O ENSINO DE ELIPSE A UMA TURMA DE GEOMETRIA ANALÍTICA DO MESTRADO DO PROFMAT

Ana Carolina Vila do Amaral[1]

Resumo: Este relato trata sobre a experiência vivida por uma estudante do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), na Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), em Joinville, ao elaborar uma aula e aplicá-la em sua turma de Geometria Analítica. O objetivo de fazer com que estudantes lecionem durante a sua formação é que eles tenham experiência neste quesito, para que se sintam, e de fato estejam, mais preparados quando forem lecionar na escola. O tema da aula, sorteado pela professora, foi elipse, em concordância com o planejamento dela e baseado na sequência de conteúdos do livro texto. A metodologia definida para a sua aplicação baseou-se em apresentação de definições, seguidas de exercícios para fixação. A aula teve duração de 3 horas, dentre explicações, tempo para resolução de exercícios e uma discussão entre os participantes. Além disso, após a aula foi liberada uma tarefa para ser realizada e, a partir das resoluções enviadas, foi possível perceber que os estudantes compreenderam os conceitos desenvolvidos em aula e conseguiram aplicá-los de forma eficiente.

Palavras-chave: Educação matemática. Elipse. Geometria Analítica. PROFMAT.

1. INTRODUÇÃO

De acordo com seus criadores, o PROFMAT, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, "visa atender prioritariamente professores de Matemática em exercício na Educação Básica, especialmente de escolas públicas, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência" (*site* do PROFMAT[2]).

Portanto, como a sua estrutura curricular tem o objetivo de incrementar a base teórica do professor atuante no Ensino Básico, é de suma importância que, além de aprender novos conceitos, o professor também tenha a oportunidade de lecionar o que vem aprendendo, de forma que suas experiências práticas cresçam tanto quanto seus conhecimentos teóricos.

É pensando nesta relação entre teoria e prática que a disciplina de Geometria Analítica, regida por uma professora do Departamento de Matemática da UDESC, delegou aos seus alunos a tarefa de elaborar e ministrar uma aula sobre um tema específico a ser sorteado. Para isso, no primeiro dia de aula foram sorteadas duplas e, a cada dupla, sorteou-se um dos seguintes temas: Elipse, Hipérbole e Parábola. Vale ressaltar que os temas sorteados seguiram a sequência adotada pela professora regente, que seguiu o que foi definido pelo livro texto de Geometria Analítica do PROFMAT (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013). Por motivo

---

[1] Licenciada em Matemática pela Universidade do Estado de Santa Catarina; e-mail: anacva96@gmail.com.
[2] Disponível em: https://www.profmat-sbm.org.br/organizacao/apresentacao/

de desistência da minha dupla, encarei sozinha este desafio e ministrei, pela primeira vez, uma aula a uma turma de mestrado.

A primeira etapa para elaboração da aula foi realizar um estudo detalhado do Capítulo 5 de Delgado, Frensel e Crissaff (2013), livro texto utilizado nas aulas de Geometria Analítica. Este estudo abrangeu, além da leitura integral do capítulo, o desenvolvimento das demonstrações e de alguns exercícios considerados interessantes para serem sugeridos aos alunos, visto que abrangiam o conteúdo de forma prática.

Em seguida, a segunda etapa foi a elaboração dos *slides* que comporiam a aula. É importante citar que, como estávamos em situação de pandemia por conta do Corona Vírus, a aula deveria ser pensada para ser de forma *online* e, dessa forma, considerei o uso de *slides* a melhor alternativa.

A terceira etapa consistiu na elaboração da tarefa, que após a aula seria enviada aos alunos. A decisão sobre planejar uma tarefa se deu pois considerei que precisaria de um outro método para medir o entendimento dos alunos sobre o conteúdo exposto. É claro que, durante uma aula, muitas vezes o professor percebe se está se fazendo entender, porém preferi adotar este método para analisar a compreensão dos alunos e trazer mais segurança às afirmações que revelo nesse relato.

Considerando o exposto neste item, esse trabalho tem o objetivo de relatar minhas experiências durante a aula que foi ministrada. No decorrer do relato, descrevo a metodologia utilizada na aula, bem como o relato e a análise da mesma, munidos do referencial teórico utilizado. Por fim, exponho minhas considerações finais acerca das experiências adquiridas.

2. METODOLOGIA

Esta aula foi aplicada em uma turma de Geometria Analítica, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Centro XXXXX do XXXXX, teve como objetivo o estudo da cônica Elipse e sua duração foi de 3 horas.

A aula foi ministrada no Moodle da universidade, utilizando o BBB (Big Blue Button), que permite aos alunos escreverem por cima dos *slides* disponibilizados pelo professor. Este ambiente possui diversos recursos, como troca de cores de caneta, caixa de texto e algumas formas geométricas, como círculo, quadrado etc.

Para produzir a minha aula, segui a mesma sequência adotada no Capítulo 5 de Delgado, Frensel e Crissaff (2013), como mostra a Figura 1, referente ao conteúdo de elipse.

Assim como nas aulas da professora regente, procurei mesclar a apresentação de teorias com a resolução de exercícios por parte dos alunos, para que a aula se tornasse mais dinâmica.

Figura 1 – Sumário do Capítulo 5 do livro texto

Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

Durante as aulas da professora regente, ainda no papel de aluna, procurei entender qual era a metodologia utilizada e observar se a turma reagia positivamente a ela, ciente de que, posteriormente, eu deveria ministrar uma aula aos colegas.

Por conta da pandemia gerada pelo Corona Vírus, era necessário produzir uma aula que pudesse ser ministrada de forma *online*. Logo, optou-se pelo método de *slides*, que também já era utilizado pela professora regente. Escolher a mesma metodologia da professora regente faria com que minha aula não se distanciasse do ritmo que as aulas haviam tomado, além de acreditar que este tipo de aula se torna menos cansativa, tanto para os alunos quanto para o professor

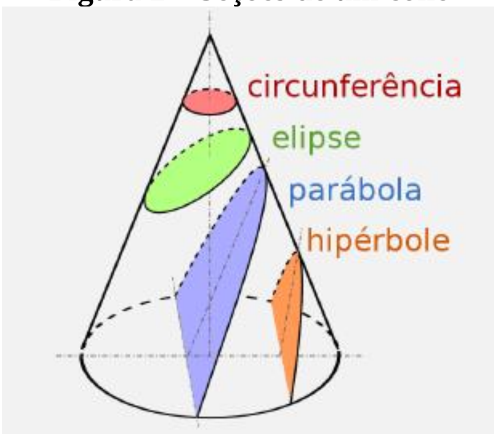
Como descrito mais detalhadamente na próxima seção, a aula iniciou com uma abordagem histórica acerca de elipse, para então introduzir seus elementos e definições. Ao decorrer da aula, alguns exercícios eram propostos aos alunos, com o objetivo de fixar o conteúdo exposto.

Assim como nas aulas anteriores ministradas pela professora regente, ao final da aula foi liberada uma tarefa para ser entregue pelos alunos até a aula da semana seguinte. O objetivo da tarefa era verificar de maneira mais precisa – além dos questionamentos durante a aula – se o conteúdo foi, de fato, compreendido.

3. RELATO E ANÁLISE DA AULA

A aula iniciou com um breve contexto histórico, baseado no livro texto de Geometria Analítica do PROFMAT, de Delgado, Frensel e Crissaff (2013). Utilizei a Figura 2 para mostrar aos alunos o que Menaecmus (380 – 320 a.C.) visualizou ao seccionar um cone.

Figura 2 – Seções de um cone



Extraído de: Wikipedia (2012). Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Seção_transversal_(geometria)#/media/Ficheiro:Conic_Sections.svg>. Acesso em: dez. 2020.

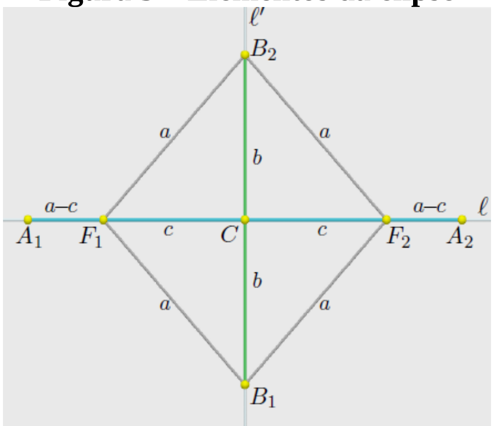
Entretanto, foi Apolônio de Perga (262 – 190 a.C.) o responsável por nomear as curvas, em sua obra Seções Cônicas. Depois, citei Fermat (1607 – 1665) como o responsável por resumir sete importantes equações na equação geral do segundo grau com duas variáveis, tratada posteriormente na aula, apenas alterando os valores de seus coeficientes.

Em seguida, apresentei a seguinte definição para elipse, de Delgado, Frensel e Crissaff (2013), com base na Figura 3:

Uma elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, sendo $0 \leq c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$,

$$\mathcal{E} = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

Figura 3 – Elementos da elipse



Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2013, p. 100).

Além desta citada, diversas figuras compuseram os *slides*, pois considerei que elas facilitariam a visualização dos alunos para resolverem os exercícios propostos. Após cada definição dada, propus a eles que desenvolvessem algumas demonstrações simples, como por exemplo:

- Mostre que $\overline{A_2F_2} = a - c$; e
- Mostre que B_1 e B_2 distam $\sqrt{a^2 - c^2}$ de C.

Também pontuei a respeito da simetria da elipse com relação aos eixos focais, informação importante quando é necessário esboçar esta cônica, além de que pode ser útil para resolver algum exercício. Além disso, observei que uma elipse cuja excentricidade vale 0 representa um círculo de centro C e raio a, com a seguinte demonstração:

$$e = \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow c = 0 \Leftrightarrow F_1 = F_2 = C \Rightarrow \mathcal{E} = \{P \mid d(P, C) = a\}.$$

Desenvolvi também a demonstração da obtenção da forma canônica da elipse, com centro na origem. Abaixo, assim como mostrado em aula, trago a demonstração da obtenção da forma canônica de uma elipse com reta focal coincidente com o eixo OX, com base em Delgado, Frensel e Crissaff (2013) (a demonstração da obtenção da forma canônica de uma elipse com reta focal coincidente com o eixo OY é análoga):

Pela definição, $P = (x, y) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$. Logo,

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2$$

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(a^2 - xc)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2)$$
$$a^4 - 2a^2xc + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Após tratar sobre a translação de eixos, demonstrei a obtenção da forma canônica com centro em (x_0, y_0), apenas substituindo $x = \bar{x} + x_0$ e $y = \bar{y} + y_0$ na demonstração anterior. Nos exercícios propostos entre as definições, os alunos cooperaram entre si para resolver, juntamente com a professora regente.

Ao tratar sobre a translação dos eixos coordenados da elipse, foi proposto o seguinte exercício:

Reescreva a curva de equação $x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y - 5 = 0$ nas coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do sistema de eixos $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ obtido quando o sistema OXY é transladado para a origem $\bar{O} = (1, 2)$. Faça um esboço dessa curva.

Como, até então, estávamos tratando da equação da elipse, que não possui termos cúbicos, houve certa dúvida por parte de um aluno, transcrita a seguir:

Aluno: Eu acho que talvez teve um erro de digitação, né? Porque se a gente for falar de x^3, *a gente não está falando de uma elipse.*

Professora: Mas eu não falei que era uma elipse. Só quero que você esboce essa equação, trocando as coordenadas.

(Diálogo entre professora e aluno, 2020).

Neste sentido, por mais que o exercício não mencionasse a palavra elipse, mas apenas curva, acredito que este exercício, no contexto em que foi proposto, tenha ficado confuso, por estar inserido no meio de tantas definições e exemplos sobre elipse. Acredito que o ideal neste momento fosse que a equação em questão representasse uma elipse. Porém, após a dúvida ser sanada, os alunos desenvolveram o exercício de forma natural.

Também tratei sobre as regiões do plano determinadas por uma elipse, seguido de um exercício. A decisão de tratar sobre este assunto se deu por estar contido na teoria do livro texto e, por isso, não quis deixar de apresentá-lo aos alunos. Entretanto, por se tratar de uma turma de mestrandos, acredito que não seja um conteúdo que traga muita novidade a eles, visto que, de certa forma, é algo intuitivo: ou tratamos da elipse, ou do seu interior ou do seu exterior, não há mais nada além disso.

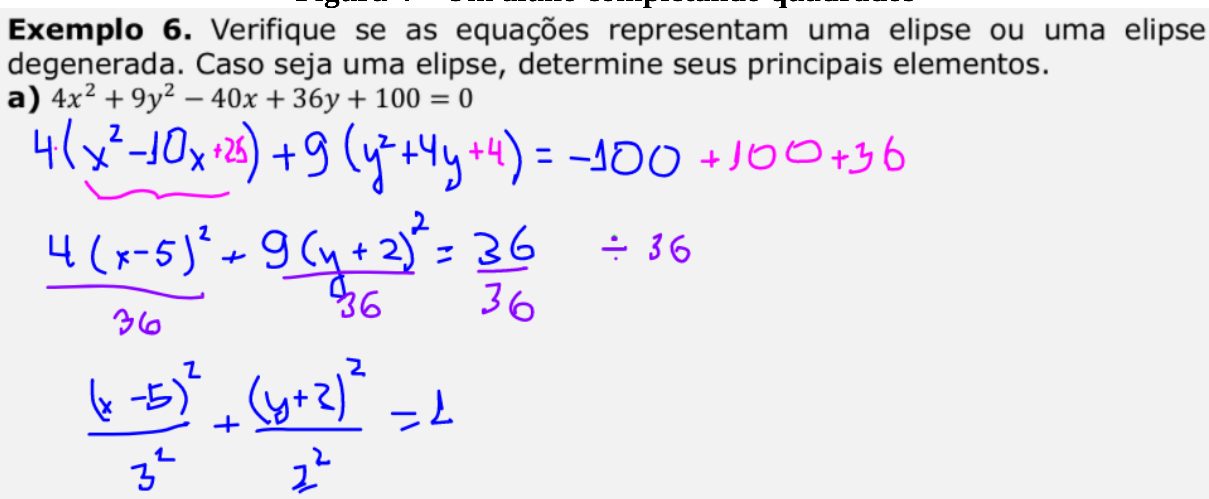
Em seguida, apresentei aos alunos a equação geral do segundo grau com duas variáveis:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Destaquei também os conjuntos representados por ela, caso A e C possuam o mesmo sinal e $B = 0$: uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados, um ponto ou o conjunto vazio, sendo os dois últimos casos chamados de casos degenerados da elipse. Em seguida, propus três exercícios, nos quais os alunos deveriam identificar quais dos três conjuntos citados são representados pela equação dada.

A principal dificuldade apresentada pelos alunos nestes exercícios foi a técnica de completar quadrados para chegar na equação canônica, visto que alguns coeficientes precisariam ser postos em evidência, como exemplificado na Figura 4, e isto gerou certa insegurança por parte deles. Porém, com a minha ajuda e a da professora regente, eles entenderam seus erros e seguiram adiante com as resoluções.

Figura 4 – Um aluno completando quadrados



Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Para finalizar, como a turma era composta por quatro professores do Ensino Básico, elaborei um pequeno questionário para ser discutido entre todos. O questionário era composto das seguintes perguntas:

- O conteúdo de Elipse é ministrado, por você, na sua escola?
- Se não, é possível ministrá-lo? Em qual ano?

- Existe algum elemento, operação ou lógica neste conteúdo que não tenha sido aprendido por um aluno do ensino básico?
- Qual a vantagem, para o aluno, em aprender sobre Elipse?

Transcrevo abaixo algumas respostas que surgiram a partir destas perguntas. Por questão de anonimato, o nome dos alunos foram substituídos por números.

Aluno 1: É mais ou menos, na verdade. No currículo didático, ele não cita a definição de elipse, ele traz que a circunferência é um caso da elipse.

Aluno 2: [...] quando a gente entra em geometria analítica, a gente começa falando de ponto, reta, aí vamos para circunferência. O mesmo conteúdo que eu vejo de ponto, reta e circunferência, eu vejo nas cônicas. Dá para entender que é muito sucinto este conteúdo em relação aos outros [...] e é bem mais superficial.

Professora regente: A cobrança nos vestibulares já tem sido bem menos focada em cônicas, e isso influencia muito.

(Diálogo entre professores e alunos, 2020).

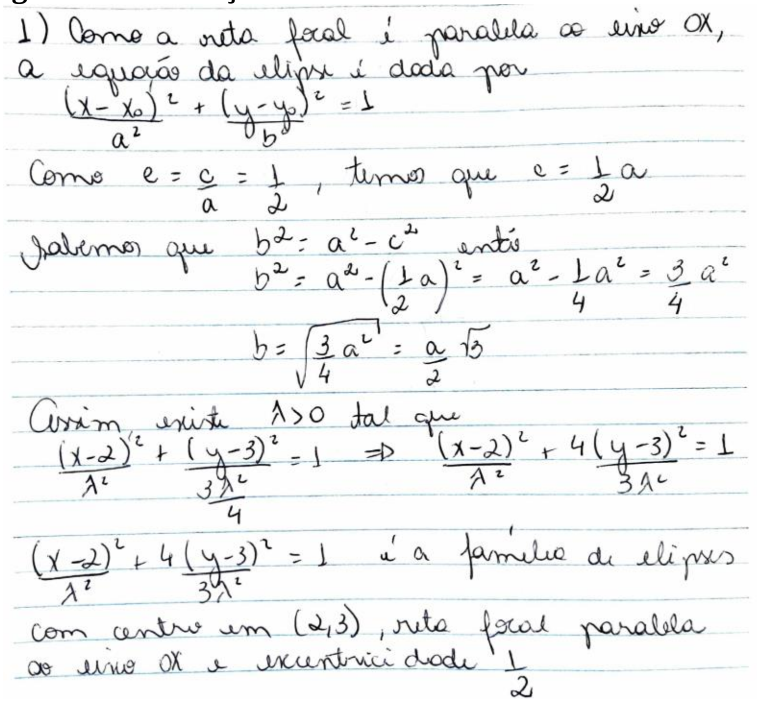
De forma geral, a aula atendeu minhas expectativas, pois houve participação dos alunos na resolução dos exercícios e nas demonstrações, assim como vinha acontecendo nas aulas anteriores da professora regente. O que me incomodou foi a falta da sensação de autoridade, pois por mais que eu estivesse ministrando a aula, eles se referiam a mim pelo meu nome e à professora regente como professora, assim como chegou a ocorrer nos estágios supervisionados durante a graduação.

Portanto, para semestres posteriores, deixo como sugestão que a professora regente se ausente, ou se abstenha de comentários nessas aulas, para que assim o aluno possa se sentir – e, de fato, seja – o professor principal daquela aula. As possíveis dúvidas, que o aluno-professor não consiga responder, surgidas ao longo do caminho podem ser anotadas e esclarecidas posteriormente com o professor regente.

Após a finalização da aula, enviei aos alunos, por e-mail, a tarefa que deveria ser entregue até a aula seguinte. Todos os exercícios desta tarefa foram retirados da seção Problemas Propostos, do livro texto de Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

A escolha dos exercícios abrangeu de forma geral os conteúdos tratados em sala, relacionando inclusive mais de uma definição para chegar à resposta, como é o caso do Exercício 4. Destaco também o Exercício 2, pois se trata de uma demonstração interessante e que inclusive pode ser tratada em sala de aula, do Ensino Médio. Na Figura 5, trago a resolução de um aluno deste Exercício 2, pois foi muito bem formulada e utilizou de forma correta os conhecimentos expostos na aula.

Figura 5 – Resolução de um aluno do Exercício 2 da tarefa


1) Como a reta focal é paralela ao eixo Ox, a equação da elipse é dada por

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Como $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, temos que $c = \frac{1}{2}a$

Sabemos que $b^2 = a^2 - c^2$ então

$$b^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$b = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Assim, existe $\lambda > 0$ tal que

$$\frac{(x-2)^2}{\lambda^2} + \frac{(y-3)^2}{\frac{3\lambda^2}{4}} = 1 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{\lambda^2} + \frac{4(y-3)^2}{3\lambda^2} = 1$$

$\frac{(x-2)^2}{\lambda^2} + \frac{4(y-3)^2}{3\lambda^2} = 1$ é a família de elipses com centro em $(2,3)$, reta focal paralela ao eixo Ox e excentricidade $\frac{1}{2}$

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ministrar uma aula para colegas que possuem o mesmo nível de formação não é uma tarefa fácil, ainda mais para alguém que não tem tanta experiência em sala de aula. Outro desafio também foi a exigência de ministrar uma aula totalmente *online*, sem a possibilidade de utilizar o quadro ou materiais concretos.

A aula ocorreu sem muitos questionamentos por parte dos alunos, visto que possuíam nível superior e o conteúdo abordado não envolvia grande complexidade. Durante os exercícios propostos, considerados acessíveis, os alunos cooperavam entre si para encontrar a solução, inclusive narrando o que escreviam, para fazer entender aos colegas o que eles estavam pensando.

O objetivo da aula foi abordar todo o conteúdo de elipse, desde a sua definição, até aplicações. De certa forma, senti falta de mais indagações, pois, como constatei posteriormente na tarefa, alguns erros cometidos poderiam ter sido evitados se fossem esclarecidos durante a aula. De maneira geral, o objetivo foi atingido pois, dentre quatro alunos, dois gabaritaram a tarefa e os outros dois superaram a média 7, mostrando que o conteúdo foi, de fato, entendido.

Para mim, como professora em formação e ainda não atuante no Ensino Básico, acredito que esta experiência de ministrar uma aula aos meus colegas tenha sido a mais importante durante todo o mestrado, pois fez com que eu me aprofundasse muito mais no conteúdo e nas demonstrações do que se fosse apenas estudar após uma aula da professora regente.

É interessante que em um mestrado voltado para o aprimoramento do professor da Educação Básica esta tenha sido a única experiência como professora que eu tenha tido durante estes dois anos. Deixo como sugestão aos demais professores do PROFMAT que insiram em seus planejamentos um momento no qual cada aluno tenha a experiência de ensinar aos outros algum conteúdo de mestrado, pois diferente dos conteúdos do Ensino Básico, os do mestrado exigem um nível de abstração maior e, por isso, exigem maior preparação por parte do aluno professor.

REFERÊNCIAS

PROFMAT. *Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional*, 2020. Disponível em: <https://www.profmat-sbm.org.br/organizacao/apresentacao/>. Acesso em: dez. 2020.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. *Geometria Analítica*. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.