

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE FIGURAS GEOMÉTRICAS ESPACIAIS

Marcos Paulo de Oliveira¹

GD7 – Formação de Professores que Ensinam Matemática

Resumo: Este trabalho apresenta uma pesquisa de mestrado em andamento com foco no conhecimento de futuros professores de matemática associado ao conceito de figuras geométricas espaciais. Nesta investigação busca-se responder à seguinte questão investigativa: que conhecimento especializado é revelado por futuros professores de matemática sobre o conceito de figuras geométricas espaciais? Esta pesquisa de abordagem qualitativa está apoiada teoricamente no modelo *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK). Esse modelo teórico fundamentou a elaboração de tarefas formativas aplicadas no contexto de uma disciplina de formação inicial da licenciatura em matemática, que buscavam desenvolver o conhecimento especializado dos futuros professores sobre os conceitos abordados nesta pesquisa, e também o processo analítico na construção de categorias de análise das informações. Utilizou-se como instrumentos de pesquisa as produções escritas dos professores relativamente às tarefas formativas e gravações em áudio e vídeo das discussões, bem como entrevistas gravadas em áudio. Neste texto trazemos um exemplo de análise considerando uma de uma das tarefas respondidas pelos futuros professores. Como resultados parciais apresenta-se a pertinência dos indicadores de conhecimento especializado criados na categoria analisada e busca-se discutir formas de ampliar a análise para as outras categorias.

Palavras-chave: Figuras geométricas espaciais. Pirâmides. MTSK. Licenciatura em matemática.

INTRODUÇÃO

A Geometria é vista como um ramo da matemática que possibilita discutir conhecimentos do mundo físico, proporcionando descrever e representar o mundo em que vivemos (FREUDENTHALL; 1973). Tradicionalmente, o estudo da Geometria dentro das salas de aula era tratado como secundários e abordados de forma mecânicas e abstratas (LORENZATO, 1995), e mesmo hoje, que a abordagem da Geometria é mais presente, e prevista em todos os níveis do currículo escolar (BRASIL, 2018), ainda encontramos dificuldades em relacionar os conceitos e definições com as noções intuitivas trazidas pelos alunos (VASCONCELLOS, 2008).

Essas dificuldades dos alunos relacionam-se com o fato de regularmente não serem apresentadas nem discutidas definições de figuras geométricas aquando do seu estudo, sendo o conceito de figura apresentado por meio de algumas das suas diferentes

¹ Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP; Programa de Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática; Mestrado; marcosp_oliveira_@hotmail.com; orientador(a): Alessandra Rodrigues de Almeida.

representações (normalmente de forma tipificadas) sem que se discuta a definição do conceito que se está a trabalhar.

Considerando que, dentre um conjunto de fatores controláveis, aquele que mais impacta nos resultados dos alunos é o conhecimento do professor (ver, por exemplo, ROCHOFF, 2008; CARNOY; ARENDS, 2012), e por isso assumimos a necessidade de se desenvolver este conhecimento como foco para a formação dos professores, de modo a superar a melhoria da aprendizagem dos alunos.

O conhecimento do professor tem sido o foco de pesquisas em educação especialmente em virtude dos estudos desenvolvidos por Shulman (1986). Pesquisas recentes vêm buscando especificar os domínios do conhecimento do professor específico da matemática (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; TURNER; ROWLAND, 2011; CARRILLO, et al., 2018), e assumimos para este trabalho que o conhecimento do professor é especializado e envolve dimensões tanto do conhecimento do conteúdo (matemático) quanto no domínio didático-pedagógico do conteúdo e por isso assumimos a perspectiva do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* — MTSK² (CARRILLO et al., 2018).

Nesta investigação focamos no conhecimento que futuros professores de matemática revelam sobre o tema das figuras geométricas espaciais, e buscamos responder à seguinte questão: *que conhecimento especializado é revelado por futuros professores de matemática sobre o conceito de Figuras Geométricas Espaciais?*

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Os conceitos em geometria são constituídos por muito mais aspectos do que somente a sua definição (VINNER, 1991; AIRES; CAMPOS; POÇAS, 2015), pois as definições podem ser abstratas e não darem significado às características do objeto que se está definindo, deixando de lado o processo cognitivo que ocorre antes desta formalização

2 Optamos por manter a nomenclatura em Inglês pois esta é uma conceitualização do conhecimento professor reconhecida internacionalmente e, sua tradução Desvirtuaria não apenas o sentido mas, essencialmente, o conteúdo de cada um dos subdomínios que compõem o modelo.

(TALL; VINNER. 1991). Quando tratamos de figuras geométricas, normalmente passamos a identificar prismas, pirâmides, esferas, antes de definir estas figuras, e criamos desde então um conceito dessas imagens.

Para caracterizar os conceitos de figuras espaciais vamos utilizar os termos imagem do conceito e definição do conceito. A imagem de um conceito é definida como toda a estrutura cognitiva que é associada a um conceito, que inclui todas as características e representações que são evocadas quando mencionamos o seu nome e é constituída ao longo dos anos (TALL; VINNER, 1991). Por exemplo, para o conceito de pirâmide, uma imagem mental associada pode ser a imagem das pirâmides do Egito, a construção das arestas de uma pirâmide feita com canudos, ou a característica destas figuras de que em um dos seus vértices se interceptam a maioria das faces dessa figura (com exceção de uma).

Para criar uma imagem mental de uma figura geométrica, as suas diferentes representações tornam-se importantes para que se evidencie diversas características, e dessa forma é necessário o estudo das diferentes representações das figuras espaciais. Além disso, como afirma Duval (2012), um aspecto importante quando se trata de representações é a diferenciação entre o objeto e as suas representações. Assim, é importante distinguirmos a pirâmide em si de suas representações, como uma construção em formato de pirâmide feita com palitos, ou então da construção feita de papel representando as faces. Dizemos que essas últimas são representações, respectivamente, das arestas de uma pirâmide, e das faces que compõem a superfície dessa figura espacial.

A definição de um conceito é formada pelas palavras usadas para descrever um determinado conceito (TALL, VINNER. 1991), ela é constituída pelas definições formais, e pode ter uma maior ou menor grau de formalidade, assim como ter ou não ligação com a imagem do conceito que é estabelecido pela pessoa.

Não existe uma única forma de construir definições na matemática, e em particular na Geometria, podemos, por exemplo selecionar um subconjunto de propriedades do objeto, de forma que todas as outras propriedades podem ser deduzidas a partir desta, ou então derivando-as a partir de outros conceitos, excluindo, generalizando, especializando, ou adicionando propriedades ao primeiro (DE VILLIERS, 1998).

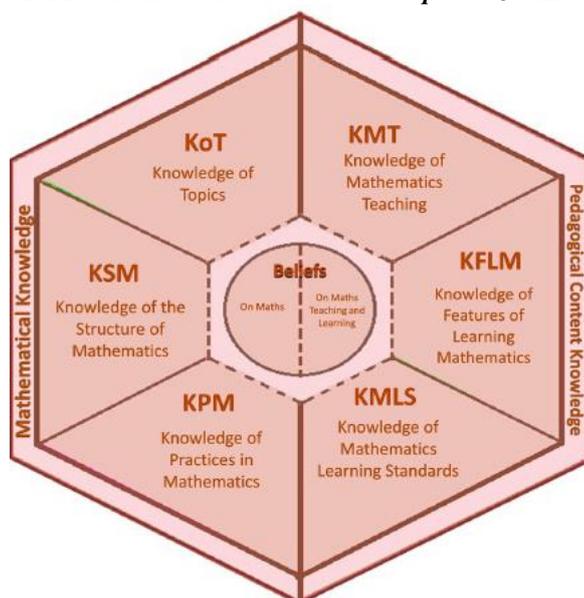
Para construir as nossas definições de figuras geométricas espaciais, trazemos algumas considerações sobre o que é uma figura. Bicudo (2009, p. 97) apresenta a definição de figuras como “o que é contido por alguma ou algumas fronteiras”, e fronteira

como “aquilo que é extremidade de algo ou alguma coisa” (BICUDO, 2009, p.97). Além de definir as fronteiras das figuras, é essencial considerar explicitamente se da figura que pretendemos representar forma parte o seu interior ou não (DUVAL, 2012), ou seja, se consideramos apenas essa fronteira como sendo a figura, ou se consideramos a fronteira e o interior.

Consideramos que as figuras geométricas espaciais são objetos geométricos contidos no espaço e delimitados por superfícies. Uma vez que o espaço que vivemos possui três dimensões, essas figuras são, portanto, tridimensionais. São exemplos de figuras espaciais os prismas, pirâmides, cones e esferas. A forma como definimos as figuras espaciais deve levar em conta se consideramos que as figuras são formadas somente pelas superfícies da fronteira ou se também contém o seu interior, e no caso particular das figuras possuírem superfícies planas como fronteira, está intimamente ligada com a forma que definimos as figuras geométricas planas.

Para analisar o conhecimento matemático ligado aos tópicos em questão usamos o modelo *Mathematics Teachers’ Specialized Knowledge - MTSK*-, que possui como característica primordial considerar todo o conhecimento do professor que ensina matemática como especializado. Um esquema representando o modelo é apresentado na Figura 1:

Figura 1: Modelo *Mathematics Teachers’ Specialized Knowledge – MTSK*



Fonte: CARRILLO et al., 2018, p. 241

O modelo MTSK é organizado nos domínios *Mathematical Knowledge* (MK), que corresponde ao conhecimento matemático dos conteúdos, e *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), que corresponde ao conhecimento pedagógico dos conteúdos. O modelo também considera *Beliefs* dos professores tanto em relação à matemática, quanto em relação ao seu ensino.

Cada um dos domínios é composto por 3 subdomínios, e neste trabalho analisaremos mais profundamente o *Knowledge of Topics* (KoT), que envolve conhecimento sobre definições, propriedades e fundamentos, características e representações dos tópicos em si. Uma de suas categorias é *definitions, properties and foundations*, e trazemos uma análise baseada especificamente sobre as propriedades das figuras geométricas espaciais. As propriedades das figuras espaciais são as características comuns a todos os objetos que pertencem a esta classe. Dessa forma, elencamos um conjunto de propriedades mínimas que definem as figuras espaciais: 1) estão contidas no espaço e não podem ser contidas em um único plano; 2) possui uma fronteira formada por superfícies; 3) são constituídas por esta fronteira ou pela fronteira e o interior, não ambos ao mesmo tempo.

Dessa forma, criamos alguns indicadores de conhecimento do professor sobre as propriedades das figuras espaciais, os quais buscaremos nos contextos de coleta de dados para evidenciar o conhecimento especializado de professores: KoTp1 - conhecer que a figura espacial está contida no espaço e não pode ser contida em um único plano; KoTp2 - conhecer que a figura espacial é delimitada por uma fronteira e esta por sua vez é formada por uma ou mais superfícies; KoTp3 - saber que é necessário delimitar se as figuras espaciais são constituídas somente pela fronteira ou pela fronteira e pelo interior da figura.

CONTEXTO E MÉTODO

Esta pesquisa tem cunho qualitativo, e configura-se num estudo de caso instrumental, no qual buscamos compreender o conhecimento do professor. Entendemos que os dados analisados não são generalizáveis, mas que o caso ajudará a formular hipóteses acerca do tema de estudo. A particularidade do caso se dá pelo fato de a disciplina ter como foco proporcionar o desenvolvimento do conhecimento do futuro

professor por meio de tarefas formativas conceitualizadas para este fim (JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014; RIBEIRO, 2016);

O contexto da pesquisa é uma disciplina de formação inicial, Licenciatura em Matemática, em uma universidade pública do estado de São Paulo. A disciplina tem como objetivo promover o conhecimento especializado dos futuros professores em vários tópicos matemáticos que se relacionam com a sua prática matemática futura, e é prevista para o 7º semestre do curso. No semestre em que se realizou a coleta de informações a disciplina foi composta por 19 futuros professores. Houve a participação do pesquisador como estagiário docente (PED), e a disciplina fora ministrada pelo seu coorientador.

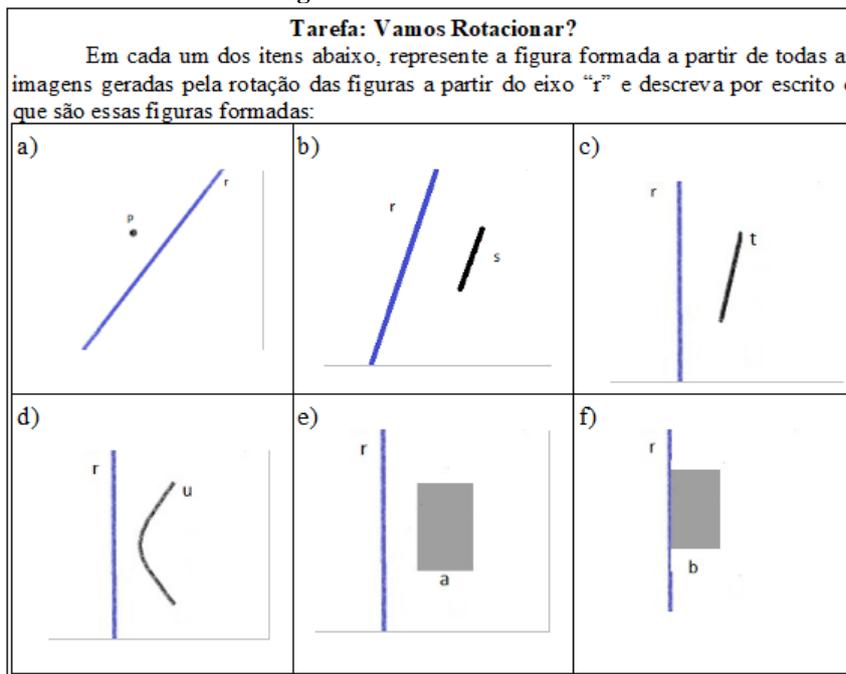
A coleta das informações se deu a partir da implementação de 3 tarefas na disciplina, que foram gravadas em áudio e vídeo, e por meio de entrevistas, que foram gravadas em áudio. Cada uma das tarefas foi implementada em uma aula de 4 horas, e a dinamização ocorreu em dois momentos: um primeiro de resolução e discussão da tarefa em duplas ou trios, e um segundo momento de discussão das respostas entre todos os integrantes da disciplina.

Nos dias subsequentes às aulas nas quais foram aplicadas as tarefas o pesquisador assistiu aos vídeos que referentes às discussões em grupos nas aulas e realizou entrevistas com quatro participantes que tiveram uma comunicação mais ativa na discussão das tarefas nas aulas. As entrevistas foram realizadas individualmente e tiveram como o objetivo esclarecer alguns elementos do conhecimento especializado dos futuros professores que não ficaram claros durante a dinamização das tarefas.

Trazemos neste texto um exemplo da análise com base nas produções e discussões de um grupo constituído por três participantes durante a resolução da tarefa 1. Discutimos uma das categorias estabelecidas na pesquisa: propriedades de figuras espaciais.

A primeira tarefa era intitulada “Figuras Espaciais e Rotações”, e tinha por objetivo discutir a diferenciação entre figuras planas e figuras espaciais por meio de rotações. As questões que estão incluídas na análise são as questões 1.a – *O que são figuras geométricas bidimensionais? Dê exemplos* –, 1.b – *O que são figuras geométricas tridimensionais? Dê exemplos* –, e a questão 5 – *Qual(is) da(s) figura(s) anteriores são tridimensionais? Justifique* –, referente às figuras formadas na tarefa “Vamos Rotacionar?”, na figura 2, pensada para alunos de 7º ano do ensino fundamental.

Figura 2: Tarefa Vamos Rotacionar



Fonte: Dados da pesquisa.

Como respostas esperadas para a tarefa “Vamos Rotacionar?” temos que na figura “a” é formada uma circunferência; na figura “b” a superfície lateral de um cilindro; na figura “c” a superfície lateral do tronco de um cone; na figura “d” a superfície lateral de uma figura não poliédrica; na figura “e” um segmento externo de um cilindro; e, na figura “f” um cilindro.

Neste primeiro momento de análise focamos as produções escritas dos futuros professores para essa tarefa, bem como as transcrições do áudio das discussões de um dos grupos para a mesma. As transcrições são usadas de forma complementar, quando identificamos que as discussões revelam conhecimentos que não estão presentes nas resoluções escritas. Cabe ressaltar que dois participantes do grupo em questão foram entrevistados, e as entrevistas foram transcritas em sua totalidade.

Para o processo de análise dos áudios, organizamos as transcrições em episódios, separados de acordo com o objetivo da discussão (RIBEIRO; CARRILLO; MONTEIRO, 2012), e em cada um dos episódios listamos os conhecimentos presentes na categoria *propriedades de figuras geométricas espaciais*, segundo os indicadores criados a priori, descritos anteriormente. Agrupamos um conjunto de episódios que permitem discutir o

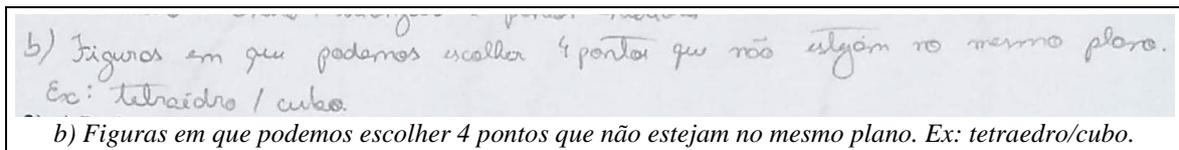
máximo possível do conhecimento especializado revelado por esse grupo de futuros professores nesta categoria.

Nas transcrições apresentadas, numeramos as linhas de forma sequencial, de forma que a numeração de cada episódio começasse onde a numeração anterior parou. Na primeira coluna das transcrições estão as numerações das linhas, na segunda o nome do autor da fala, e na terceira linha a fala dos futuros professores. Todos os nomes usados são fictícios.

ANÁLISE E DISCUSSÃO

O primeiro trecho que trazemos é a resolução escrita do grupo para a questão 1.b “O que são figuras geométricas tridimensionais? Dê exemplos” (Quadro 1).

Quadro 1: Resolução escrita do grupo para a questão 1 da tarefa



Fonte: Dados da pesquisa (produzido pelo autor)

Ao dizer que podemos escolher 4 pontos que não estejam no mesmo plano, os futuros professores mencionam a propriedade de que as figuras espaciais não estão contidas em um único plano, revelando um conhecimento em KoTp1, mesmo sem especificar se essas figuras devem ser contínuas ou se podem também ser um conjunto finito de pontos.

A seguir, trazemos um trecho da discussão do grupo em relação à pergunta 5) “Qual(is) da(s) figura(s) anteriores são tridimensionais? Justifique” (Quadro 2).

Quadro 2: Discussão do grupo para a questão 5 da tarefa

[1]	Julia:	“Qual das figuras anteriores são tridimensionais?”
[2]	Mário:	Quer dizer, tem volume.
[3]	Mariana:	Tem volume.
[4]	Julia:	Formadas?
[5]	Mário:	Para mim tudo é tridimensional, mas eu acho que ele está querendo dizer o que tem volume, o que tem área. Porque se é uma superfície lateral isso aqui só tem área, né.
[6]		
[7]	Julia:	Isso não é preenchido, é isso que está perguntando?
[8]	Mário:	Essa daqui é unidimensional, é uma linha só. Tridimensional no sentido de ter

[9]		volume é só essa e essa [aponta para figuras “e” e “f”].
-----	--	--

Fonte: Dados da pesquisa (produzido pelo autor)

Na linha 5, o Mário diz que para ele tudo é tridimensional (todas as figuras da tarefa “Vamos Rotacionar?” são tridimensionais), indicando que os objetos representados possuem a característica de serem tridimensionais, e mostrando que podem haver objetos tridimensionais que não possuem volume, e por isso ainda não podemos dizer que é um conhecimento sobre $KoTp3$ (se para o grupo figuras espaciais necessariamente possuem volume), pois indicam que algumas figuras espaciais possuem volume e outras não.

O próximo trecho traz um episódio ocorrido durante a discussão plenária, em que um dos integrantes do grupo, o Mário, defende a sua posição quanto à necessidade de figuras espaciais possuírem volume (Quadro 3).

Quadro 3: Discussão plenária sobre a necessidade de figuras espaciais possuírem volume

[10]	Mário:	Eu fiquei numa certa dúvida porque, por exemplo, considerar que a casca de um cone, de um tronco de cone, a superfície lateral é bidimensional só porque só tem
[11]		área, não tem um volume, para mim é falso, porque a gente definiu o tridimensional
[12]		sempre que você puder pegar 4 pontos que não estejam num plano. E que haja
[13]		continuidade também.
[14]		
[15]	Gabriel:	É que a casca do cone dá para você cortar ela e planificar né.
[16]	Paula:	Então, mas e aí eu posso planificar um cubo, que também...
[17]	Mário:	Mas aí é planificar, não é a mesma figura.
[18]	Gabriel:	Então, por mais que ela esteja no espaço, ela não tem dimensão de, sei lá...
[19]	Mário:	Ela não tem volume.
[20]	Paula:	Ela não é sólida.
[21]	Mário:	Ela não tem volume, só tem área, mas ela é uma figura tridimensional para mim.
[22]	Paula:	Porque ela não pertence a um plano.
[23]	Gabriel:	Para mim é um plano no espaço, sabe, é um plano no espaço.
[24]	Mário:	Mas é curvado.
[25]	Paula:	Mas eu concordava com você [Gabriel], só que fui convencida do contrário.
[26]	Mário:	É como você dizer que a circunferência é uma reta.
[27]	Paula:	Porque ela não é uma figura... entendeu? Ele não é um retângulo, por exemplo, no
[28]		caso do...
[29]	Gabriel:	É, é um plano no espaço que delimita um volume, na verdade
[30]		[sobreposição de conversas]

Fonte: Dados da pesquisa (produzido pelo autor)

Já sobre o volume, Mário deixa claro nas linhas de 11 a 13 que possuir volume não é uma característica necessária para as figuras espaciais, mas que existem figuras espaciais que delimitam um volume e outras que não. Nas linhas 19 e 21 ele demonstra que uma figura como a superfície lateral de um cone, indicando que não faz a distinção entre as figuras espaciais delimitarem um volume ou delimitarem uma superfície, ou seja, entre considerar que a figura é constituída pela sua fronteira ou pela sua fronteira e o interior, ambos os casos para ele são figuras espaciais.

Observamos também que o Mário afirma nas linhas 13 e 14 que é necessário que a figura espacial seja contínua, retirando a imprecisão trazida no quadro 1 e reiterando o seu KoTp1.

A necessidade de as figuras espaciais possuírem uma fronteira não é dita explicitamente durante a resolução da tarefa, mas o conhecimento sobre essa propriedade foi expresso na entrevista realizada com o futuro professor Mário, quando ao responder à pergunta seguinte: “a definição que o grupo de vocês deu para figuras planas foi que *“todos os pontos da figura têm que estar no mesmo plano”*, e para figuras espaciais como *“figuras em que podemos escolher 4 pontos que não estejam no mesmo plano”*. Você considera estas definições adequadas às classificações feitas [para as figuras formadas na tarefa Vamos Rotacionar]?”. A resposta é mostrada no quadro 4.

Quadro 4: Resposta do Mário a uma das questões da entrevista.

[31]	Mário:	Ah, sim. É incrível que revisitando essas respostas você sempre encontra mais uma
[32]		ideia problemática. Para ser bidimensional, além dos pontos estarem todos no mesmo
[33]		plano, a linha tem que ser fechada, se ela é delimitada por uma linha a linha têm que
[34]		ser fechada, porque , por exemplo, uma reta, ela está toda num plano, mas ela é
[35]		unidimensional, porque ela é aberta, né, uma parábola também, ela é aberta, então eu
[36]		não posso dizer que a parábola é bidimensional, sem essas ideias que “ah, tem uma
[37]		área infinita para lá e para cá”, não, ela não fecha, então complementando essa
[38]		definição de bidimensional, além de todos os pontos estarem num plano, de
[39]		preferência a figura tem que ser fechada, a linha tem que ser fechada, para delimitar
[40]		uma área. Porque senão a reta também seria uma figura bidimensional, e pelo menos
[41]		a reta é unidimensional.

Fonte: Dados da pesquisa (produzido pelo autor)

Neste trecho ele demonstra explicitamente conhecer que figuras possuem uma fronteira, e dessa forma demonstra um conhecimento de KoTp2, que as figuras geométricas são delimitadas por uma fronteira.

Dessa forma, observamos que nos diferentes contextos o grupo formado por Mário, Júlia e Mariana demonstrou um conhecimento sobre as propriedades KoTp1 e KoTp2, não sendo explícitos quanto à propriedade KoTp3, e indicando que tanto figuras formadas por fronteiras quanto formadas por fronteiras e seu interior são espaciais. Como não fizeram essa diferenciação entre a fronteira isoladamente da fronteira e o interior, o grupo não faz a diferenciação entre as figuras em si e as representações das figuras. Dessa forma, é necessário discutir a partir da tarefa essa diferenciação, usando por exemplo os itens “b”, “c” e “d” da tarefa “Vamos Rotacionar?”, abordando, por exemplo, que a superfície lateral do cilindro, como no item “b”, é uma representação de uma figura espacial, e mesmo se

tivéssemos toda a superfície do cilindro, teríamos que distinguir se o que chamamos de cilindro é esta superfície ou a superfície e o interior.

Os indicadores construídos a priori mostraram-se suficientes para descrever todo o conhecimento sobre as propriedades das figuras espaciais para este grupo.

Um próximo passo é buscar nos outros grupos onde houve discussão sobre a diferenciação entre a fronteira e a fronteira e o interior.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os diferentes momentos de recolha de informações tiveram importância para identificar o conhecimento especializado desse grupo de futuros professores, visto que houve identificação de conhecimento especializado nas produções escritas, discussões nos pequenos grupos, discussões plenárias e entrevistas de forma complementar.

A continuidade do trabalho de análise se dará a continuar a análise para os outros grupos na categoria das propriedades de figuras espaciais, e posteriormente realizara análise para as outras categorias, usando o modelo MTSK para delimitar estas categorias. Algumas dificuldades previstas são as organizar em cada uma das categorias o conhecimento demonstrado em cada um dos momentos das tarefas, e como organizar situações como no quadro 3 em que aparece o conhecimento de integrantes de diferentes grupos ao mesmo tempo.

Ao final do trabalho, visamos obter um conjunto de indicadores de conhecimentos especializados para cada uma das categorias estabelecidas para análise, a saber, as categorias definidas nos subdomínios KoT, KPM, KMT e KFLM para os tópicos matemáticos da pesquisa.

REFERÊNCIAS

- AIRES, A. P.; CAMPOS, H.; POÇAS, R. Raciocínio geométrico versus definição de conceitos: a definição de quadrado com alunos de 6.º ano de escolaridade. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, v. 18, n. 2, p. 151-176, 2015.
- BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, p. 389-407, 2008.
- BICUDO, I. **Os elementos**. Ed. Unesp. 2009.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 4 ed. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

CARNOY, M.; ARENDS, F. Explaining mathematics achievement gains in Botswana and South Africa. *Prospects*. [S.l.]: **Springer Netherlands**, 2012. v. 42 (4). p. 453–468.

CARRILLO, J. et al. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, [S.l.], p. 19, 2018.

DE VILLIERS, M. To teach definitions in geometry or to teach to define? In A. Olivier, & K. Newstead (Eds.), 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1998, Durban. **Anais...** v.. 2, p. 248-255, 1998.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. **Revista REVEMAT**. Florianópolis, v. 07, n. 1, p. 118-138, 2012.

FREUDENTHAL, Hans. **Revisiting mathematics education: China Lectures**. London: Kluwer Academic Publisher, 1973.

JAKOBSEN, A., RIBEIRO, M., MELLONE, M. Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. **Nordic Studies in Mathematics Education**, v.19, P. 135–150, 2014.

LORENZATO, S. Porque não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**. Blumenau: SBEM, Ano III, n. 4, 1995.

RIBEIRO, M.; CARRILLO, J.; MONTEIRO, R. Cognitiones e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, v. 15, n. 1, p. 93-121, 2012.

RIBEIRO, M. Tareas para alumnos y tareas para la formación: discutiendo el conocimiento especializado del profesor y del formador de profesores de matemáticas. **XX Jornadas Nacionales de Educación Matemática**, p. 1-9, 2016.

ROCKOFF, J. E. *et al.* Can You Recognize an Effective Teacher When You Recruit One? **Education Finance and Policy**, v. 6(1), p. 43–74, 2008.

SHULMAN, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 4, p. 4–14, 1986.

TALL, D. O.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991, p. 3 – 21.

TURNER, F.; ROWLAND, T. The knowledge quartet as an organising framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge. In: ROWLAND, T.; RUTHVEN, K. **Mathematical knowledge in teaching**. Netherlands: Springer, 2011, p. 195-212.

VASCONCELLOS, M. A diferenciação entre figuras geométricas não-planas e planas: o conhecimento dos alunos das séries iniciais do ensino fundamental e o ponto de vista dos professores. **Zetetike**, v. 16, n. 2, p.77-106, 2008.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht, Springer, p. 65-81, 2002.