SALA DE AULA INVERTIDA: UMA PROPOSTA PARA O ESTUDO DA FORMA TRIGONOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

João Anderson Mendes[1]

GD 6 – Educação Matemática, Tecnologias e Educação à Distância

Resumo: Este artigo apresenta dados de dissertação de mestrado, em desenvolvimento, cujo objetivo é investigar os resultados de uma sequência didática no ensino médio, utilizando a metodologia Sala de Aula Invertida (SAI), o conteúdo matemático dessa sequência é a forma trigonométrica dos números complexos. Serão analisados os efeitos da mudança de postura dos alunos no processo de ensino em relação ao desenvolvimento de sua autonomia. São apresentados nesse artigo a análise a priori da sequência, discussões na sala de aula durante a resolução e resultados. Utilizou-se um vídeo com a indicação de estudo de três conceitos: plano de Argand-Gauss, módulo e argumento de um número complexo. Além do estudo em casa dos três conceitos citados no vídeo, os alunos responderam um questionário sobre seus métodos de estudo e fizeram uma lista de exercícios sobre os assuntos estudados. Foi feita então uma discussão/validação das informações trazidas e apresentada a forma trigonométrica dos números complexos. O referencial teórico utilizado na pesquisa é baseado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. Os resultados permitiram perceber concepções equivocadas que os alunos têm as quais, provavelmente, não seriam percebidas pelo professor com uma metodologia de aula tradicional. Pode-se perceber que os alunos agiram com autonomia durante o estudo sem que o professor interviesse durante a aquisição de um novo conceito.

Palavras-chave: Sala de Aula Invertida. Ensino Médio. Forma Trigonométrica de um Número Complexo.

INTRODUÇÃO

O modelo de educação que a maioria das escolas básicas e as universidades ainda adota no Brasil é baseado no modelo industrial do início do século XX introduzido nos Estados Unidos: alunos sentados em fileiras, divididos por idade em séries, recebendo informações de uma pessoa - o professor -, "única" detentora e transmissora do conhecimento. Acredita-se que nesse modelo de educação em massa, todos conseguem aprender no mesmo ritmo e da mesma forma. Segundo Valente (2014),

> A postura de transmissor de informação, do ponto de vista comunicacional, é baseada no conceito de emissor-receptor, que foi amplamente utilizado nos meios de comunicação de massa. Nesse caso, o receptor era visto como um vaso que deveria ser preenchido e tudo que viesse do emissor deveria ser aceito pelo receptor. A educação, e especialmente o professor, tinha esse papel de depositário da informação no aluno. (VALENTE, 2014, p. 142).

[1] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP; Programa de estudos pós-graduados em educação matemática; prof.mat.joao@gmail.com; orientadora: Sonia Barbosa Camargo Igliori.

Segundo Horn e Staker (2015), esse modelo de educação foi bem-sucedido para o começo do século XX, em que menos de um quinto dos empregos requeriam trabalhadores intelectuais (estrategistas, coordenadores, manipuladores e coletores de dados etc), mas é incompatível com o mundo atual, no qual mais de três quintos dos empregos requerem trabalhadores intelectuais.

Nos últimos tempos, o chamado ensino híbrido ganhou mais destaque por propor a conciliação entre as tecnologias digitais e uma postura mais ativa dos alunos. Segundo Christensen, Horn e Staker (2013),

> Em muitas escolas, o ensino híbrido está emergindo como uma inovação sustentada em relação à sala de aula tradicional. Esta forma híbrida é uma tentativa de oferecer "o melhor de dois mundos" — isto é, as vantagens da educação online combinadas com todos os benefícios da sala de aula tradicional. Por outro lado, outros modelos de ensino híbrido parecem ser disruptivos em relação às salas de aula tradicionais. Eles não incluem a sala de aula tradicional em sua forma plena; eles frequentemente têm seu início entre não-consumidores; eles oferecem benefícios de acordo com uma nova definição do que é bom; e eles tendem a ser mais difíceis para adotar e operar. Nos termos da recém-criada nomenclatura do ensino híbrido, os modelos de Rotação por Estações, Laboratório Rotacional e Sala de Aula Invertida seguem o modelo de inovações híbridas sustentadas. Eles incorporam as principais características tanto da sala de aula tradicional quanto do ensino online. Os modelos Flex, A La Carte, Virtual Enriquecido e de Rotação Individual, por outro lado, estão se desenvolvendo de modo mais disruptivo em relação ao sistema tradicional. (CHRISTENSEN; HORN; STAKER, 2013, p. 3).

Dentre os modelos de ensino híbrido, a chamada Sala de Aula Invertida (SAI) propõe que o aluno entre em contato com a teoria antes da aula presencial. No modelo tradicional, o professor geralmente usa o tempo da aula para apresentar a teoria e deixa como tarefa de casa para os alunos a resolução de exercícios. No modelo Sala de Aula Invertida, o professor prepara e disponibiliza/indica para os alunos materiais que versem sobre o conteúdo a ser estudado para a próxima aula, de modo que cabe aos alunos estudarem tais conteúdos antes da próxima aula presencial. Isso acarreta em um gerenciamento da aula presente diferente, pois o professor explora os conceitos trazidos pelos alunos em seus estudos, gerando uma discussão com toda a sala. Atividades em grupo podem gerar trocas de conhecimentos de diferentes formas, uma vez que os alunos podem ter procurado fontes diferentes para seu estudo.

Os professores Bergmann e Sams, "precursores" da SAI, ficaram conhecidos por gravar suas aulas de química e disponibilizá-las para seus alunos. Num primeiro momento essa atitude era direcionada apernas para os alunos que precisavam ficar um período longo sem poder frequentar a escola, como por exemplo alunos que participavam de competições. Uma vez que os vídeos estavam disponibilizados na internet, alunos que frequentavam as aulas regularmente também começaram a assistir as vídeo-aulas. Foi então que Bergmann e Sams decidiram solicitar como lição de casa a todos os alunos que assistissem aos vídeos e trouxessem dúvidas para a aula presencial.

No processo de ensino usando a metodologia SAI, a gestão do tempo destinado a teoria e atividades em aula muda. A SAI requer uma participação mais ativa, permitindo assim que o aluno exerça o papel de sujeito no processo de sua própria aprendizagem. Para os professores Bergmann e Sams (2016), as interações entre professor e alunos são intensificadas na metodologia da SAI.

A aula agora é mais centrada nos alunos, em que os mesmos têm o compromisso de fazer as atividades extraclasse para que consigam acompanhar bem as discussões na aula presencial. O principal papel do professor agora é o de esclarecer as dúvidas e corrigir os erros, pois agora sua função em sala de aula é ampará-los e não mais transmitir informações (BERGMANN; SAMS, 2017).

APLICAÇÃO DA SAI

Essa aplicação foi feita em uma escola particular da cidade de São Paulo. Trata-se de uma escola de classe média alta em que todos os alunos têm acesso à internet. A pesquisa foi feita com 151 alunos da terceira série do ensino médio, na qual o autor deste artigo leciona.

ANÁLISE A PRIORI

Antes da aplicação dessa atividade, os alunos estudaram no começo do ano a forma algébrica de um número complexo. Estudaram também Geometria Analítica, Polinômios e Equações Polinomiais.

Preparação do vídeo

O vídeo foi produzido pelo professor – no caso eu – com o intuito de informar, motivar e direcionar os estudos dos alunos. Ele começa com um resumo histórico dos mais de 300 anos do desenvolvimento da teoria dos números complexos. O objetivo de relatar brevemente essa parte da história, é que os alunos percebam que as teorias que estudam hoje – por mais que seja brevemente – foram foco de estudo por muito tempo de grandes matemáticos. Na sequência do vídeo chamo a atenção para o trabalho de Gauss que ficou conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra. Ao destacar a definição do teorema, espero que os alunos se atentem pois irei chamar a atenção para esse teorema um pouco mais a frente no vídeo.

Como os alunos já estudaram a parte de representação algébrica de números complexos, na sequência do vídeo é resolvida a equação de segundo grau $x^2 - 2x + 2 = 0$ considerando o conjunto dos números complexos, que durante a resolução resulta na raiz quadrada de –4. Espero que ao apresentar essa resolução, os alunos percebam que como já conhecem o conjunto dos números complexos e agora o Teorema Fundamental da Álgebra, as teorias vão se complementando.

A partir daqui eu lanço uma questão: “mas e equações como $x^6 = 1$?”. Os objetivos para a escolha dessa equação polinomial de grau seis são: 1) para que os alunos associem o Teorema Fundamental da Álgebra com o grau da equação, ou seja, que concluam que deve haver seis soluções; 2) analisando com um pouco de calma e testando valores, essa equação tem duas soluções que os alunos conseguem determinar; 3) as demais raízes não reais dessa equação possuem argumentos notáveis (futuramente, após os alunos aprenderem como representar números complexos na forma trigonométrica, essa equação será retomada e será discutido como chegar nas seis soluções dessa equação).

Após questionar no vídeo como ficam as soluções da equação $x^6 = 1$, apresento duas soluções: $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$. Depois lanço uma questão: “mas e as outras quatro soluções $x_3,\ x_4,\ x_5\ e\ x_6$?”. Essa pergunta tem por objetivo mostrar ao aluno que ele não sabe a teoria necessária para determinar as outras raízes e, instigar a curiosidade, pois há seis números que elevados a sexta potência resultam em 1.

Na sequência do vídeo, comento que conhecendo um pouco mais sobre números complexos é possível determinar as outras quatro soluções da equação $x^6 = 1$ e as apresento:

$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $x_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. O esperado com a apresentação dessas soluções nesse momento é que os alunos percebam que: 1) as demais raízes da equação estão no campo dos números complexos; 2) necessitam aprender qual a teoria necessária para determinar tais soluções.

Em seguida digo no vídeo que para que possamos entender como determinar tais soluções, precisamos aprender três conceitos sobre os números complexos: 1) Como representar números no plano de Argand-Gauss; 2) Como calcular o módulo de um número complexo; 3) Como calcular o argumento de um número complexo. A indicação direta aqui dos conteúdos a serem estudados é importante pois os alunos precisam saber o que devem pesquisar para estudar. O vídeo acaba aqui e o esperado a partir de agora é que os alunos pesquisem os três conceitos citados em livros, sites, vídeos, com parentes etc.

Preparação do questionário

No começo da aula seguinte, após os alunos pesquisarem e estudarem sobre os três conceitos citados no vídeo, os mesmos responderão a um questionário com o intuito de obter as seguintes informações: 1) quem pesquisou e estudou os conceitos; 2) quem estudou, estudou por qual meio (livros, internet, parentes, colegas, etc). Espero que com essas informações consiga entender principalmente qual o meio preferido de estudos dos alunos. Acredito que essas informações tracem um perfil de alunos que preferem estudar usando mais a internet – especialmente vídeos – do que textos.

Preparação da atividade de controle

Após responderem o questionário, os alunos irão receber uma ficha com exercícios sobre representação de números complexos no plano de Argand-Gauss, cálculo do módulo e argumento de números complexos. Eles irão responder os exercícios dessa ficha individualmente. Após um determinado tempo irei recolher essas fichas e analisa-las. O objetivo aqui é verificar se os alunos conseguem aplicar os conhecimentos que obtiveram com seus estudos sozinhos.

Durante a aplicação dessa atividade, haverá provavelmente dois grupos de alunos: os que pesquisaram e estudaram, e os que não pesquisaram e estudaram. Enquanto os alunos que pesquisaram e estudaram resolvem os exercícios da ficha, os que não pesquisaram e estudaram devem estudar nesse momento utilizando o material de revisão adotado na escola. O material de revisão conta com um resumo teórico dos conteúdos e uma série de exercícios de vestibulares. Acredito que esses alunos não irão terminar as atividades da ficha no mesmo tempo que os que pesquisaram e estudaram.

Discussão/Validação dos conteúdos pesquisados e estudados

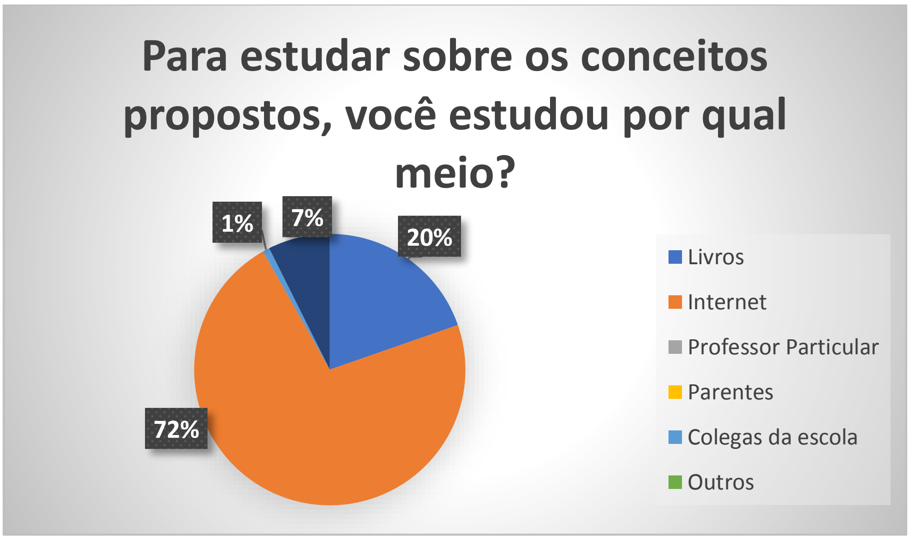
Depois de entregarem a atividade de controle, o professor – eu no caso – vai discutir com a classe os conteúdos que eles pesquisaram e estudaram. O esperado para esse momento é analisar se os alunos sabem, não só como calcula o módulo e o argumento de um número complexo, mas sim, o que representa essas informações. Espero também que os alunos participem trazendo contribuições com base no que estudaram. Acredito que os alunos irão perceber que a fórmula para calcular o módulo de um número complexo é apenas a distância de ponto a ponto que eles já estudaram em Geometria Analítica. Acredito que essa validação dos conceitos é importante para que os alunos que pesquisaram e estudaram se sintam mais seguros e para os que não pesquisaram e estudaram tenham a chance de entender a matéria.

RESULTADOS APÓS A APLICAÇÃO

Dos 151 alunos envolvidos na pesquisa 105 declararam que pesquisaram e estudaram os conteúdos propostos. Os demais alunos estudaram os conceitos propostos em casa, começaram a estudar os conceitos em sala utilizando o material de revisão adotado pelo colégio.

Do grupo de alunos que pesquisaram e estudaram em casa os conceitos propostos, 72% estudou pesquisando os conceitos na internet, como mostra a Figura 1.

Figura 1: Distribuição dos meios de estudos

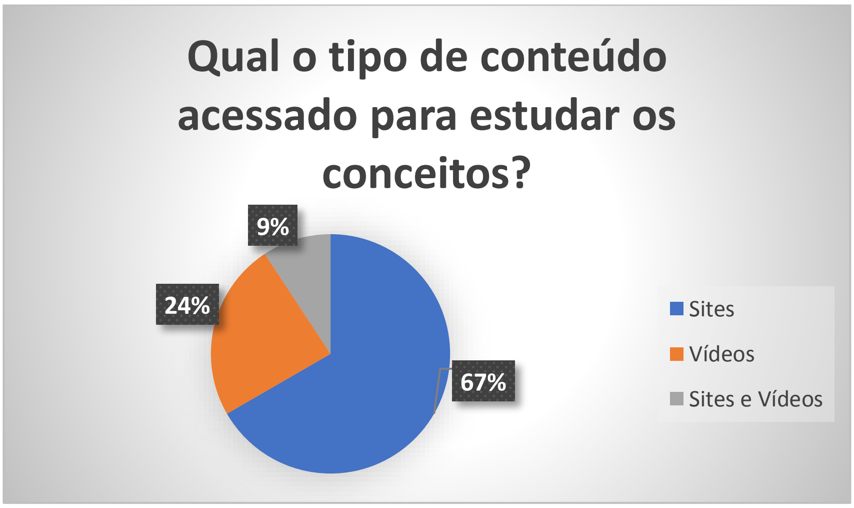


Fonte: Dados da pesquisa

Dos 24 alunos que optaram por estudar por livros, apenas 4 consultaram um livro didático do ensino médio. Os demais utilizaram o material de revisão adotado pela escola.

Dentre os que optaram por estudar pela internet, a maioria optou por sites, como mostra a Figura 2.

Figura 2: Distribuição dos meios de estudos via internet



Fonte: Dados da pesquisa

Esse dado foi uma surpresa pois acreditava que a maioria dos alunos que utilizasse a internet para estudar, estudaria por vídeos. Os alunos também indicaram os sites/vídeos que acessaram para estudar e foi constatado que 41 dos alunos acessaram o mesmo site. Isso provavelmente aconteceu porque ao buscar "números complexos no plano de Argand-Gauss" no Google, o primeiro site que aparece é o que a maioria dos alunos acessou. É um site que traz os conceitos sobre números complexos e alguns exemplos.

Durante o período que os alunos ficaram resolvendo os exercícios da lista, o professor ficou circulando e analisando as dúvidas que apareciam.

No exercício que os alunos deveriam representar alguns números complexos dados na forma algébrica no plano de Argand-Gauss, foi dado o plano mas não foi anotado quais os nomes dos eixos. Isso foi proposital para ver o que os alunos anotariam. Um aluno fez a seguinte questão:

Aluno 1: Aqui no plano eu nomeio os eixos como?

Professor: Você pesquisou isso? Você lembra?

Aluno 1: Eu achei duas representações: Real de z e imaginário de z ou "a" aqui (apontando para o eixo horizontal) e "b" aqui (apontando para o eixo vertical).

Professor: Então, o mais usual é colocar "Re" nesse eixo (apontando para o eixo horizontal) que representa a parte real e "Im" nesse eixo (apontando para o eixo vertical) que representa a parte imaginária. Porque o número complexo pode ter outro "nome" que não seja z e cujas partes real e imaginária não sejam "a" e "b". Entendeu?

Aluno 1: Entendi.

Professor: Você lembra de onde você tirou essa informação?

Aluno 1: Está no livro.

A preocupação do aluno é válida pois a nomenclatura dos eixos serve para a representação correta do plano. Ao consultar o livro, de fato os eixos estão representados com Re(z) e Im(z). A confusão gerada para alguns dos estudantes pode ter sido pelo fato do professor não ter usado essa indicação para a parte real e imaginária, nas aulas.

Um outro diálogo está descrito a seguir. O exercício solicitava o cálculo do argumento do número complexo $w = -2 + 2i\sqrt{3}$.

Aluno 2: Como eu sei se o ângulo é esse ou esse? (apontando para os valores 300° e 120°).

Ao analisar o que o aluno fez, foi constatado que o mesmo fez apenas o cálculo da tangente do argumento.

Professor: Você calculou a tangente e agora está na dúvida entre esses dois valores?

Aluno 2: Isso.

Professor: Você estudou?

Aluno 2: Sim.

Professor: Quando você estudou, ele pedia para calcular a tangente?

Aluno 2: Não, mas eu assumi que podia. Lá ele calculava seno e cosseno.

Professor: Você assumiu que pode fazer pela tangente.

Aluno 2: É.

Professor: Tudo bem, mas agora você está numa dúvida.

Aluno 2: Então não pode? Porque dá o maior trabalho calcular o módulo e depois o seno e cosseno.

Professor: Entendi. Mas você chegou que a tangente é $-\sqrt{3}$ e percebeu que tem duas opções...

Aluno 2: Você pode ver como que ficaria no plano!

Professor: Você está juntando duas informações então. Uma é que a tangente deu $-\sqrt{3}$. Outra é que o número $-2+2i\sqrt{3}$...onde ele está no plano (professor aponta para os quadrantes)?

Aluno 2: Ele está no segundo quadrante.

Professor: Então se ele está no segundo quadrante e a tangente é $-\sqrt{3}$, então...

Aluno 2: Entendi. Então está certo fazer pela tangente?

Professor: Está certo, mas só o valor da tangente não é suficiente. Por que lá ele fazia seno e cosseno? E não só o seno ou só o cosseno?

Aluno 2: Para você saber onde está.

O aluno em questão lembrou que a tangente resultando em é $-\sqrt{3}$ possui duas soluções na primeira volta do ciclo trigonométrico. Como optou por analisar apenas a tangente, ficou com dúvida sobre qual valor seria o correto. O aluno em questão estudou por um site. Ao analisar o site, a teoria apresentava o cálculo do argumento usando seno e cosseno, mas no exemplo dado no site, era calculado o seno, cosseno e a tangente. Como para o cálculo da tangente não é necessário calcular o módulo, o aluno optou por determinar apenas a tangente. Essa concepção equivocada do aluno mostra que o mesmo optou pelo que seria mais "fácil", mas não se deu conta de que não era o suficiente para determinar a solução da questão.

Depois de cerca de 30 minutos, a ficha foi recolhida, e o professor enalteceu a diferença dessa metodologia para a tradicional. Ressaltou que esse processo de saber apenas o que você precisa aprender e ter que "se virar" para aprender, simula bem o que acontece na vida de um modo geral. Quase nunca temos alguém – um professor – que nos explique minuciosamente o que precisamos aprender.

Na sequência o professor retomou os três conceitos citados pedindo a participação dos alunos. Nesse momento foi perguntado aos alunos "o que representa o módulo de um número complexo?". Em todas as quatro turmas sempre tinha alunos que diziam que o módulo representa a distância do ponto até a origem. Esse é um momento importante, pois alguns alunos podem simplesmente ter estudado a fórmula para o cálculo, mas não sabem o que estão calculando. Durante esse momento também foi perguntado aos alunos "qual era o nome do ponto que representa o número complexo no plano?". Em todas as turmas tinha pelo menos um aluno que respondeu corretamente: afixo.

Após retomar os três conceitos na lousa, o professor perguntou: "Quais informações você precisa saber para representar o afixo de um número complexo sem conhecer sua parte real e imaginária?". Em todas as turmas teve alunos que disseram que era necessário conhecer o módulo e o argumento. Após essas discussões, foi demonstrada a forma trigonométrica de um número complexo. Foi dado como lição de casa alguns exercícios do livro didático do 3° ano para a próxima aula. Os exercícios basicamente são para mudar os tipos de representação: da algébrica para a trigonométrica e vice-versa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As mudanças de metodologias são opções para tentar que os alunos tenham uma postura mais ativa no processo de ensino. Segundo Moran (2015),

> As metodologias precisam acompanhar os objetivos pretendidos. Se queremos que os alunos sejam proativos, precisamos adotar metodologias em que os alunos se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que tenham que tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes. Se queremos que sejam criativos, eles precisam experimentar inúmeras novas possibilidades de mostrar sua iniciativa (MORAN, 2015, p. 17)

Com a metodologia de SAI, foi possível observar que o aluno tem mais controle sobre sua aprendizagem. O aluno tem a liberdade de pesquisar mais e em outras fontes os conteúdos a serem estudados, não ficando restrito apenas a explicação do professor. O uso de maneira eficiente da internet permite acesso a uma infinidade de explicações e exemplos que o aluno vai selecionando qual(ais) faz(em) mais sentido para ele.

A mudança na metodologia possibilitou observar também concepções equivocadas dos alunos que provavelmente não seriam percebidas numa aula tradicional, como no caso descrito do aluno 2. Numa aula tradicional o aluno possivelmente não teria espaço para essa dúvida, pois o professor passaria o "roteiro" de como determinar o argumento de um número complexo, ou seja, analisando o seno e o cosseno, e o aluno provavelmente apenas replicaria tal "roteiro" e não questiona outros modos de fazer.

A dúvida do aluno 2 mostrou também como o conhecimento dos tipos de representações, bem como o tratamento e a conversão, são muito importantes para o entendimento dos números complexos. Para Duval, o fato de um aluno conhecer diversas representações de um ente matemático, sabendo transitar entre elas e como tratar cada uma no seu campo de representação, favorece no entendimento e na exteriorização do objeto matemático em estudo. Sobre essa coordenação, Duval afirma que

> Naturalmente, a ausência de coordenação não impede toda compreensão. Mas esta compreensão, limitada ao contexto semiótico de um registro apenas, não favorece em nada as transferências e as aprendizagens ulteriores: torna os conhecimentos adquiridos pouco ou não utilizáveis em outras situações onde deveriam realmente ser utilizados. Em definitivo, esta compreensão mono registro conduz a um trabalho às cegas, sem possibilidade de controle do "sentido" daquilo que é feito. (DUVAL, 1993, p. 283)

A aplicação mostrou ainda que o fato do aluno buscar informações antes da sistematização em aula, favorecem a discussão e a participação dele em sua aprendizagem.

REFERÊNCIAS

BERGMANN, J.; SAMS, A. **Sala de aula invertida**: uma metodologia ativa de aprendizagem. Tradução de Afonso Celso da Cunha Serra. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

CHRISTENSEN, C. M.; HORN, M. B.; STAKER, H. **Ensino Híbrido:** uma Inovação Disruptiva? Uma introdução à teoria dos híbridos. CLAYTON CHRISTENSEN INSTITUTE [Tradução: Fundação Lemann e Instituto Península]. Pp. 1-52. Disponível em: <https://www.pucpr.br/wp-content/uploads/2017/10/ensino-hibrido_uma-inovacao-disruptiva.pdf>. Acesso em 15 mar. 2019.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat**: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v.7, n. 2, p. 266-297, 2012. Trad. Méricles Thadeu Moretti.

HORN, M. B.; STAKER, H. Blended: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Tradução: Maria Cristina Gularte Monteiro; revisão técnica: Adolfo Tanzi Neto, Lilian Bacich. Porto Alegre: Penso, p. 6, 2015.

MORAN, J. M. Mudando a educação com metodologias ativas. In: SOUZA, C. A.; TORRES-MORALES, O. E. (Org.). **Convergências midiáticas, educação e cidadania:** aproximações jovens. Ponta Grossa: UEPG, 2015. (Mídias Contemporâneas, v. 2). p. 15-33. Disponível em: <http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2013/12/mudando_moran.pdf>. Acesso em 15 mar. 2019.

VALENTE, J. A. A comunicação e a educação baseada no uso das tecnologias digitais de informação e comunicação. **Revista UNIFESO** – Humanas e Sociais, vol. 1, n. 1, p. 141-166, 2014. Disponível em: <http://unifeso.edu.br/revista/index.php/revistaunifesohumanasesociais/article/download/17/24>. Acesso em 15 jan. 2019.