XI Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática
ISSN: 2176-0489
MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E A ESCOLA BRASILEIRA: ATUALIDADE E PERSPECTIVAS
Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG ● 14 a 16 de novembro de 2019 ● Belo Horizonte, MG

DIFERENTES RESOLUÇÕES PARA UM MESMO PROBLEMA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Rosângela Maria Kowalek
Universidade Estadual do Paraná
rosangelakowalek1@gmail.com

Élida Maiara Velozo de Castro
Universidade Estadual de Londrina
elidamaiara.vc@gmail.com

RESUMO

Neste artigo, nosso objetivo é discutir diferentes resoluções matemáticas que os estudantes manifestam ao resolver um mesmo problema no contexto de uma atividade de modelagem matemática. Os dados, referentes à pesquisa qualitativa, foram coletados por meio da análise de registros escritos, com as resoluções de uma situação problema, de três grupos de estudantes do 1º ano do curso de Licenciatura em Matemática, no que Almeida, Silva e Vertuan (2013) classificam como primeiro momento de familiarização com Modelagem Matemática. Os resultados apontam que um mesmo problema, em atividades de modelagem matemática, viabiliza a manifestação de diferentes resoluções e conhecimentos matemáticos segundo os encaminhamentos assumidos por cada grupo de estudantes. Concluímos, portanto, que diferentes resoluções possibilitam trabalhar conceitos matemáticos variados e proporcionam aos estudantes perceberem diferentes maneiras de resolver um mesmo problema.

Palavras-chave: Resolução; Modelagem Matemática; Licenciatura em Matemática.

ASPECTOS INICIAIS

Pesquisas sobre ensino e aprendizagem de matemática vêm ganhando maior destaque no campo da educação e em trabalhos científicos, por meio de estudos sobre os diferentes métodos e práticas que tem por objetivo melhorar o ensino de matemática.

Nesse cenário surgem diversas pesquisas que abordam a utilização da Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica que proporciona o ensino e aprendizagem de matemática a partir de problemas que têm origem fora da Matemática (ALMEIDA; SILVA E VERTUAN, 2013).

Ao trabalhar matemática por meio de temas não essencialmente matemáticos, dos quais emerge uma situação problema, também não matemática, estabelece-se um melhor entendimento da matemática e as demais áreas do conhecimento por parte do aluno, pois a situação abordada envolve conhecimentos do seu cotidiano fazendo assim mais sentido para o mesmo. Além de haver uma interação entre o professor, aluno e conteúdo.

A noção de problema (assim como de tema e de realidade) perpassa de modo direto e indireto, as distintas concepções de Modelagem Matemática na Educação Matemática. Nessas concepções, o problema, comumente, se associa a uma pergunta, uma questão, uma dúvida, porém, ele não é substituído por uma resposta ou deixa de existir quando é resolvido. Assim, um problema em Modelagem Matemática corresponde a algo cuja resposta não é conhecida, mas que se deseja conhecer. Também, carrega características do contexto em que emergiu e as condições que o colocam nesta posição de problema (VERONEZ; CASTRO; MARTINS, 2018).

Como as atividades de modelagem matemática tem um caráter aberto, possibilitam que os estudantes encontrem e formulem diferentes hipóteses para resolver um mesmo problema. Assim podem surgir diferentes encaminhamentos e soluções para uma mesma situação problema proposta inicialmente.

Diretamente ligado à forma como o problema se apresenta em atividades dessa natureza, temos o que Almeida e Dias (2004) denominam de momentos de familiarização com a Modelagem Matemática. Para as autoras o envolvimento dos estudantes com atividades de modelagem matemática deve ocorrer de maneira gradativa, assim sugerem três momentos para o desenvolvimento das atividades em sala de aula.

Neste trabalho buscamos discutir as diferentes resoluções de uma atividade de modelagem matemática trabalhada de acordo com o primeiro momento conforme Almeida e Dias (2004), no qual o professor apresenta a situação problema para os estudantes juntamente com alguns dados e informações necessárias para o desenvolvimento.

O texto está organizado de forma a apresentar uma fundamentação teórica, que está destinada a informar sobre as atividades de modelagem matemática em sala de aula. Em seguida, são apresentados os aspectos metodológicos do estudo, incluindo a atividade de modelagem proposta e a turma na qual foi realizada. A análise dos dados é apresentada na sequência, seguido das considerações finais e das referências utilizadas na realização do trabalho.

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NO CONTEXTO DAS AULAS DE MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2013), constitui-se de uma alternativa pedagógica, que pode ser descrita em termos de uma situação inicial, também chamada problemática, de uma situação final, conhecida como solução para a problemática, e um conjunto de procedimentos que viabiliza a passagem da situação inicial para a situação final. Nesse sentido, os autores destacam que a situação problema, que emerge na situação inicial,

ISSN: 2176-0489

pode estar relacionada ao dia-a-dia do estudante, a contexto da realidade ou do meio em que vive.

Embora, na literatura, a modelagem matemática se apresente sob diferentes perspectivas, neste trabalho assumimos a concepção proposta por Almeida e Brito (2005), que caracterizam a Modelagem Matemática como sendo uma alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação problema não essencialmente matemática. Atividades dessa natureza podem, portanto, auxiliar no processo de ensino e aprendizagem da Matemática e da situação em contexto, além de promover a interação entre professor, aluno e o conteúdo. “Dessa forma, junto com os colegas e o professor, o aluno vai aprender e utilizar os conhecimentos matemáticos para a compreensão dos problemas e trazer junto a sala de aula conhecimentos adquiridos pela sua cultura local” (BUTCHE; CARVALHO; TORTOLA, 2014, p. 4).

As atividades de modelagem matemática envolvem situações associadas a um contexto real, auxilia na utilização e produção de conhecimentos matemático pelos estudantes, além de proporcionar discussões que envolvem conhecimentos não essencialmente matemáticos. Assim os estudantes podem compreender que a matemática se relaciona com as demais áreas do conhecimento, posto que os conteúdos matemáticos possam ser abordados de forma contextualizada.

Autores como Tortola e Almeida (2013) e Butcke, Carvalho e Tortola(2014) defendem que ao abordar temas do cotidiano, da realidade ou do interesse do estudante, evidencia-se uma relação da Modelagem Matemática e as demais áreas do conhecimento. Essa relação, segundo Butcke, Carvalho e Tortola (2014) pode motivar os estudantes, na medida em que possibilita que eles sejam atuantes no processo de desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Entretanto o envolvimento dos estudantes com a situação problema que emergiu em atividade de modelagem matemática pode requerer uma articulação entre definição, investigação e resolução. Para isso, Almeida e Dias (2004) sugerem que a familiarização do estudante com a Modelagem Matemática seja realizada de forma gradativa, propondo assim o que denominam de diferentes “momentos”.

1. No primeiro momento estudantes entram em contato com a situação problema, juntamente com os dados e as informações necessárias, esses apresentados pelo professor. A investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático, são desenvolvidas pelos estudantes e acompanhadas pelo professor.

ISSN: 2176-0489

2. No segundo momento o professor sugere uma situação problema aos estudantes, os quais divididos em grupos realizam a coleta de informações para a investigação da situação, realizam a definição de variável e a formulação das hipóteses simplificadoras, a obtenção e validação do modelo matemático e seu uso para a análise da situação.
3. No terceiro momento os estudantes em grupos são responsáveis pela condução de uma atividade de modelagem, tendo que identificar uma situação-problema, realizar a coleta e análise dos dados, as transcrições de linguagem, a identificação de conceitos matemáticos, a obtenção e a validação do modelo e seu uso para análise de situações, e ainda comunicação dessa investigação para a comunidade escolar

A inserção de atividades de modelagem matemáticas em sala de aula, seguindo as orientações dos três momentos possibilita ao professor e ao aluno, desenvolver habilidade de fazer Modelagem Matemática em sala de aula (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013). Neste trabalho, trazemos para discussão três diferentes resoluções de um problema proposto no contexto do primeiro momento.

Aspectos Metodológicos do estudo

O presente estudo segue orientações da abordagem qualitativa, que segundo Bogdan e Biklen (1994) busca compreender os procedimentos adotados pelos sujeitos participantes e os significados que esses atribuem aos dados gerados no ambiente natural da pesquisa, neste caso, a sala de aula.

Os dados coletados são resultado de registros e relatórios de estudantes do primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática, que frequentavam a disciplina de Matemática Elementar no ano de 2018. Para a realização da atividade os estudantes foram divididos em grupos, de 3 (três) a 4 (quatro) componentes, os dados obtidos foram coletados por meio do material produzido (registros escritos e relatórios) durante a realização da atividade. A atividade de modelagem matemática foi desenvolvida segundo o primeiro momento de familiarização (ALMEIDA; DIAS, 2004), no contexto das aulas regulares da disciplina, a qual a professora é também segunda autora deste trabalho.

A atividade proposta com o tema as “As Marés de Paranaguá” foi desenvolvida por Gois e Silva (2017) para uma turma de primeiro ano do Ensino Médio.

ISSN: 2176-0489

Quadro 1 – Atividade de modelagem matemática proposta para os estudantes.

As marés de Paranaguá

As marés ocorrem tanto nos oceanos quanto em rios e lagos, e podem ser definidas como oscilações que se repetem em determinado tempo, ou seja, movimentos periódicos que ocorrem devido à força gravitacional de atração que o sol e a lua exercem sob as partículas líquidas das águas doce e salgada. O ciclo das marés é de aproximadamente 24 horas e nesse tempo há duas marés altas e duas marés baixas. O resultado dessas forças atrai mais as águas porque elas estão mais "próximas" desses astros do que as partículas sólidas do nosso planeta, que compõem nossa crosta terrestre e, por isso, nas regiões que estão mais próximas desses corpos celestes há um acúmulo maior de água, que são também chamadas de marés altas. Nos lugares que não estão mais próximos do sol e da lua o nível das águas tende a ficar mais baixo que a média, causando o fenômeno que conhecemos como maré baixa e pelas leis da física, nos pontos onde há marés altas e baixas por inércia, os pontos opostos a estes no globo terrestre tendem a seguir os mesmos comportamentos de marés altas e baixas respectivamente. Foram feitas as previsões dos horários de maré alta e baixa para o dia 28 de julho de 2016 nas praias de Paranaguá, Paraná, conforme mostra o quadro 2.

Quadro 2: Descrição de horário e altura das marés do dia 28/07/2016 em Paranaguá

Dia	Horário	Altura (m)
28/07/2016	03:45	0,4
	10:30	1,1
	16:25	0,4
	22:30	1,1

Fonte: Clima Tempo – Disponível em: < http://www.climatempo.com.br/tabua-de-mares>. Acesso em 15 jul. 2016.

Existe um modelo matemático que possa descrever a altura das marés nas praias de Paranaguá, PR, Brasil, no dia 28 de julho de 2016? Se sim, qual seria esse modelo?

Hipóteses:
Variáveis:
Dedução do modelo matemático:
Solução:

Fonte: GOIS e SILVA (2017, p. 37)

Embora a atividade já tenha sido desenvolvida por Gois e Silva (2017), os quais apresentam os encaminhamentos assumidos pelos estudantes para resolver a situação problema, percebemos que ao propor a mesma atividade para a turma do 1º ano da Licenciatura em Matemática, a condução dada pelos estudantes, bem como os conhecimentos matemáticos envolvidos se diferenciam em muitos aspectos.

Neste trabalho abordaremos as resoluções de 3 (três) grupos, os quais apresentam resoluções e argumentações distintas para cada item proposto: hipótese; variáveis; dedução do modelo matemático; solução. Para análise iremos observar o que cada grupo desenvolveu em cada item proposto, discutindo algumas semelhanças e diferenças entre elas.

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Para iniciar a atividade os grupos buscaram ler os dados fornecidos e retirar as informações pertinentes, de acordo com Almeida, Silva e Vertuan(2013) esse momento compreende a primeira fase de uma atividade de modelagem matemática, Inteiração. O Quadro 2 abrange as hipóteses levantadas pelos grupos.

ISSN: 2176-0489

Quadro 2- Hipóteses levantadas pelos grupos na resolução da atividade proposta

	Hipóteses levantadas
Grupo 1	A altura das marés depende da fase da lua. O comportamento de oscilação não se mantém constante. Pelo comportamento da maré chegamos à conclusão de que nossa função será uma função trigonométrica, temos então três hipóteses, seno, cosseno e tangente. Como conhecemos o comportamento das três funções descartamos a função tangente, sendo assim apenas analisamos seno e cosseno.
Grupo 2	A lua influencia no vai e vem das marés.O vento e as situações climáticas também. Podemos dizer que as marés sobem e descem conforme o tempo passa, e com isso podemos deduzir que as funções seno e cosseno são as que melhor representam esse comportamento. Se o intervalo de tempo entre duas marés for o mesmo, fica mais fácil encontrar a função. É preciso realizar aproximações, imaginar que os intervalos de tempo e as alturas mantém uma diferença constante.
Grupo 3	O movimento descrito pelas marés é periódico. Em um período maior de tempo, é mais difícil perceber um movimento regular. O ciclo das duas marés e das duas marés baixas é de 24 horas, embora podemos considerar um período de 12 horas. Há também a altura, o tempo e o horário. O ciclo pode começar as 00 horas ou as 03:45.

Fonte: registros dos estudantes.

De acordo com o Quadro 1, podemos perceber que dois grupos (1 e 2) deixam explícito que, para resolver o problema utilizariam de conhecimentos acerca de funções trigonométricas, ou seja, previam o conteúdo matemático que seria necessário para resolver o problema. O Grupo 3 a partir dos termos "periódico" e "ciclo" apresenta indícios de uma compreensão que se aproxima dos outros grupos. É possível notar que nos três grupos os estudantes interpretaram a situação e identificaram o elemento comportamento das marés.

Com as hipóteses estabelecidas, os estudantes seguiram com a resolução, buscando observar qual seria a variável da situação problema, momento esse que compreende a fase Matematização (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013). A compreensão de cada grupo esta descrita no quadro abaixo.

Quadro 3- Variáveis apontadas pelos grupos na resolução da atividade proposta

	Variáveis
Grupo 1	Após analisar os dados que o problema nos fornecia, concluímos que nossa variável seria os horários em que as marés oscilam.
Grupo 2	Não fica explícito nos relatórios dos estudantes.
Grupo 3	A variável dependente é a altura dada em metros, e a variável independente seria o tempo representado em horas.

Fonte: registros dos estudantes.

No quadro 2 notamos que dois grupos (1 e 3) apresentam o tempo como sendo uma variável do problema, o grupo 3 além de destacar como variável ressalta que o tempo seria a variável independente e a altura a variável dependente. Com isso podemos inferir que os

ISSN: 2176-0489

estudantes conseguiram extrair as informações e relacionaram com conceitos matemáticos, a fim de solucionar o problema inicial.

Na fase de Resolução descrita por Almeida, Silvae Vertuan (2013) os estudantes encontram um modelo matemático que descrever a situação. Na atividade proposta os estudantes buscaram pelo modelo matemático que descrevesse a situação utilizando as hipóteses levantadas anteriormente. Desse modo cada grupo trabalhou com ideias e pensamentos diferentes estabelecendo modelos matemáticos distintos. No Quadro 4 a seguir apresentamos cada uma deles.

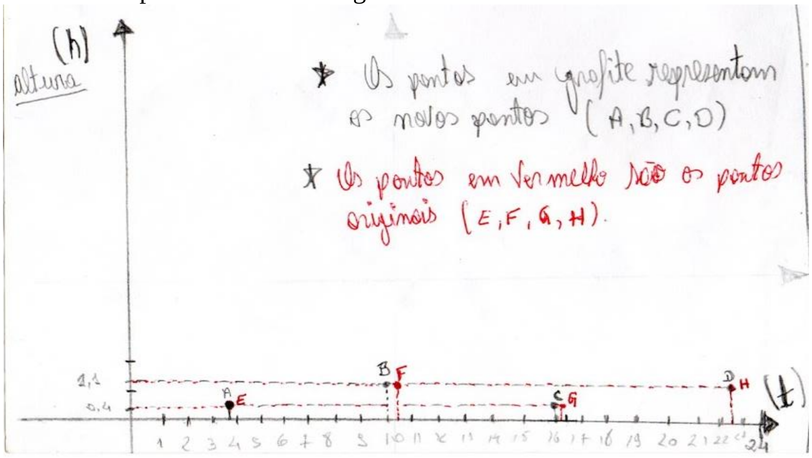
Quadro 4- Dedução do Modelo Matemático de cada grupos na resolução da atividade proposta

<table>
<tr><th></th><th>Dedução do Modelo Matemático</th></tr>
<tr><td>Grupo 1</td><td>
Após análise concluímos que a função que desejamos seria uma função cosseno, mas ainda temos que transformar a função.
A função vai depender do horário que for assumido como “inicial”.
Primeiramente procuramos identificar qual seria a amplitude da função, assim tiramos a média da altura máxima e a altura mínima das marés, chegando assim $\frac{0,4+1,1}{2} = 0,75,$ após isso, procuramos um valor que somando a média resultaria em 1,1 e subtraindo a média resultaria 0,4, e definimos este valor como 0,35. Assim encontramos o ponto inicial da função que define a amplitude da mesma. Para seguir adiante, deveríamos definir um período, como os dados nos ofereciam a variação das marés em um dia, decidimos ter como período igual a 24 horas, mas 1 hora usa como unidade de medida 60 minutos, e para plotar no gráfico precisamos de uma base 10, logo fizemos uma tabela convertendo os horários para base 10, segue a tabela abaixo.
<table>
<tr><th>Variável em horas</th><th>Variável Numerica</th></tr>
<tr><td>03:45</td><td>0</td></tr>
<tr><td>10:30</td><td>6,75</td></tr>
<tr><td>16:25</td><td>12,7</td></tr>
<tr><td>22:30</td><td>18,75</td></tr>
</table>
Após definir nossos pontos, tínhamos que definir um valor que multiplicado a variável x transformaria a função fazendo a curva “passar” pelos pontos plotados, observamos que 1 multiplicado a x fazia com que o período fosse maior do que precisávamos, então multiplicamos meio a x, a curva se aproximava muito dos pontos plotados, logo multiplicando x a meio teríamos um período compatível com os pontos plotados. Ao final chegamos ao modelo de função.
$$f(x) = 0,75 - 0,35 * \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$
Sendo x o representante de nosso horário como descrito na tabela, e f(x) À altura da maré em metros.
</td></tr>
<tr><td>Grupo 2</td><td>
Sabemos que a função seno é periódica, então teríamos que pensar uma forma de aproximar nossos dados com as características da função, para isso convertemos a horas em decimais.
<table>
<tr><td>Horário</td><td>3:45</td><td>10:30</td><td>16:25</td><td>22:30</td></tr>
<tr><td>h/ em decimal</td><td>3,45</td><td>10,5</td><td>16,41</td><td>22,5</td></tr>
</table>
Mas precisamos ter intervalo de tempo iguais entre as marés para obter o período da função, assim podemos então aproximar os pontos de uma função periódica. construímos uma outra tabela para dividir o tempo em intervalos iguais.
<table>
<tr><td>Horário</td><td>3,75</td><td>10,5</td><td>16,41</td><td>22,5</td></tr>
<tr><td>Intervalos de tempo iguais</td><td>3,75</td><td>10</td><td>16,25</td><td>22,5</td></tr>
</table>
Construímos outras tabela relacionando o horário com a altura da maré tendo como base os intervalos de tempo igualado.
</td></tr>
</table>

ISSN: 2176-0489

Horário	3,75	10	16,25	22,5
Altura da Maré (m)	0,4	1,1	0,4	1,1

Plotamos os pontos da tabela no gráfico cartesiano:



Sabendo que a amplitude do gráfico da função seno vai de [-1,1] precisamos ajustar a nossa função para que ela tenha pontos de máximo e mínimo. Sabendo que a lei de formação da função seno é **f(t)=a+b.sen(c.t+d)**

- **a** sendo o coeficiente que move a função verticalmente
- **b** é a variável que modifica a amplitude do gráfico
- **c** é a constante que modifica o período
- **d** é a constante que movimenta o gráfico no eixo horizontal

Sendo a amplitude definida como a variação do ponto médio ou mínimo, devemos descobrir o ponto médio, ou seja o **a**. Sabendo os pontos de máximo e mínimo podemos calcular o ponto médio:

Máximo = 1,1
Mínimo = 0,4
Ponto médio = $\frac{(1,1+0,4)}{2} = 0,75$.
Logo, o coeficiente é $\boxed{0,75 = a}$
Tendo a podemos descobrir o b
$1,1 = 0,75 + b.\sin(c.t+d)$
$1,1 - 0,75 = b \Rightarrow \boxed{b = 0,35}$

Assim já temos a função: f(t) = 0,75+0,35.sen(c+t+d)
Devemos agora encontrar as constantes **c** e **d**. Para isso percebemos que devemos movimentar o gráfico no eixo horizontal e modificar o seu período. Analisando a função f(t) = sen(t), temos que o período é calculado por:

$$P = \frac{2\pi}{c}$$

Como o período representa o tempo entre as marés altas, podemos calcular ele por:

$\boxed{16,25 - 3,75} = \boxed{12,50}$. Logo:
$12,50 = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = \frac{2\pi}{12,5} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\pi}{6,25}}$

obtemos então a função:

ISSN: 2176-0489

<table>
<tr><td></td><td>
$f(t) = 0{,}75 + 0{,}35 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6{,}25} \cdot t + d\right)$
Como sabemos o valor de $f(t)$ no tempo $10 \Rightarrow 1{,}1 = 0{,}75 + 0{,}35 \cdot \sin\left(\frac{10\pi}{6{,}25} + d\right)$
$= 1{,}1 - 0{,}75 = 0{,}35 \cdot \sin\left(\frac{10\pi}{6{,}25} + d\right)$
$= \frac{0{,}35}{0{,}35} = \sin\left(\frac{10\pi}{6{,}25} + d\right)$
$= 1 = \sin\left(\frac{10\pi}{6{,}25} + d\right)$
Aplicando: $\sin^{-1}$ em ambos os lados:
$= \frac{\pi}{2} = \frac{10\pi}{6{,}25} + d$
$= \frac{\pi}{2} - \frac{10\pi}{6{,}25} = d \Rightarrow \frac{6{,}25\pi - 20\pi}{12{,}5} = d \Rightarrow -\frac{13{,}75\pi}{12{,}5} = d$
$\Rightarrow d = -\frac{2{,}75\pi}{2{,}5} \Rightarrow \boxed{d = -1{,}1\pi}$

Definimos a função como sendo:
$$f(t) = 0{,}75 + 0{,}35 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6{,}25} \cdot t - 1{,}1 \cdot \pi\right)$$
</td></tr>
<tr><td>Grupo 3</td><td>
Identificamos dois grupos de dados numéricos dados pelo problema, onde havia um valor em horas sendo relacionado com um determinado nível da maré. Identificamos como uma
relação que poderia ser descrita por um modelo matemático, pois as horas poderiam ser o nosso conjunto domínio e o nível das marés o nosso contradomínio, onde teria sempre um valor do domínio associado a um valor do conjunto imagem formado a partir do nosso contradomínio.
Através do auxílio do software Geogebra descrevemos as funções trigonométricas seno e cosseno, pois observando os dados que tínhamos notamos que a função teria imagens repetidas, ou seja, em um determinado momento ela iria se repetir e assim associamos a funções trigonométricas, que são caracterizadas por ter um período, uma frequência de repetições. tentamos identificar o período da função trabalhada pois tal informação é essencial para a construção da lei de formação dessa. Houve grandes dificuldades em descobrir tal parâmetro, pois um fato levantado entre o grupo que impossibilitava a plotagem dos pontos em um gráfico eram as unidades de medida trabalhadas, pois no domínio estávamos nos baseando em um sistema de base 60, as horas, e no outro em base decimal.
Para solucionar o problema mudamos nossa base de raciocínio: Como estávamos nos confundindo e tendo divergências nos intervalos estudados fixamos 6 horas como uma média de tempo em que temos a mudança de maré, e modificamos o eixo X de horas para período, onde inicialmente pensamos ser de 12 horas. A partir disso tentamos estudar os parâmetros da função, ou seja, o que cada coeficiente numérico adicionado na função seno, escolhida pelo grupo por iniciar crescente, alterava no gráfico. Estávamos aplicando valores testando os parâmetros com o objetivo de aproximar a função seno dos pontos plotados no gráfico. Após vários testes estabelecemos como nossa amplitude sendo 0,7 pois é a diferença entre os pontos de máximo e mínimo que nos foram dados, bastava descobrir o coeficiente que multiplicaria o 2 (amplitude original da função seno) que nos resultaria em 0,7, e este número é 0,35 o nosso valor para a amplitude que multiplicará a imagem de seno.
Faltava encontrar valores para o período da função, que seria o coeficiente que acompanharia x, em meios a tantos testes falhos decidimos tentar buscar em fontes externas como o software Excel e vídeos na internet. Apesar de as buscas acrescentarem apenas a confirmação de nossas ideias, conseguimos chegar em uma conclusão apenas após a aula direcionada para a realização do trabalho, onde retomamos a ideia indicada pela professora, buscando transformar o eixo x para valores em radianos. Após modificarmos o estudo da função seno para a função cosseno. Assim conseguimos identificar melhor os parâmetros que estávamos buscando.
Os testes foram realizados pelo grupo aplicando o seguinte raciocínio:
$$\mathbf{F(x) = a * \cos(b * x) + c}$$
Os parâmetros estudados modificaram a f(x) de modo que:
a) Modifica a amplitude da curva, o valor que é medido da altura de um ponto máximo até um ponto médio ou de um ponto mínimo até o ponto médio. Ou seja, a amplitude determina nossos pontos de máximos e mínimos.
b) Ele define o período da função, ou seja, a repetição dos ciclos.
</td></tr>
</table>

ISSN: 2176-0489

	c) Desloca a nossa função verticalmente no plano cartesiano. Por meio de testes definimos, que nosso valor de b seria 1, a, já antes definido, seria -0,35, negativo para que a função cosseno comece da origem crescente, e c teria 0,75 como valor que seria a média dos pontos máximos e mínimos quando somados. A definição de c foi com base no auxílio de um integrante de um grupo externo. Logo, a função F é descrita por: $\mathbf{f(x) = -0.35 * \cos(x) + 0.75}$ Seu período foi no final da tarefa decido como 4π, pois apesar de o círculo trigonométrico ter como período 2π, esse valor representa metade do nosso ciclo diário na função estudada, onde 0,4 se repete, representando 12 horas passadas do início, e como nosso dia tem 24 horas nosso período se define por 4π.

Fonte: registros dos estudantes.

Como os estudantes haviam previsto o conteúdo matemático que utilizariam buscaram relacionar as informações aos conceitos que já conheciam desse conteúdo pré-estabelecido.

Assim nessa fase de resolução os três grupos perceberam que para utilizar os dados nas funções trigonométricas era necessário realizar transformações nos valores fornecidos incialmente. Os grupos 1 e 2 transformaram os dados para base 10 já o terceiro grupo trabalhou com um valor fixado para a média de tempo da maré. Para iniciar a resolução do problema o grupo 1 optou pela função cosseno e os outros (2 e 3) escolheram a função seno.

Nas três resoluções os estudantes relacionaram os horários com as marés, o grupo 3 ao abordar o horário como domínio e o nível das marés como sendo o contradomínio já deixou mais explícito a ideia de se trabalhar com funções. Com a finalidade de representar essa relação o grupo plotou os dados no gráfico, para em seguida trabalhar com a lei de formação das funções escolhidas, modificando seus parâmetros a fim aproximar a função dos pontos plotados. Nesse momento inferimos que os estudantes preferem trabalhar com gráficos a fim de facilitar a visualização do comportamento e das modificações que forem realizando, na função original.

Verificamos que nas três resoluções os grupos começaram a modificar os parâmetros a partir da amplitude. Se utilizaram da média entre os valores de máximo e mínimo para encontrar o ponto médio, e com base nesse encontram o valor que modifica a amplitude. Esse raciocínio nos permite inferir que eles utilizaram conhecimentos adquiridos anteriormente sobre o comportamento das funções trigonométricas. Nos cálculos realizados pelos grupos 1 e 2 encontra-se presente a ideia de trabalhar com sistemas de equações e a relação entre variáveis, quando os estudantes buscam encontrar o segundo valor utilizando o primeiro.

Seguindo com a resolução os grupos pensaram em encontrar o valor que aproxima o período da função dos pontos fixados graficamente, para tanto buscaram por valores que multiplicassem o x. O grupo 1 e o grupo 3 se utilizaram de “tentativa e erro” para obter o

ISSN: 2176-0489

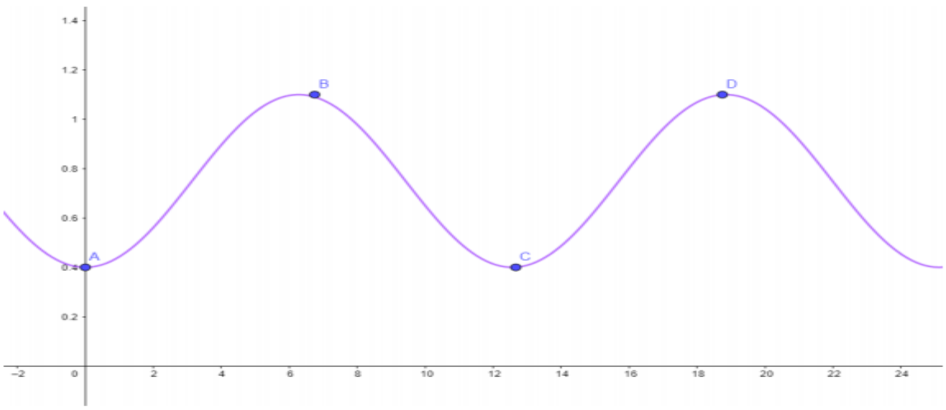
resultado, o grupo 1 testou multiplicando x e percebeu que não se aproximava muito, então optaram por ½ e verificaram que se aproximou.

O grupo 3 não conseguiu encontrar um valor, resolvendo então mudar para função cosseno, utilizaram a mesma amplitude e negativaram o termo que a modifica, para que a função iniciasse na origem. A partir de tentativa encontraram que x deveria ser multiplicado por 1 e que alterando o eixo X a função teria um período igual 4. Percebemos que o grupo 3 ao mudar de função teve mais facilidade de compreender os termos e utilizou a notação de radianos para melhor compreensão do comportamento.

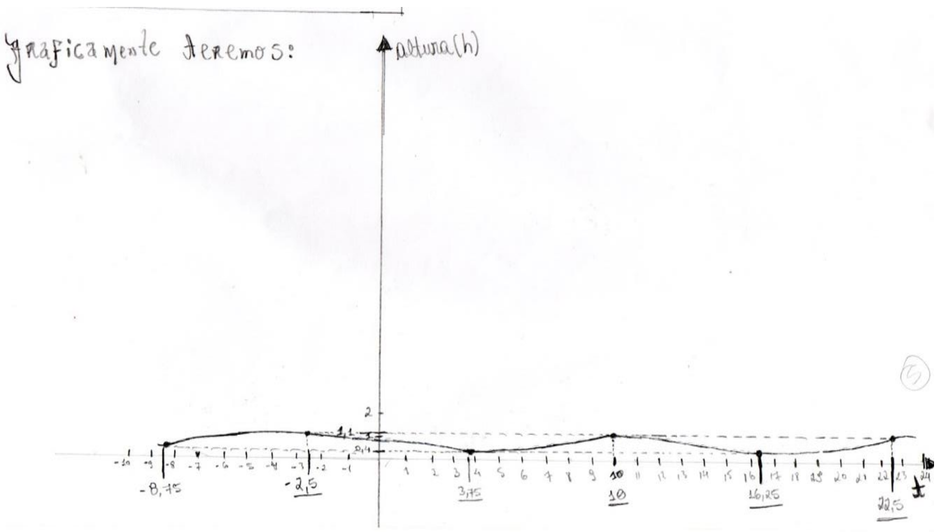
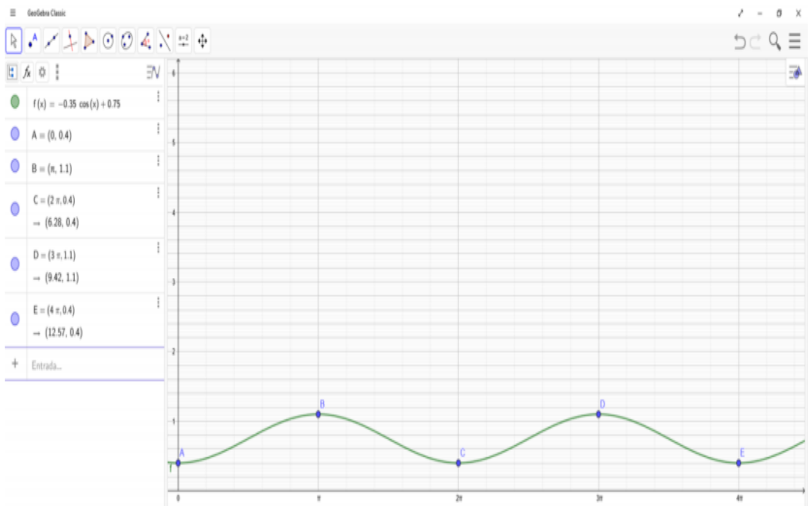
Além de modificar o período o grupo 2 moveu o gráfico na horizontal, diferente dos demais calculou o período utilizando a fórmula, obtendo o período da função seno. Nesse momento inferimos que os estudantes utilizaram conceitos que englobam a função seno original e os modificaram a fim de atender as necessidades para resolver o problema. Nesse momento eles também trabalham com o conceito de equação, pois para deslocar o gráfico horizontalmente aplicaram valores fornecidos com a intenção de obter o parâmetro que satisfaz. Também estabeleceram relações das propriedades das funções e suas inversas.

De acordo com a Almeida, Silva e Vertuan (2013) a última fase da atividade de modelagem matemática é a Interpretação de Resultados e Validação, a qual consiste em interpretar os resultados encontrados pelo modelo matemático. Na atividade proposta os grupos verificaram o modelo encontrado através de representações gráficas como mostra o quadro 5.

Quadro 5- Soluções encontradas pelos grupos na resolução da atividade proposta

	Solução
Grupo 1	 Observando o gráfico, notamos que quando x = 0, ou seja quando a hora é 3:45, o nível da maré é 0,4 metros, e conforme vai variando o horário até x = 6,75 ou seja quando a hora é 10:30, o nível da maré vai aumentando até chegar em 1,1 metros, após as 10:30 a maré volta a baixar chegado até x = 12,7, no qual o horário é 16:25, e o nível da maré é 0,4 metros novamente, e de novo a maré volta a subir e em seguida descer, o que podemos concluir observando o gráfico, é que a maré sobe e desce duas vezes em 24 horas ou seja 2 vezes ao dia.

ISSN: 2176-0489

Grupo 2	A partir da função obtemos o seguinte gráfico: 
Grupo 3	Esboçamos a função obtida no seguinte gráfico: 

Fonte: registros dos estudantes.

No quadro 5percebemos que a solução encontrada por ambos os grupos foi uma função que representava a variação das marés, sendo essas funções com leis de formações diferentes. Como solução final para a situação inicial os três grupos representaram o comportamento das marés graficamente. O grupo 1 teve como resultado uma função cosseno com período igual a 12,7. O grupo 2 uma função seno com período igual a 1. O grupo 3 obteve uma função cosseno cujo comportamento tinha período igual a 2, levando em consideração o tempo de 12 horas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na literatura a Modelagem Matemática é uma alternativa pedagógica que possibilita a inteiração entre professor, aluno e conteúdo. O professor tem um papel de orientador/ mediador entre os estudantes e o conteúdo. Os estudantes possuem autonomia para desenvolver a

ISSN: 2176-0489

atividade, com a mediação do professor. É a partir do interesse dos estudantes em resolver determinada situação que se desenvolve uma atividade de modelagem matemática.

Com esse trabalho destacamos que atividades de modelagem matemática possuem flexibilidade de resoluções, ou seja, para uma mesma atividade podem surgir diferentes soluções, essas dependem das hipótese levantas e dos encaminhamentos adotados pelos estudantes. A atividade aqui proposta já havia sido desenvolvida por Gois e Silva(2017) porém os encaminhamentos dados pelos estudantes permitiu soluções distintas das já descritas pelos autores.

Sendo assim as atividades de modelagem matemática permitem a formulação de diferentes hipóteses, para uma mesma situação problema. Nas resoluções apresentadas os estudantes formularam diferentes hipóteses e encontraram diferentes modelos matemáticos, que proporcionaram diferentes soluções. Os grupos 1 e 3 utilizaram conceitos de função cosseno, já o grupo 2 utilizou conceitos de função seno.

Isso nos evidencia duas caraterísticas da Modelagem Matemática. A flexibilidade de trabalhar diferentes conceitos em uma mesma atividade, que nesse trabalho desencadeou conhecimentos matemáticos variados (função seno e cosseno). E a autonomia dos estudantes em resolver o problema inicial formulando hipóteses, buscando por soluções, aprimorando conteúdos já conhecidos e/ou buscando novas maneiras de resolver.

Desse modo evidenciamos que atividades de modelagem propostas no primeiro momento permitem trabalhar diversos conceitos matemáticos a partir de um único problema e proporciona que os estudantes compreendam que para um mesmo problema podem existir diferentes maneiras de resolver.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica.** 1. ed. 1ª reimpressão. SP: Contexto, 2013.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?. **Ciência e Educação**, São Paulo, v. 11, p. 1-16, 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, ano 17, n. 22, p. 19– 35, 2004.

BUTCKE, D. A. P. CARVALHO, M. E. R. F. TORTOLA, E. Descobrindo o Número do Calçado a Luz da Modelagem Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, 6., 2014, Curitiba. **Anais…** Paraná: UTFPR, 2014. p. 1-15.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

ISSN: 2176-0489

GOIS, V. H. S.; SILVA, K. A. P. **Modelagem Matemática no Ensino de Funções Trigonométricas**: Uma Proposta por meio da Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Londrina: UTFPR, 2017.

VERONEZ, M. D.; CASTRO, E. M. V.; MARTINS, M. A. Uma investigação acerca do problema em atividades de modelagem matemática. **Vidya,** ano 18, n. 1, p. 223-235, 2018.