



## UMA EXPERIÊNCIA DE MODELAGEM MATEMÁTICA NO DESENVOLVIMENTO DE CONCEITOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Ticiano Azevedo Bastos  
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP  
ticianogvmg@gmail.com

Milton Rosa  
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP  
milton.rosa@ufop.edu.br

### RESUMO

Nesse trabalho apresentamos uma experiência de modelagem matemática de acordo com o Caso 2 proposto por Barbosa (2001). Essa atividade de modelagem é um recorte de uma pesquisa de mestrado que apresenta um trabalho interdisciplinar com o campo de estudo da educação física. Optamos por apresentar nesse texto nove atividades aplicadas para os participantes após a atividade de visita às academias para que pudessem estabelecer uma possível conexão entre os conceitos de análise combinatória com o processo de elaboração e aplicação das fichas de treino manuseado na visita às academias. A problemática que norteou esse trabalho de modelagem matemática foi verificar se o conhecimento de análise combinatória pode contribuir no processo de elaboração das fichas de treino afim de minimizar o congestionamento de pessoas nas academias e o seu tempo de espera nos aparelhos durante a execução de seus treinos. Nesse estudo, de cunho qualitativo, apresentamos, primeiramente, alguns entendimentos sobre a modelagem em sala de aula e a sua perspectiva sociocrítica, bem como a compreensão dos processos de prescrição de treino nas academias. Em seguida, discorreremos sobre os aspectos metodológicos utilizados na realização dessa pesquisa assim como o resultado da descrição, análise e interpretação das atividades aplicadas.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática; Análise Combinatória; Ensino Médio.

### INTRODUÇÃO

A experiência de modelagem matemática que será apresentada nesse texto é proveniente de uma pesquisa de mestrado, realizada com 17 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola particular do Vale do Rio Doce, em Minas Gerais e, também, com um professor de educação física que leciona em uma universidade na mesma cidade.

Nessa prática de modelagem foi utilizado o Caso 2 conforme proposto por Barbosa (2001), em que os professores apresentam uma determinada situação-problema para os alunos investigarem por meio da coleta de dados que realizarão sobre o tema escolhido. Nessa perspectiva, os professores são responsáveis na condução das tarefas que estarão sob a responsabilidade dos alunos.

Nesse sentido, foi proposta uma investigação relacionada com a análise combinatória, que visava possibilitar o estudo desse conteúdo a partir de experimentações de situações-problema e atividades interdisciplinares extraclasse, que conduziram os alunos para a descoberta de modelos matemáticos que traduzem fenômenos retirados da própria realidade.

Assim, os participantes foram convidados a investigar como ocorre a construção das prescrições das fichas de treino<sup>1</sup> em academias da cidade procurando obter informações sobre o seu processo de elaboração e confecção. Essa atividade teve como objetivo investigar se os participantes conseguiam perceber a presença de conceitos combinatórios na construção dessas fichas e no funcionamento dos treinos<sup>2</sup>.

A problemática que norteou esse trabalho de modelagem matemática foi verificar se o conhecimento matemático de análise combinatória pode contribuir para o processo de elaboração das fichas de treino a fim de minimizar o congestionamento de pessoas nas academias e o seu tempo de espera nos aparelhos durante a execução de seus treinos.

Assim, apresentaremos nesse trabalho nove atividades aplicadas para os participantes após a realização da visita às academias para que pudessem estabelecer uma possível conexão entre os conceitos de análise combinatória com o processo de elaboração e aplicação das fichas de treino.

## **FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**

De modo geral, o ensino atual da matemática tem gerado preocupações para a comunidade escolar, sociedade e pesquisadores da Educação Matemática. Contudo, o que se observa nas pesquisas é que a matemática ensinada nas escolas e as práticas pedagógicas empregadas no ensino dessa disciplina não acompanharam a evolução social e tecnológica da sociedade pós-moderna (ROSA; OREY, 2012).

Diante desse contexto, dentre as novas tendências de ensino em Educação Matemática, a modelagem matemática pode auxiliar no atendimento das demandas impostas pela sociedade moderna com relação à resolução das situações-problema enfrentadas no cotidiano (ROSA; OREY, 2007).

---

<sup>1</sup> As fichas de treino são instrumentos utilizados em academias para registrar o programa de treinamento de seus alunos. Contudo, para que os participantes compreendessem os sistemas existentes nas academias de treinamento físico, foram fornecidas, pelo professor de educação física participante desse estudo, algumas informações técnicas sobre os processos que deveriam ser considerados no momento da prescrição de treino. Visitas também foram realizadas pelos participantes às academias da cidade.

<sup>2</sup> A escolha do tema do trabalho de modelagem pelo primeiro autor desse texto foi realizada a partir de observações das conversas entre os participantes desse estudo em momentos informais, como, por exemplo, durante o intervalo entre as aulas. Foi verificado também que esses participantes, em suas conversas informais, trocavam experiências e informações sobre os seus treinamentos em academias.

Nesse direcionamento, por meio da modelagem, é possível a criação de ambientes de aprendizagem, nos quais os professores atuem como orientadores e mediadores do processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos propostos, cabendo aos alunos proporem, elaborarem, desenvolverem e modelarem os procedimentos necessários para a construção do conhecimento matemático (ROSA; OREY, 2012).

Das perspectivas utilizadas para a Modelagem Matemática, a sociocrítica será empregada com maior ênfase na fundamentação teórica desse trabalho, pois privilegia o pensamento crítico sobre o papel e a estrutura dos modelos, bem como reflete sobre a função da Matemática na sociedade moderna.

De acordo com Rosa e Orey (2007), essa perspectiva possibilita que os alunos pensem sobre as questões sociais que podem estar envolvidas na elaboração dos modelos matemáticos. Assim, a sala de aula torna-se um ambiente propício para o desenvolvimento das capacidades crítica, reflexiva e produtora dos alunos a partir da promoção de discussões sobre os elementos sociais que alicerçam a sociedade contemporânea (ROSA; OREY, 2007).

Desse modo, as atividades de modelagem, na perspectiva sociocrítica, tornam a sala aula um cosmo em que todos são capazes de participar igualmente, revelando pensamentos e respeitando ideias contrárias, conduzindo os participantes desse processo a observarem como a matemática e os modelos elaborados podem servir para que os alunos analisem as situações-problema propostas, possibilitando a tomada de decisões com relação às essas investigações (SILVA; KATO; PAULO, 2012).

Com respeito à compreensão técnica sobre as fichas de treino nas academias, Gentil (2005) argumenta que alguns conceitos elementares do treinamento de força devem ser entendidos antes da compreensão de seu funcionamento nas academias, como, por exemplo: força, repetições, série, carga, intervalo, velocidade de execução, intensidade, volume e interdependência volume-intensidade.

Nesse sentido, Gentil (2005) afirma que, no treinamento com pesos, a força pode ser entendida como a parcela de tensão que um músculo ou conjunto muscular pode gerar em um padrão específico. Desse modo, o significado de repetição está associado à execução completa de um ciclo de movimento e, a série à execução de um grupo de repetições, de forma contínua e sem repetições. Entende-se por carga a massa, normalmente expressa em quilogramas (Kg), aquela empregada para oferecer dificuldades à execução dos exercícios propostos.

Desse modo, para Gentil (2005), o intervalo é o período em que se deve respeitar entre o fim de uma série e o início da outra, sendo que esse agente é extremamente essencial para o sucesso do exercício. A velocidade de execução é definida a partir do tempo necessário para

completar cada fase de uma repetição. A intensidade está associada à quantidade total de carga levantada, geralmente expressa em quilogramas (Kg). Conseqüentemente, no treinamento de força com propósitos para hipertrofia<sup>3</sup>, o volume é reconhecido como a quantidade de séries executadas, sendo capaz de ser apurado por exercícios, por grupamento muscular, por treino ou por semana.

Com relação à interdependência volume-intensidade, é importante ressaltar que a magnitude do volume e da intensidade decorre da operação das variáveis dos treinamentos, como, por exemplo, velocidade, tempo de descanso, método de treinamento e estado atual do organismo. Contudo, é necessário destacar que “grande parte dos métodos de treinamento [de força hoje existentes] não foi elaborado por cientistas, nem por teóricos do treinamento de força, mas por atletas e treinadores a partir de sua percepção e instinto” (GENTIL, 2005, p. 81).

Portanto, de acordo com Gentil (2005), antes de se preocupar com a quantidade de exercícios nos treinamentos, deve-se ter o foco na qualidade do treinamento. Assim, nas academias, os instrutores devem orientar os alunos a treinarem, utilizando critérios biomecânicos, fisiológicos e psicológicos a fim de aproveitar, ao máximo, as sessões de treinamento.

## ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para iniciarmos o trabalho de campo desse estudo, os alunos foram divididos em três grupos de 6 participantes<sup>4</sup> para a realização dos quatro blocos de atividades propostos em sala de aula inseridos nas três fases da modelagem matemática (ROSA, 2005): a) Fase Inicial – Preparação da Modelagem, b) Fase Intermediária – Desenvolvimento da Modelagem e Elaboração de Modelos e c) Fase Final – Apresentação e Avaliação da Modelagem.

Para o desenvolvimento do trabalho de campo dessa pesquisa, foram utilizados dois questionários (um inicial e um final), o diário de campo do professor-pesquisador, uma entrevista semiestruturada com o professor de educação física participante desse estudo e quatro blocos de atividades relacionados com as etapas e as fases da modelagem. O quadro 1 mostra os blocos de atividades do registro documental propostas no estudo.

**Quadro 1** – Blocos de atividades do registro documental

<b>BLOCO 1: FASE INICIAL – PREPARAÇÃO DA MODELAGEM</b>		
<b>Verificando o conhecimento tácito</b>		
<b>ATIVIDADE</b>	<b>PERÍODO</b>	<b>OBJETIVO</b>

<sup>3</sup>Hipertrofia muscular é o crescimento volumétrico de um músculo decorrente do aumento volumétrico das fibras que o constituem (GENTIL, 2005).

<sup>4</sup>Essa atividade de modelagem iniciou com a participação de 18 alunos. Contudo, uma das participantes cancelou a sua participação nesse trabalho, pois se mudou para outra escola.

Divisão dos participantes em grupos de 6 (seis) componentes para realização de atividades individuais em sala de aula. Pesquisa sobre o significado dos conceitos de análise combinatória.	De 17 de Setembro de 2018 a 9 de Outubro de 2018.	Verificar a utilização do pensamento combinatório adquirido pelos participantes em suas experiências cotidianas com esse conteúdo matemático.
<b>BLOCO 2: FASE INTERMEDIÁRIA – DESENVOLVIMENTO DA MODELAGEM</b> <b>Visita às academias da cidade</b>		
<b>ATIVIDADE</b>	<b>PERÍODO</b>	<b>OBJETIVO</b>
Visita às academias de treino da cidade para obter informações sobre o processo de elaboração das fichas de prescrições de treino.	De 16 de Outubro de 2018 a 29 de Outubro de 2018.	Investigar se os participantes perceberam a presença dos conhecimentos matemáticos de análise combinatória no processo de elaboração e funcionamento das fichas de treino.
<b>BLOCO 3: FASE INTERMEDIÁRIA – DESENVOLVIMENTO DA MODELAGEM</b> <b>Análise das prescrições de treino</b>		
<b>ATIVIDADE</b>	<b>PERÍODO</b>	<b>OBJETIVO</b>
Análise dos dados coletados nas pesquisas realizadas sobre as fichas de prescrições de treino. Investigações matemáticas das informações obtidas. Elaboração de modelos baseados nas fichas de treino.	De 30 de Outubro de 2018 a 19 de Novembro de 2018	Discutir em grupo com a mediação do professor-pesquisador a possível conexão entre os conceitos de análise combinatória com o processo de elaboração e funcionamento das fichas de prescrições de treino. Elaborar os modelos matemáticos.
<b>BLOCO 4: FASE FINAL – APRESENTAÇÃO DA MODELAGEM E ENTREGA DO RELATÓRIO FINAL</b> <b>Apresentação dos resultados e avaliação do processo de modelagem</b>		
<b>ATIVIDADE</b>	<b>PERÍODO</b>	<b>OBJETIVO</b>
Elaboração do relatório final sobre as atividades de modelagem relacionadas com a análise combinatória. Apresentação dos modelos e dos resultados obtidos nas pesquisas realizadas.	De 26 de Novembro de 2018 a 3 de Dezembro de 2018	Discutir sobre a elaboração e a apresentação do relatório final. Apresentação do relatório final e dos modelos elaborados. Avaliação da apresentação e do relatório pelos membros da banca.

Fonte: Arquivo pessoal do primeiro autor

Nesse direcionamento, o registro das observações realizadas durante a execução das atividades matemáticas curriculares propostas no registro documental foi realizada no diário de campo do professor-pesquisador<sup>5</sup> imediatamente após a aplicação dessas atividades para os participantes dessa pesquisa. O professor-pesquisador também elaborou a transcrição dos vídeos e áudios que foram realizados durante a condução dessas atividades.

#### DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES APLICADAS APÓS A VISITA ÀS ACADEMIAS

O encontro realizado no dia 30 de Outubro de 2018 se iniciou com a solicitação do professor-pesquisador para que os participantes se reunissem em grupos de acordo com a formação utilizada na visita às academias. Após a entrega da folha de atividades, o professor-

<sup>5</sup> O pesquisador é também professor da turma. A denominação professor-pesquisador é utilizada para se referir ao primeiro autor desse estudo que também é o professor da disciplina da turma pesquisada. É importante ressaltar que os professores-pesquisadores consideram a prática como um meio, um fundamento e uma destinação dos saberes que são suscitados em sala de aula e orientados pela sua ação reflexiva sobre o processo de ensino e aprendizagem que é desencadeado em sala de aula (MIRANDA, 2006).

pesquisador solicitou que os participantes lessem o texto inicial que trazia informações sobre a modalidade de treinamento em circuito de acordo com um profissional de Educação Física.

A análise dos registros anotados no diário de campo do professor-pesquisador revela que todos os participantes ficaram em silêncio e estavam concentrados durante a leitura do texto inicial. Passados dez minutos do início do encontro, o professor-pesquisador promoveu a discussão com os participantes a respeito do treinamento em circuito abordado no texto lido por eles. O quadro 2 mostra alguns trechos da reflexão realizada pelo professor-pesquisador sobre a modalidade de treinamento em circuito abordado no texto lido pelos participantes.

#### Quadro 2 – Discutindo a modalidade de treinamento em circuito

*Professor-pesquisador:* Vocês viram aí que nessas duas folhas, que o treinamento em circuito é uma das modalidades que se tem na academia. Aí nesse caso, o profissional apresenta uma modalidade de treinamento em circuito para quem deseja emagrecer e não tem muito tempo de frequentar uma academia. Aí, ele faz a proposta de cinco exercícios e vai explicando o que vai fazer, como executar os cinco exercícios. Aí, ele mostra que no primeiro exercício a pessoa tem a opção de fazer 30 segundos de corda naval, que é muito usada no treinamento funcional. Se na academia não tiver a corda naval a pessoa pode fazer 30 segundos de flexão no chão. Aí, ele explica que quando você fizer esse exercício você tem que encostar o peitoral no chão de forma muito rápida, tem que ser com intensidade alta. Aí, o segundo exercício é 30 segundos em escada. No vídeo que eu assisti desse profissional, o endereço do site está aí na fonte, ele mostra que lá no estúdio dele tem uma escada de acesso que ele usa para fazer esse exercício. Aí, a pessoa vai subindo e descendo bem rapidamente. O terceiro exercício, chamado de *Squat*, usa *bag* ou anilha. Esse tipo de exercício é tipo um agachamento feito na musculação. A pessoa coloca o peso nas costas e faz o agachamento. O quarto exercício é indicado para o fortalecimento do abdômen. Ele pode ser feito diretamente no chão, movimentando as pernas de maneira bem rápida. E o último exercício que são 30 segundos no *transport*, mais conhecido como elíptico. Aí, ele fala que nesse treino, esses exercícios são executados em quatro *rounds*. Quer dizer que a pessoa faz os cinco exercícios, terminou faz de novo os cinco exercícios, quatro vezes. Esse é o treino em circuito. Aí, ele vai falar dos benefícios desse tipo de treinamento, melhora o condicionamento físico, resistência, potência. Ele fala que o tempo máximo de espera de um treinamento em circuito é o tempo de deslocamento de um indivíduo de um equipamento para outro. Quer dizer, não tem essa história de ficar esperando aparelho vagar, não tem essa de ficar demorando entre um exercício e outro, é jogo rápido.

**Fonte:** Arquivo pessoal do primeiro autor

Logo após a sua explanação, o professor-pesquisador perguntou se os participantes tinham alguma dúvida sobre o funcionamento do treinamento em circuito. A análise das anotações registradas em seu diário de campo mostra que os participantes não tiveram dúvidas sobre esse assunto. Em seguida, o professor-pesquisador solicitou que os participantes resolvessem as questões da folha de atividades que se relacionavam com essa modalidade de treino.

A análise desses registros também mostra que todos os participantes estavam presentes nesse encontro e se envolveram ativamente na resolução dessas atividades. A figura 1 mostra os participantes dos grupos Hexa, Esquadrão da Matemática e Federal trabalhando na resolução das atividades propostas na folha de atividades.

**Figura 1** – Resolução da folha de atividades pelos participantes dos grupos Hexa, Federal e Esquadrão da Matemática



Fonte: Arquivo pessoal do primeiro autor

O quadro 3 mostra o diálogo dos participantes do grupo Federal sobre a resolução da letra A da questão: *De quantas maneiras essa academia pode organizar esse circuito de treinamento?*

**Quadro 3** – Discutindo a resolução da questão sobre a análise das prescrições das fichas de treino

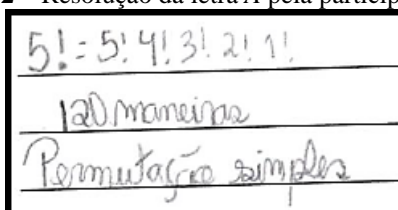
F14: Tem cinco maneiras.  
 F10: Pra mim é só uma. Uai, só tem um aparelho velho.  
 F16: Tipo assim, se tiver cinco pessoas, quatro pessoas vão fazer os outros treinamentos. Mas se tiver mais não vai dar certo.  
 F10: Mas eu não sei, tipo assim, por exemplo, tem que começar com esse [exercício]. Então, tipo assim, não pode começar com outros?  
 F16: Mas a primeira pessoa pode ir primeiro no *Climber*. Eu acho que a ordem não importa.  
 F10: A ordem importa, ele falou aqui ó qual que é o primeiro, qual que é o segundo. Eu acho que é assim, tem cinco pessoas, quando um acabar aqui o outro vem e vai pra cá. E por aí vai.  
 F16: Será que é arranjo?  
 F10: Você acha o que? A ordem importa ou não?  
 F6: Pra mim não.  
 F12: Pra mim eu acho também que não.  
 M13: É uma permutação.  
 F10: Por quê?  
 M13: Porque você vai fazer uma troca.  
 F10: Mas aqui ele falou velho qual é o primeiro exercício até o último.  
 M13: Não, esses aqui são os exercícios. Essa é a ordem que ele escolheu, mas na hora de fazer o rodízio não importa.  
 F10: Mas não tem que seguir essa ordem não?  
 M13: Não, a ordem não importa.  
 F16: É porque se não a academia não ia funcionar.  
 M13: Vai ser permutação normal.  
 F10: Qual que é a fórmula mesmo?  
 M13: N fatorial. P igual a 5 fatorial.  
 F16: Vai dar 120.

Fonte: Arquivo pessoal do primeiro autor

A análise das respostas dadas para a letra A dessa questão mostra que 16 participantes encontraram a resposta correta para essa questão por meio da utilização do conceito de permutação. Por outro lado, 2 (dois) participantes enunciaram de maneira errônea a fórmula de permutação.

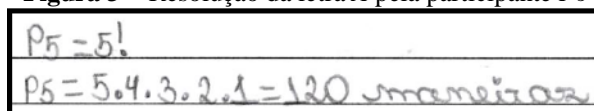
Por exemplo, as figuras 2 e 3 mostram a resolução das participantes F20 e F6 para essa questão. Essas duas participantes encontraram a resposta correta, contudo, a participante F20 utilizou erroneamente a fórmula de permutação.

**Figura 2** – Resolução da letra A pela participante F20



Fonte: Arquivo pessoal do primeiro autor

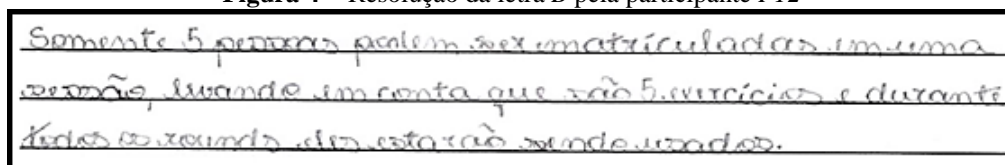
**Figura 3** – Resolução da letra A pela participante F6



Fonte: Arquivo pessoal do primeiro autor

A análise das respostas dadas pelos participantes para a letra B da questão: *Como é possível determinar o total de pessoas que podem ser matriculadas numa sessão de treinamento em circuito? Explique*, mostra que 16 participantes responderam corretamente essa questão. Contudo, 3 (três) desses participantes não explicaram como determinaram a sua resposta. A figura 4 mostra a resposta dada pela participante F12, do grupo Federal, para essa questão.

**Figura 4** – Resolução da letra B pela participante F12



Fonte: Arquivo pessoal do primeiro autor

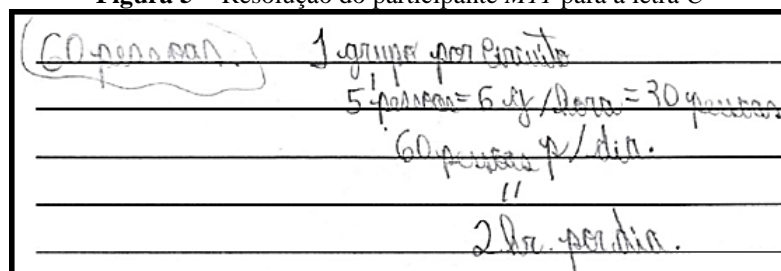
A análise dessas respostas também mostra que o participante M9 respondeu essa questão erroneamente, pois afirmou que “Pode-se dividir em grupos de 0 ou 15 pessoas e os horários podem ser divididos pelo tempo de cada circuito”.

Prosseguindo com o processo de análise das respostas dadas pelos participantes para a letra C da questão: *O proprietário dessa academia se propõe a oferecer esse serviço para os seus clientes em pacotes mensais, sendo dois treinos semanais, que ocorrerão no período de 8 horas às 9 horas da manhã ou das 16 horas às 17 horas, na segunda-feira e sexta-feira de cada semana. Determine o número máximo de pessoas que frequentarão essa modalidade por semana. Considere a possibilidade de lotação máxima em todas as sessões*, mostra que 6 (seis) participantes responderam corretamente essa questão.

Nesse sentido, a figura 5 mostra a resolução realizada pelo participante M11 que respondeu corretamente essa questão.



**Figura 5** – Resolução do participante *M11* para a letra *C*



Fonte: Arquivo pessoal do primeiro autor

A análise das anotações registradas no diário de campo do professor-pesquisador mostra que os 11 participantes que erraram a questão demonstraram dificuldades na compreensão do enunciado. Por exemplo, o quadro 4 mostra o diálogo entre os participantes *F4* e *M15* sobre a interpretação do enunciado dessa questão.

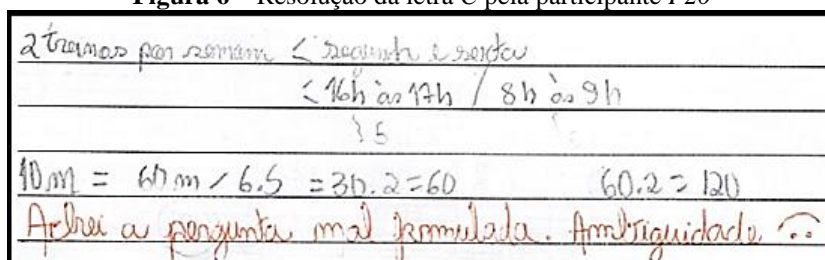
**Quadro 4** – Discutindo o enunciado da letra *C*

*F4*: Eu acho que está perguntando a lotação máxima no fim e não quantas pessoas foram. Ele quer saber quantas pessoas tinham no máximo em todas as sessões. Não perguntou se tal pessoa fez duas vezes.  
*M15*: Está perguntando quantas pessoas foram no máximo. Foi uma pessoa duas vezes.  
*F4*: Tem que considerar que uma pessoa foi duas vezes? Eu acho que não. Está perguntando lotação máxima.  
*M15*: Eu acho que sim.  
*F4*: Não está perguntando quantas pessoas foram. Está perguntando a lotação máxima no fim, de todas as sessões. Quantas pessoas tinham no máximo em todas as sessões. Não perguntou se tal pessoa foi duas vezes. No fim ela foi? É isso que está perguntando.

Fonte: Arquivo pessoal do primeiro autor

A análise das anotações registradas no diário de campo do professor-pesquisador mostra que a participante *F20* questionou o professor-pesquisador afirmando que a questão estava mal formulada, pois era ambígua. A figura 6 mostra a resolução dessa questão por essa participante.

**Figura 6** – Resolução da letra *C* pela participante *F20*



Fonte: Arquivo pessoal do primeiro autor

A análise das respostas dadas para a questão: *Como é possível determinar o número máximo de pessoas que podem ser matriculadas numa sessão de treinamento em circuito, considerando que ninguém fique ocioso?* mostra que 10 participantes resolveram essa questão corretamente. Por exemplo, o participante *M1* respondeu que o “número máximo de pessoas, sem ninguém ficar ocioso é 10”. A figura 7 mostra a estratégia utilizada por esse participante na resolução dessa questão.

**Figura 7** – Resolução da questão pelo participante *M1*

2) Uma determinada academia deseja oferecer para os seus clientes essa modalidade de treinamento em circuito. Considere que essa academia possui os seguintes equipamentos disponíveis para o desenvolvimento dessa modalidade.

- 2 aparelhos de *transport*. 2
- 2 cordas navais. 2
- 1 *bag* de 10 kg e uma anilha de 10 kg. 2
- Duas escadas de porte médio. 2
- 1 *bosu*. 1 + 1

Como é possível determinar o número máximo de pessoas que podem ser matriculadas numa sessão de treinamento em circuito, considerando que ninguém fique ocioso?

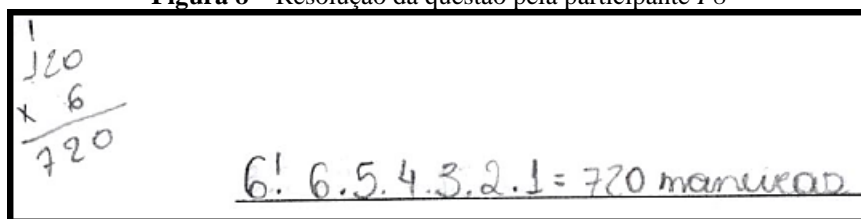
O número máximo de pessoas sem ninguém ficar ocioso é 10.

Fonte: Arquivo pessoal do primeiro autor

Contudo, a análise dos resultados mostra que 7 (sete) participantes erraram na resolução da questão por não considerarem que o exercício *Mountain Climber* pode ser realizado utilizando o *bosu*, ou seja, diretamente no chão<sup>6</sup>. Por exemplo, a participante *F16* respondeu que o “número máximo de pessoas que podem ser matriculadas numa sessão de treinamento em circuito, de acordo com a quantidade de aparelhos disponíveis, é igual a nove”.

A análise das respostas para a questão: *Um estúdio de treinamento funcional oferece aos seus clientes uma modalidade adaptada de treinamento em circuito para emagrecimento. Como não há disponibilidade de uma escada para a execução do 2º exercício no momento, o proprietário do estúdio deseja substituir esse exercício por 30 segundos na bicicleta e 20 segundos de corrida na esteira. De quantas maneiras o proprietário do estúdio pode montar esse circuito? Explique*, mostra que 12 participantes resolveram corretamente essa questão. A figura 8 apresenta a resolução da participante *F8* que respondeu corretamente à questão utilizando-se do conceito de permutação.

**Figura 8** – Resolução da questão pela participante *F8*



$$\begin{array}{r} 1 \\ 120 \\ \times 6 \\ \hline 720 \end{array}$$

$$6! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ maneiras}$$

Fonte: Arquivo pessoal do primeiro autor

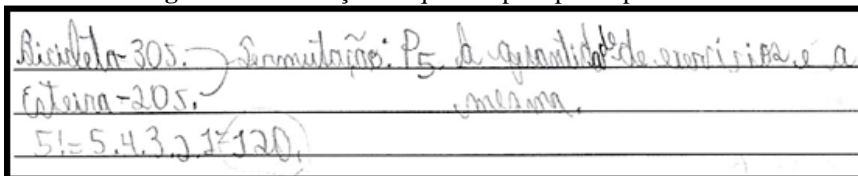
Em contrapartida, 5 (cinco) participantes resolveram essa questão erroneamente por não considerarem que o segundo exercício do circuito de treino foi substituído por dois exercícios, 30 (trinta) segundos na bicicleta e 20 (vinte) segundos de corrida na esteira<sup>7</sup>. Por exemplo, o

<sup>6</sup> Essa informação constava no texto inicial que tratava de um treinamento na modalidade de circuito.

<sup>7</sup> Essa informação constava no texto inicial que tratava de um treinamento na modalidade de circuito.

participante *M11* justificou a sua resposta respondendo que “a quantidade de exercícios é a mesma”. A figura 9 mostra a resolução realizada por esse participante.

**Figura 9** – Resolução da questão pelo participante *M11*

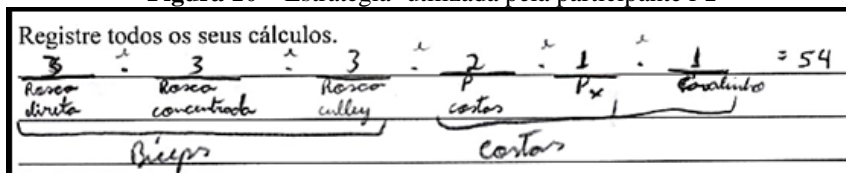


Fonte: Arquivo pessoal do primeiro autor

A análise das respostas dadas para a letra A da questão: *Considerando apenas os treinamentos de segunda-feira, quantas fichas diferentes de podem ser prescritas pelo instrutor dessa academia para os treinamentos de bíceps e costas, considerando que não haverá rodízio de aparelhos entre os alunos e que os exercícios serão executados na ordem que é apresentado na ficha? Registre todos os seus cálculos*, mostra que 8 (oito) participantes resolveram a questão enquanto 9 (nove) não a responderam.

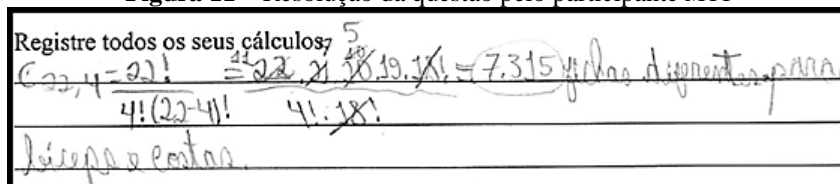
Dentre os 8 (oito) participantes que resolveram essa questão, somente a participante *F2* a resolveu corretamente, pois 7 (sete) participantes utilizaram o conceito de combinação para resolvê-la. As figuras 10 e 11 mostram, respectivamente, as estratégias utilizadas pelos participantes *F2* e *M11* na resolução dessa questão.

**Figura 10** – Estratégia<sup>8</sup> utilizada pela participante *F2*



Fonte: Arquivo pessoal do primeiro autor

**Figura 11** – Resolução da questão pelo participante *M11*



Fonte: Arquivo pessoal do primeiro autor

A análise das respostas dadas para a letra B da questão: *É possível utilizar algum dos conceitos de análise combinatória para resolver a questão anterior? Explique*, mostra que 12 participantes resolveram essa questão enquanto 5 (cinco) não a responderam. Quando

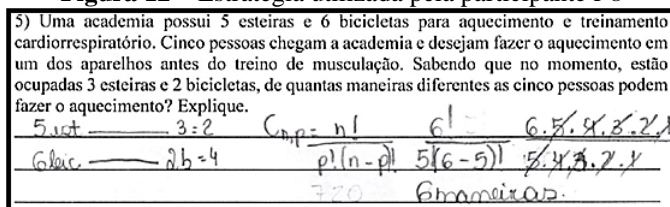
<sup>8</sup> A participante *F2* utilizou o princípio fundamental da contagem na resolução dessa questão.

questionados pelo professor-pesquisador sobre esse fato, esses participantes comentaram que não tinham entendido as informações dadas pela questão e não sabiam como resolvê-la.

Dentre os participantes que resolveram essa questão, 3 (três) a responderam corretamente. Por exemplo, a participante *F4* respondeu que é “arranjo, pois a ordem importa”. Dentre os participantes que responderam corretamente a letra *B*, duas alunas participantes, *F4* e *F8*, não resolveram a letra *A*.

A análise das respostas dadas pelos participantes para a questão: *Uma academia possui 5 esteiras e 6 bicicletas para aquecimento e treinamento cardiorrespiratório. Cinco pessoas chegam a academia e desejam fazer o aquecimento em um dos aparelhos antes do treino de musculação. Sabendo que no momento, estão ocupadas 3 esteiras e 2 bicicletas, de quantas maneiras diferentes as cinco pessoas podem fazer o aquecimento? Explique*, mostra que 11 participantes responderam corretamente essa questão, justificando a sua resposta por meio da utilização da fórmula de combinação. A figura 12 mostra a resolução da questão pela aluna participante *F8*.

**Figura 12** – Estratégia utilizada pela participante *F8*



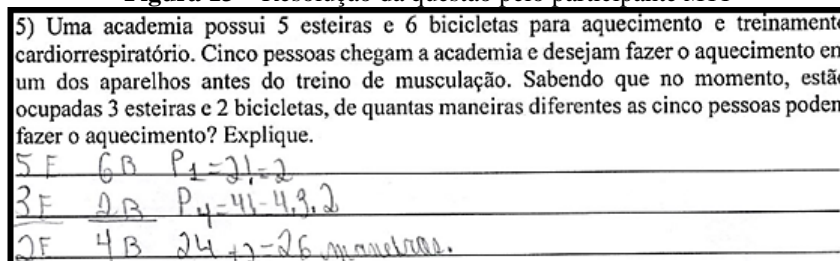
5) Uma academia possui 5 esteiras e 6 bicicletas para aquecimento e treinamento cardiorrespiratório. Cinco pessoas chegam a academia e desejam fazer o aquecimento em um dos aparelhos antes do treino de musculação. Sabendo que no momento, estão ocupadas 3 esteiras e 2 bicicletas, de quantas maneiras diferentes as cinco pessoas podem fazer o aquecimento? Explique.

5 est. — 3 = 2       $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$        $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$   
 6 bic. — 2 = 4       $\frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10$   
 320      6 maneiras.

Fonte: Arquivo pessoal do primeiro autor

A análise das respostas para essa questão também mostra também que 5 (cinco) participantes cometeram erros ao resolvê-la enquanto 1 (um) participante não a resolveu. A figura 13 mostra a solução de um dos participantes que erraram a questão ao recorrer dos conceitos de permutação para determinar a resposta para a questão.

**Figura 13** – Resolução da questão pelo participante *M11*



5) Uma academia possui 5 esteiras e 6 bicicletas para aquecimento e treinamento cardiorrespiratório. Cinco pessoas chegam a academia e desejam fazer o aquecimento em um dos aparelhos antes do treino de musculação. Sabendo que no momento, estão ocupadas 3 esteiras e 2 bicicletas, de quantas maneiras diferentes as cinco pessoas podem fazer o aquecimento? Explique.

5F 6B  $P_1 = 21 = 2$   
 3F 2B  $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$   
 2F 4B  $24 + 2 = 26$  maneiras.

Fonte: Arquivo pessoal do primeiro autor

Concluindo o processo descritivo e analítico dessas atividades, a análise das respostas dadas para a questão: *Considere que no horário das 18h até às 22h uma academia possua um público de 200 pessoas malhando no salão de musculação. Tomando como referência o número*

*de instrutores dessa academia (5 instrutores no salão de musculação no período considerado) e a média de alunos que cada um deles atende, você acredita ser possível garantir um bom atendimento nessa academia? Comente, mostra que todos os 17 participantes responderam essa questão.*

Refletindo sobre a qualidade do atendimento oferecido por essa academia o participante *M15* respondeu que “É impossível garantir um bom atendimento, uma vez que um profissional seria capaz de atender no máximo 20 alunos, como vimos na visita à academia. Percebemos que a qualidade do serviço prestado por essa academia não é bom”.

Com relação às impressões dos 17 participantes sobre o atendimento nas academias ao terem como referência o número de instrutores e a média de clientes que cada um deles atende, esses participantes se conscientizaram sobre a impossibilidade da garantia de um bom atendimento nesses ambientes.

Por exemplo, o participante *M13* argumentou que “Eu acredito que é impossível de se ter um bom atendimento nessa academia, visto que a média por instrutor é de quarenta alunos. É, humanamente, bem difícil, quase impossível uma pessoa poder ajudar quarenta”. Similarmente, a aluna participante *F4* comentou que “com o grande número de alunos por instrutor, esses profissionais acabam por não conseguir dar atenção e fiscalizar todos os alunos e, muitos acabam sem auxílio e fazendo movimentos de forma errada”.

Por outro lado, a participante *F20* afirmou que o “uso da Análise Combinatória nas academias pode contribuir para organizar uma melhor forma de rodízio de aparelhos, pois a relação do rodízio de aparelhos com a Análise Combinatória é a permutação, na organização dos circuitos”.

De acordo com a interpretação dos resultados obtidos nas atividades, infere-se que esses participantes discutiram crítica e reflexivamente sobre os principais aspectos relacionados com a elaboração das fichas de prescrição de treino, bem como sobre o funcionamento das academias e a função dos instrutores, conectando-as com as situações-problemas vivenciadas nesse ambiente.

#### **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

É importante ressaltar que nesse texto apresentamos fragmentos de uma pesquisa de mestrado em que foi proposta uma experiência de modelagem matemática no desenvolvimento dos conceitos de análise combinatória para uma turma de 2º do Ensino Médio de uma escola particular em uma cidade do vale do Rio Doce em Minas Gerais.

Nesse sentido, analisando as atividades propostas no Bloco de atividades 3: Fase Intermediária – desenvolvimento da modelagem, infere-se que os participantes utilizaram conceitos de análise combinatória na resolução das tarefas propostas, estabelecendo uma conexão desses conceitos com o processo de prescrição dos treinos das academias.

No que se refere ao problema de congestionamento de pessoas nas academias, umas das sugestões levantadas por um dos participantes estava relacionada com a adoção pelas academias de práticas de treinamento em circuito. De acordo com o aluno participante *M7*, a “gente também descobriu que não é bom que haja várias pessoas em equipamentos diferentes da academia ao mesmo tempo. É melhor que haja um circuito. No circuito você não tem pessoas ociosas, todo mundo está trabalhando, então, não acontece o congestionamento”.

Dessa maneira, esse trabalho buscou apresentar uma proposta de ação pedagógica com referência em uma prática de Modelagem Matemática baseada em sua perspectiva Sociocrítica, que pode contribuir para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de conteúdos de Análise Combinatória.

Nesse contexto, a Modelagem Matemática pode ser considerada como ação pedagógica que possibilita a compreensão de situações-problema cotidianas por meio da Matemática. Essas situações estavam relacionadas com o ambiente extraescolar das academias, como, por exemplo, o entendimento da elaboração das fichas de prescrição de treinos, que tinha como objetivo minimizar o problema de congestionamento de aparelhos, contribuindo para uma melhor gestão dos treinamentos.

Então, por meio da perspectiva Sociocrítica da Modelagem Matemática, os participantes obtiveram informações técnicas com relação ao processo da elaboração das fichas de prescrição de treinos nas academias, que propiciou a conscientização sobre a presença ainda que, indiretamente, dos conceitos combinatórios necessários para a elaboração dessas fichas.

As discussões críticas e reflexivas sobre a qualidade do atendimento prestado pelos instrutores nas academias, os cuidados que devem ser tomados na escolha por uma academia e os benefícios da prática de atividades físicas para a saúde também estiveram presentes no desenvolvimento dessa experiência de modelagem.

A interpretação dos resultados obtidos nas atividades propostas nesse texto mostra a contribuição das possibilidades de utilização de práticas de modelagem matemática na educação básica. Conforme pesquisa bibliográfica conduzida no banco de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior (CAPES), no dia 22 de Julho de 2019, utilizando-se das palavras-chave: Modelagem Matemática, Análise Combinatória e Ensino

Médio, encontramos apenas uma pesquisa de Mestrado Profissional em Educação Matemática que aborda essas temáticas

Nessa pesquisa, constatamos que havia o registro apenas da investigação conduzida por Brumano (2014), que envolvia, em um mesmo trabalho, essas temáticas, pois abordava as contribuições da modelagem para a contextualização da matemática no cotidiano dos alunos, através da percepção dos significados nos conceitos de análise combinatória na análise do funcionamento de um restaurante *self-service*.

Portanto, essa investigação também destaca que são escassas as pesquisas que abordam essa temática, mostrando, assim, a necessidade de investigar e compreender as contribuições da modelagem matemática no desenvolvimento de conteúdos de análise combinatória para os alunos do Ensino Médio.

#### REFERÊNCIAS

- BARBOSA, J. C. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. In REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., Caxambu, 2001. **Anais [...]**. Caxambu, RJ: ANPED, 2001.
- BRUMANO, Cleuza Eunice Pereira. **A Modelagem Matemática como metodologia para o estudo de análise combinatória**. 2014 Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). Juiz de Fora, MG: 2014.
- MIRANDA, M. G. O professor pesquisador e sua pretensão de resolver a relação entre a teoria e a prática na formação de professores. In ANDRÉ, M., ROSA, D. E. G., BEILLEROT, J., SANTOS, L. L. C. P., SOARES, M., MIRANDA, M. G., LÜDKE, M., LIPOVETSKY, N.; LISITA, V. M. S. S. **O Papel da pesquisa na formação e na prática dos professores**. Campinas, SP: Papyrus, 2006. pp. 129-143.
- ROSA, M. Currículo e matemática: algumas considerações na perspectiva etnomatemática. **Plures**, v. 6, n. 6, p. 91-96, 2005.
- ROSA, M.; OREY, D. C. A dimensão crítica da modelagem matemática: ensinando para a eficiência sociocrítica. **Revista Horizontes**, v. 25, n. 2, p. 197-206, 2007.
- ROSA, M.; OREY, D. C. A modelagem como um ambiente de aprendizagem para a conversão do conhecimento matemático. **Bolema**, v. 26, n. 42A, p. 261-290, 2012.
- SILVA, C.; KATO, L. A.; PAULO, I. J. C. A perspectiva sociocrítica da modelagem matemática e a aprendizagem significativa crítica: possíveis aproximações. **Investigações em Ensino de Ciências**. v. 17, n. 1, p. 109-123, 2012.