORES DE MATEMÁTICA  
SOBRE ISOMETRIAS: UMA ANÁLISE PRELIMINAR****Thuane da Silveira Silvano***Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
thuanesilvano@gmail.com***Marcelo Almeida Bairral***Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (PPGEduc e PPGEduCIMAT)  
mbairral@ufrj.br***Resumo:**

Este texto apresenta uma análise preliminar sobre isometrias. A sondagem foi planejada antes da pandemia e preenchida *online* por licenciandos em matemática e mestrandos do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGEduCIMAT), da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). As 19 (dezenove) respostas foram tabuladas. O estudo integra um projeto mais amplo que tem como objetivo analisar como licenciandos em matemática interagem e aprendem conceitos de isometria, de forma colaborativa no ambiente *Virtual Math Team* com GeoGebra (VMTcG). O objetivo específico do estudo é realizar uma análise preliminar sobre o conhecimento de mestrandos e licenciandos sobre isometrias. Resultados preliminares sinalizam a importância da abordagem desse conceito no currículo da Educação Básica e na Licenciatura. O estudo almeja contribuir com inovações e melhorias no aprendizado sobre transformações no plano.

**Palavras-chave:** Isometria; Rotação; Translação; Simetria.

**1. Introdução**

Esse estudo integra uma pesquisa<sup>1</sup> na qual objetivamos analisar como licenciandos em matemática da UFRRJ interagem e aprendem conceitos de isometria de forma colaborativa no ambiente *Virtual Math Team* com GeoGebra (VMTcG).

O objetivo deste texto é apresentar uma análise preliminar sobre os conceitos de isometria a partir de uma sondagem inicial feita por meio de uma folha de exercícios (em anexo) na qual o foco eram as isometrias: translação, rotação e simetria.

Uma forma de analisar a aprendizagem do sujeito é por meio da interação deste com o outro, com a tecnologia e com a matemática. Nesse estudo observamos também as interações realizadas nos Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD). Os AGD são ambientes de ensino e de aprendizagem matemático, geralmente utilizados no formato de *softwares*, sejam eles *online* ou *off-line*. Os AGD possibilitam construir figuras geométricas a partir de diferentes informações obtidas, favorecem a visualização das figuras de diferentes ângulos e a modificação de características euclidianas ou espaciais de forma instantânea, como alguns pesquisadores (ARZARELLO et al., 2002; GRAVINA, 1996; SALAZAR; ALMOULOU, 2015) ressaltam. Atividades realizadas em AGD podem influenciar a exploração, construção de conceitos, validação de conjecturas, entre outros.

Comparando ambientes dinâmicos com o ambiente de sala de aula que se usa papel e lápis para realizar as atividades, os AGD trazem maior dinâmica e outra forma de aproveitamento do tempo de aula, pois é fácil e rápido realizar as construções e, se preciso refazê-las ou corrigi-las. Segundo Barreira e Bairral (2015), os AGD permitem uma melhor visualização, melhora o entendimento do processo de construção e permite criar conjecturas e colocá-las em situação de verificação e de prova. Estes mesmos autores destacam que os AGD devem ser usados juntamente com propósitos docentes eficazes e adequados, para orientar os discentes de forma correta a realizar as atividades propostas. No entanto, não estamos desconsiderando o uso do papel e lápis. Com eles também aprendemos e realizamos outros tipos de registros diferentes dos que fazemos no AGD. Portanto, em sala de aula deve haver um trabalho síncrono entre tecnologias em AGD e o tradicional, papel e lápis.

Como nosso foco está no aprendizado (*online* e síncrono) de isometrias com o GeoGebra, estamos usando como principal referência Assis (2016) que desenvolveu

---

<sup>1</sup> Integrante do projeto de pesquisa “Participar, descobrir e interagir em ambientes virtuais: Potencializando novas formas de aprendizagem matemática” (CNPq 302124/2016-0), financiado pelo CNPq.

atividades em dispositivos *touchscreen*, observando os movimentos e toques realizados na tela, durante a solução das atividades.

Assis também trabalha com rotação, translação e simetria, temáticas que segundo ele, são pouco contempladas no currículo. Nosso estudo usará atividades desse autor, mas adaptadas para o VMTcG, por exemplo, a Atividade 1 (em Anexo).

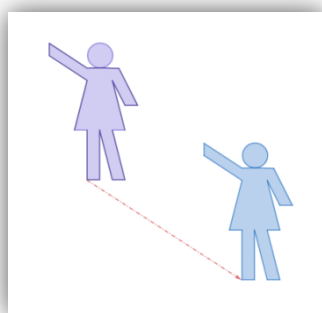
## 2. As Transformações Geométricas: uma síntese

Uma transformação geométrica pode ser interpretada como uma função de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  e sua definição diz que a mesma, é uma correspondência que associa a cada ponto  $P$  do  $\mathbb{R}^2$  um único ponto  $P'$  do  $\mathbb{R}^2$ , tal que valem as seguintes condições:

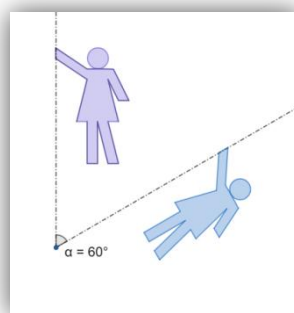
- Se  $P \neq Q$  então  $P' \neq Q'$ .
- Se  $U$  é um ponto qualquer de  $\mathbb{R}^2$ , então existe um ponto  $V$  em  $\mathbb{R}^2$  tal que o correspondente de  $V$  pela transformação geométrica  $T$  é  $U$ .

A definição de Isometria diz que: “Uma transformação geométrica  $T$  é uma isometria, quando, para quaisquer dois pontos  $P$  e  $Q$  a distância de  $P$  à  $Q$  é igual à distância de  $P'$  à  $Q'$ , sendo  $P' = T(P)$  e  $Q' = T(Q)$ .” (VELOSO, 2012).

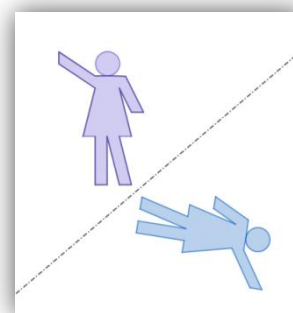
A partir das transformações geométricas no plano é possível ver com mais detalhes as características de cada figura geométrica para, assim facilitar a identificação da Isometria. Podemos ver a diferença das três transformações caracterizadas como Isometrias: a translação, a rotação e a simetria.



Translação



Rotação



Simetria

Para identificá-las num primeiro momento, sem haver a necessidade de prova, podemos observar que na rotação, necessariamente, deve haver um ângulo para ser

concluída; na translação as figuras permanecem idênticas, porém, com uma distância entre elas; na simetria as figuras se tornam opostas, como refletidas em um espelho.

A pesquisa será ambientada no *Virtual Math Team* com GeoGebra (VMTcG), uma plataforma online, com chat e quadro do GeoGebra, para atividades síncronas, em pequenos grupos. A investigação é realizada no âmbito do Grupo de Estudos e Pesquisas das Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática (GEPETICEM).

A atividade de sondagem foi feita em março de 2020, na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, na disciplina “Ensino e Aprendizagem Matemática em Ambientes Virtuais”, para 20 alunos. No entanto, por conta da quarentena, devido ao Corona Vírus, a atividade foi enviada e recebida virtualmente, 14 alunos da graduação responderam e 4 alunos de mestrado. O objetivo da atividade foi analisar o conhecimento dos sujeitos a cerca das transformações geométricas (isometrias)<sup>2</sup> baseado em Veloso (2012).

### **3. Procedimentos metodológicos**

A folha de atividades de sondagem consistiu-se em 7 (sete) questões (Anexo). A primeira questão sendo para a identificação de cada transformação geométrica a partir de imagens. Na segunda questão, havia uma única imagem, com duas transformações, e foi pedido para identificá-las e justificar a resposta. No entanto, da questão 3 (três) em diante, são perguntas a respeito de como cada um teve contato com o assunto Isometria e se/como aplicam esse assunto em sala de aula. As questões 3 e 4 pediam para o aluno sinalizar se já teve esse assunto abordado na Educação Básica e na Graduação em Matemática, respectivamente. A quinta questão teve o objetivo de identificar em quais disciplinas, atividade curricular ou projeto, o aluno aprendeu sobre esse assunto. Nas duas últimas perguntas, se o aluno atuasse como docente, ele deveria responder se lecionava em escola particular e/ou pública e se abordava esse assunto em suas aulas.

### **4. Produção preliminar de dados**

---

<sup>2</sup> No momento de finalização desse texto iniciamos os estudos remotos e as implementações *online* com as atividades adaptadas de Assis (2016), no VMTcG em: <https://vmt.mathematicalthinking.org/> .

Na pesquisa os dados (registros escritos, construções e movimentos no GeoGebra, tabelas e player) são, em sua maioria, gerados diretamente pelo VMTcG. Estamos usando também a folha de sondagem, um documento no Word para registros individuais dos conceitos em estudo e conversas informais com os sujeitos. Nesse artigo estaremos focados na sondagem. Foi elaborada uma tabela para organizar e analisar todas as respostas. Ela foi construída no Excel, e optamos por colori-la para melhor interpretação, sendo as respostas positivas, da cor verde, as respostas negativas ou incorretas, da cor vermelha, as questões que os alunos deixaram em branco foram preenchidas com a cor amarela e um X. Segue uma análise preliminar dos resultados:

A tabela criada inicialmente foi dividida em três quadros, para melhor análise. Nos quadros, dispomos as informações sobre as respostas dos sujeitos, sendo eles, 15 licenciandos em matemática e 4 mestrandos em ensino de matemática, conforme indicações. No primeiro quadro (Quadro 1), separamos as respostas dos sujeitos a cerca dos exercícios 1 e 2.

**Quadro 1:** Tabulação de respostas dos exercícios 1 e 2.

	Exercício 1	Exercício 2
CMH <sup>3</sup> (43 anos)	Correto	Correto
DCAS (26 anos)	Incorreto	X
FMS (22 anos)	Correto	Correto
FBD (23 anos)	Correto	Correto
GBP (23 anos)	Correto	Correto
JSV (22 anos)	Correto	Correto
LB (22 anos)	Correto	Correto
LAR (23 anos)	Correto	Correto
LC	Correto	Correto
LS (23 anos)	Incorreto	Correto
MSS (22 anos)	Correto	Correto
MA (21 anos)	Correto	Correto
NL (21 anos)	Incorreto	Incorreto
PB (21 anos)	Correto	Correto
RE (22 anos)	Correto	Correto

<sup>3</sup> Os sujeitos serão identificados pelas iniciais de seu nome e sobrenomes, com a indicação da idade ao lado.

TSV (26 anos)	Correto	Correto
TA (24 anos)	Correto	Correto
VAS (21 anos)	Correto	Correto
YSP	Correto	Correto

**Fonte:** Elaboração própria.

Pôde se notar algumas respostas corretas, porém as justificativas estavam incompletas ou vagas, como no caso que uma aluna justificando a transformação Reflexão, disse que as figuras permaneciam iguais, quando na verdade elas se tornam opostas, como num espelho; ou como quando alguns alunos justificaram a transformação translação dizendo que as figuras permaneciam iguais, sem adicionar detalhes sobre como ela foi “arrastada” para outra posição. Também ocorreu uma confusão na resposta de uma aluna ao relacionar as transformações geométricas: Rotação e Translação, com os movimentos do planeta Terra, aprendido em ciências, na Educação Básica.

No Quadro 2, trazemos para a análise, em qual período escolar (Educação Básica ou Ensino Superior) os sujeitos tiveram contato com o conteúdo de transformações geométricas, e também em quais disciplinas, projetos.

**Quadro 2:** Tabulação de respostas sobre conhecimento prévio do assunto.

	Estudou esse assunto na Ed.Básica?	Na graduação estuda(ou) esse assunto?	Em qual (is) disciplina (s), projeto, etc. ?
CMH (43 anos)	Sim	Não	X
DCAS (26 anos)	Sim	Sim	Cálculo 1 (aprendeu sobre gráficos). Estudou translação e rotação em ciências, quando aprendeu sobre a Terra.
FMS (22 anos)	Sim	Sim	Geometria Plana, Construções Geométricas e Teoria de Galois.
FBD (23 anos)	Sim	Sim	Teoria dos Grupos.
GBP (23 anos)	Não	Sim	Geometria Euclidiana Plana.
JSV (22 anos)	Não	Sim	Teoria dos Grupos, palestra sobre o ensino para cegos e discussão durante reuniões do Gepeticem.
LB (22 anos)	Sim	Não	X
LAR (23 anos)	Não	Sim	Na disciplina “Matemática em sala de aula 2” e no PIBID.

LC	Não	Sim	Álgebra II.
LS (23 anos)	Sim	Sim	Geometria Espacial e Plana
MSS (22 anos)	Sim	Sim	Teoria dos Grupos.
MA (21 anos)	Não	Sim	Construções Geométricas e Geometria Plana e Espacial.
NL (21 anos)	Não	Não	X
PB (21 anos)	Sim	Sim	Geometria Euclidiana Plana, Desenho Técnico e Construções Geométricas. Programa de Residência Pedagógica, Estágio II nas turmas de Ensino Fundamental II.
RE (22 anos)	Não	Não	X
TSV (26 anos)	Sim	Sim	Geometria Plana e em uma submissão de mini curso envolvendo arte e matemática.
TA (24 anos)	Sim	Sim	Geometria Euclidiana Plana
VAS (21 anos)	Não	Não	X
YSP	X	Sim	X

**Fonte:** Elaboração própria.

Alguns alunos, por mais que já tenham tido contato com o conteúdo anteriormente, tiveram um pouco de dificuldade para responder as questões e confundiram algumas transformações. Enquanto isso, alunos que não estudaram sobre Isometrias na Educação Básica ou na graduação (Bacharelado ou Licenciatura), conseguiram responder corretamente as perguntas.

Houve também uma aluna que não aprendeu sobre Isometrias na Educação Básica nem na Graduação, porém, por atuar como professora particular aprendeu por conta própria o assunto e respondeu corretamente a todas as questões.

**Quadro 3:** Tabulação de respostas sobre quem atua como docente e aborda o assunto em aula.

	Se já atuar como professor, leciona em:	Aborda esse assunto em suas aulas?
CMH (43 anos)	Escola Particular.	Sim
DCAS (26 anos)	X	X
FMS (22 anos)	Escola Particular (curso preparatório).	Não

FBD (23 anos)	X	X
GBP (23 anos)	X	X
JSV (22 anos)	X	X
LB (22 anos)	X	X
LAR (23 anos)	X	X
LC	X	X
LS (23 anos)	X	X
MSS (22 anos)	X	X
MA (21 anos)	X	X
NL (21 anos)	X	X
PB (21 anos)	X	X
RE (22 anos)	Aulas particulares.	Não
TSV (26 anos)	Escola pública e particular.	Não
TA (24 anos)	X	X
VAS (21 anos)	X	X
YSP	X	X

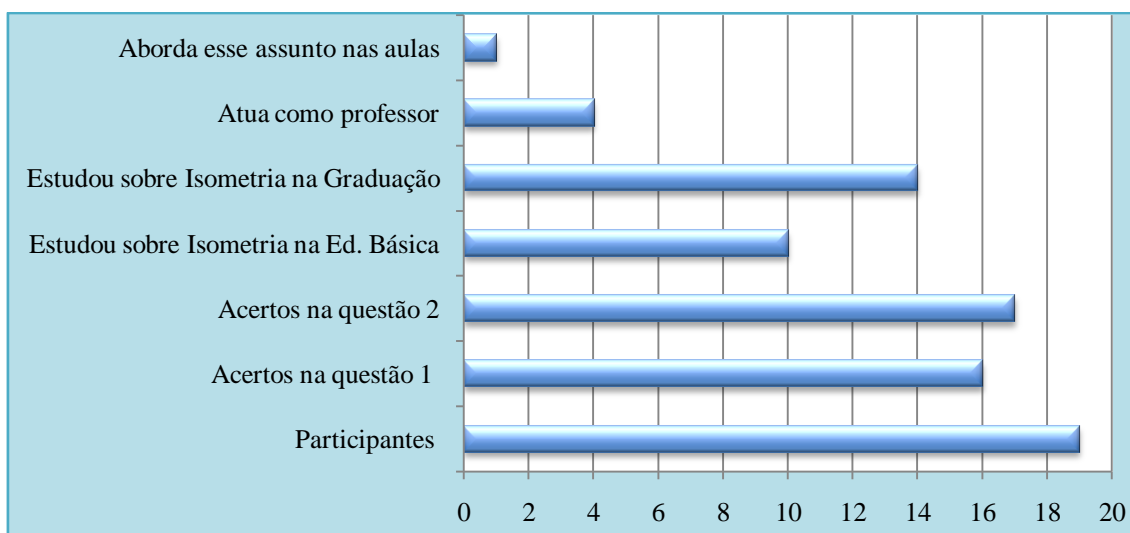
**Fonte:** Elaboração própria.

A partir dos Quadros 1, 2 e 3 foi construído o Gráfico 1. O mesmo foi elaborado no Word, juntamente com o Excel. Optamos por adicionar poucas informações, apenas quantitativas, para melhor análise.

As informações contidas no gráfico são: a quantidade de participantes na análise; a quantidade de acertos nas duas primeiras questões da folha de exercícios; a quantidade de alunos que teve contato com o conteúdo de Transformações Geométricas, caracterizadas como Isometrias, na Educação Básica e na Graduação; quantos alunos atuam como professores; e quantos desses alunos que atuam como docente, lecionam sobre este conteúdo.

**Gráfico 1:** Apresentação das respostas.





Fonte: Elaboração própria.

Podemos verificar, no gráfico 1 que a maioria dos alunos respondeu corretamente as questões propostas, sendo que alguns só tiveram contato com esse conteúdo na Graduação. Outra observação relevante, também observada no Quadro 3, é que apenas 1 (um) dos 4 (quatro) docentes já abordou esse conteúdo em suas aulas, justificando assim o motivo de muitos dos sujeitos não terem esse conhecimento na Educação Básica, sendo eles, professores de tal nível de ensino.

Após o momento de sondagem a respeito das transformações geométricas e isometrias, foi realizada uma atividade de desenvolvimento conceitual com enfoque nas isometrias. A atividade foi enviada para a mesma turma, no entanto, a quantidade de respostas diminuiu, sendo 4 mestrandos e 11 licenciandos. A partir da pergunta “o que é isometria?”, foi feito o Quadro 2 com todas as respostas, separadas em 3 blocos, para nos auxiliar nas análises futuras.

**Quadro 4:** Tabulação de respostas, “o que é isometria?”.

CONCEITO DE ISOMETRIA	
RESPOSTAS RELACIONADAS À MATEMÁTICA:	
CM <sup>4</sup>	São transformações geométricas, isto é, são figuras ou sólidos geométricos que mantêm as distâncias entre pontos. Elas podem mudar de sentido, direção, rotacionar, transladar que não mudam as suas características iniciais

<sup>4</sup> Os sujeitos serão identificados pelas iniciais de seu nome e sobrenomes, como nos Quadros 1, 2 e 3.

FM	Falando em geometria, seriam repetições de figuras, ou de pedaços delas.
FD	Transformações que mantêm as medidas/distâncias. Na Geometria, por exemplo, quando falamos de isometria, estamos nos referindo a mudança na posição entre as figuras de maneira que as propriedades geométricas daquelas figuras sejam mantidas.
JS	Transformação geométrica que conserva propriedades matemáticas das figuras.
LA	Na matemática, a isometria é uma transformação geométrica em que a figura original e a transformada são congruentes.
LS	Medidas iguais, geometria.
PB	Processo que possibilita o deslocamento de uma figura ou ampliação e redução de figuras (para a obtenção de formas semelhantes).
TS	Na geometria são transformações que não altera os ângulos e a distância entre os pontos da figura, mas pode mudar a posição da figura. Por exemplo, através da translação.
TA	São transformações de imagens.
<b>RESPOSTAS QUE EXPRESSAM DÚVIDAS:</b>	
GB	Não sei dizer do que se trata, mas sei que o nome é familiar.
LC	Acho que é um tipo de transformação geométrica
MS	Recordo-me de ter estudado sobre Isometrias na disciplina de Teoria dos Grupos, e lembro de ter alguns conceitos como reflexão, simetria e translação relacionados a esse termo. Acredito que esteja ligado diretamente a questões de posição de um objeto, paralelo a sua geometria no plano.
NL	Confesso que esse tópico foi o mais complicado de responder para mim, precisei pesquisar para formular uma resposta. Os resultados me levaram para um lado da isometria geométrico, ou seja, são imagens semelhantes em sequência com a mesma distância entre os pontos.
YS	Assim por nome, não me recordo.
<b>RESPOSTAS COM IDEIAS FORA DA MATEMÁTICA:</b>	
MA	Isometria é a característica de contração muscular, se exercitar de forma parada.

**Fonte:** Elaboração própria.

Uma isometria é uma transformação no plano que preserva as medidas (dos lados e dos ângulos) e só muda a posição das figuras. Respostas do Quadro 4 ilustram a riqueza do conceito de isometria. Elas, juntamente com o Quadro 2, também sinalizam que essa temática pode ser mais abordada nas aulas. Respostas do contexto matemático

também sinalizam (FM, JS, LS, TA) a necessidade de maior aprofundamento, sobretudo, por ter sido um conteúdo estudado pelos sujeitos, conforme ilustrado no Gráfico 1.

Respostas duvidosas (LC, MS e NL) e a idéia fora do contexto matemático também constituem campos férteis para aprofundamento e enriquecimento interdisciplinar.

#### **4. Considerações Finais**

As transformações geométricas no plano, em particular as isometrias, aparentemente, são pouco abordadas, principalmente, na Educação Básica. Talvez porque seja um conteúdo difícil de ser visualizado pelos alunos ou de ser trabalhado pelos professores? Pois bem, temos diversos recursos tecnológicos e/ou *online* para auxiliar o aluno na visualização, construção e prova desses conceitos (Barreira e Bairral, 2015)

Acreditamos que seja uma forma eficaz de ensino e aprendizagem matemático, utilizar AGD e softwares matemáticos no dia a dia da sala de aula. Dessa forma, melhorando o entendimento do aluno, estimulando sua criatividade e interpretação da figura geométrica (que como dito anteriormente, podemos observá-las de diversos ângulos), e também, inovando o ambiente escolar, tornando mais atrativo o conteúdo, para uma geração cercada de tecnologia (Delmondi e Pazuch, 2018).

Os próximos passos da pesquisa, serão aplicar algumas atividades adaptadas de ASSIS (2016) no VMTcG, observando o processo de construção, a criação de conjecturas, a validação das hipóteses criadas durante a atividade, entre outros conceitos. E observar como os licenciandos e mestrandos em matemática, interagem com a plataforma (VMTcG), com a atividade e com eles mesmos.

#### **5. Referências**

ASSIS, A. Alunos do Ensino Médio Trabalhando no GeoGebra e no Construtor Geométrico: Mãos e rotAções em touchscreen. *Dissertação (Mestrado em Educação). Instituto de Educação / Instituto Multidisciplinar, PPGEduc, UFRRJ (Nova Iguaçu), 2015.*

CASADO BARRIO, María Jesús. Geometría Dinámica Con Papel. San Juan: *Proyecto Sur de Ediciones*, 1999.

DELMONDI, N. N., & PAZUCH, V. Um panorama teórico das tendências de pesquisa sobre o ensino de transformações geométricas. *RBEP*, 99(253), 659-686. doi:10.24109/2176-6681.rbep.99i253.38616, 2018.

GRAVINA, M. A. Geometria Dinâmica: Uma nova abordagem para a aprendizagem da Geometria. *Paper presented at the VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, Belo Horizonte. 1996.

MEIER, M., & GRAVINA, M. A. Modelagem no GeoGebra e o desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental. *Paper presented at the 1a. Conferência Latino Americana de GeoGebra*, PUCSP. 2012.

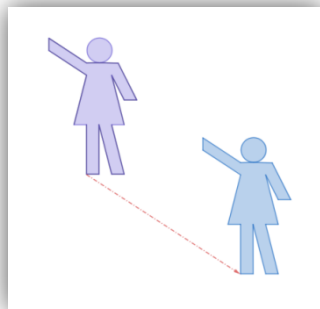
VELOSO, E. Simetria e Transformações geométricas. Lisboa: *Associação de Professores de Matemática*, 2012.

## 6. Anexos

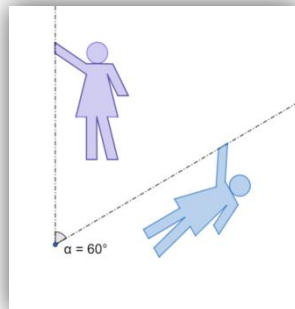
### Folha de Atividades sobre Isometrias

Nome (opcional): \_\_\_\_\_ . Idade: \_\_\_\_\_ .

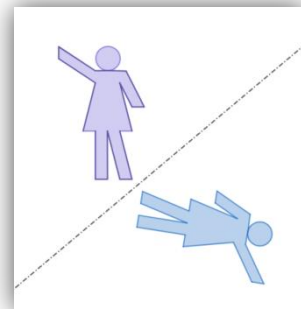
1. Identifique em cada figura o tipo de transformação (simetria, rotação ou translação) realizada em cada caso:



1



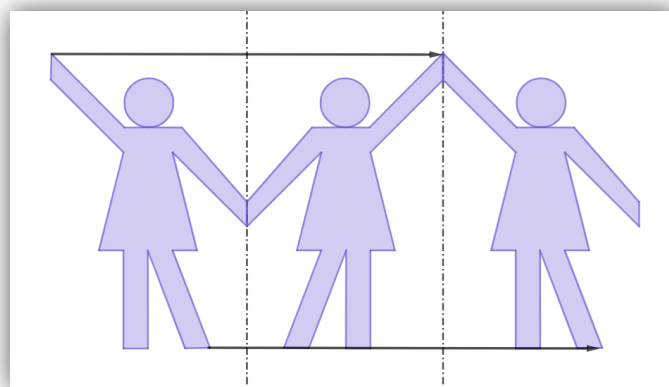
2



3

- Na figura 1 a transformação é uma \_\_\_\_\_.
- Na figura 2 a transformação é uma \_\_\_\_\_.
- Na figura 3 a transformação é uma \_\_\_\_\_.

2. Agora identifique:



1

2

3

- A figura 2 é uma \_\_\_\_\_ (simetria, rotação ou translação) da figura 1 porque \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_.
- A figura 3 é uma \_\_\_\_\_ (simetria, rotação ou translação) da figura 1 porque \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_.

3. Você estudou simetria, rotação e translação na Educação Básica?

( ) Sim      ( ) Não

4. Na Graduação (Bacharelado ou Licenciatura) em Matemática, você estuda(ou) esses assuntos?  
( ) Sim            ( ) Não

5. Se marcou SIM, em qual(is) disciplina(s), atividade curricular, projeto etc.?

---

---

---



6. Se você for docente ou já atuar como professor, diga se leciona em:

- ( ) Escola Pública  
( ) Escola Particular  
( ) Ambas

7. Você aborda esse assunto em suas aulas:

- ( ) Sim            ( ) Não

**ATIVIDADE 1** (Adaptada de ASSIS,2016)

- Construam um quadrilátero qualquer.
- Seleccionem a ferramenta .
- Toquem no quadrilátero construído e, em seguida, em dois pontos distintos na área de trabalho.
  - a) Observem o que ocorreu e comentem.
  - b) Movimentem livremente a figura original, seleccionando toda figura ou um de seus vértices. Registrem suas observações.
  - c) O quê vocês observam quando movimentam uma das extremidades da seta (vetor)?
- Construam uma circunferência, seleccionem a ferramenta , depois seleccionem o quadrilátero, o centro da circunferência e um ponto sobre a circunferência.
  - d) Movimentem o ponto sobre a circunferência e observem o que ocorre. Elaborem hipóteses (conjecturas) e justifiquem a validade delas.