DEMONSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS POR MEIO DE EXPERIMENTAÇÕES

Carlos Eduardo Ladeira Vidigal[1]

GD2 – Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Resumo: A proposta que se apresenta retrata os fundamentos de um trabalho em fase inicial no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) cujo objetivo principal é trabalhar as demonstrações matemáticas com foco nos conteúdos de Geometria Euclidiana da Educação Básica. A ideia é dar um tratamento as demonstrações euclidianas com um pouco menos de formalidade, de tal forma que estejam inseridas no contexto do Ensino Fundamental para alunos dos 8º e 9º anos. Espera-se que, com as possibilidades apresentadas de se trabalhar as demonstrações, os alunos compreendam a importância do papel de inferir, conjecturar, validar ou refutar, abstrair e generalizar proposições em Matemática, dando subsídios para argumentações que ajudem na redação de justificativas matemáticas utilizadas na resolução de problemas geométricos. Para isso, as demonstrações serão desenvolvidas buscando estratégias diferenciadas como, por exemplo, o uso de experimentações com o auxílio do aplicativo *GeoGebra*, de tal forma que possa contribuir na promoção de uma aprendizagem mais criativa e significativa.
Palavras-chave: Geometria Euclidiana. Demonstrações. Ensino de Geometria.

INTRODUÇÃO

No contexto da prática profissional, não é incomum que alguns professores de Matemática terminem o ano letivo de forma que parte da proposta curricular tenha sido deixada para trás, seja por motivo da própria estruturação da grade, da formação do professor, entre outros motivos. Em geral, a parte referente à Geometria é a mais afetada.

É notório que o ensino de Geometria na escola básica tem papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, mas, muitas vezes, é deixado de lado em favor do ensino da Álgebra. Segundo GAZIRE (2000), o movimento da Matemática Moderna tem sua parcela de contribuição no caos que se instaurou no ensino da Geometria, uma vez que a proposta de algebrizar a Geometria não se manteve criando uma lacuna, principalmente, nas práticas pedagógicas.

Além disso, na maioria das vezes em que é ofertada, a Geometria escolar, baseada na Geometria Euclidiana, é apresentada de maneira sucinta e superficial, com foco em processos lógico-dedutivos formais que, em geral, levam a resolução de problemas algébricos. Por outro lado, muitas pesquisas retratam a importância de promover a

CEFETMG; Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional; carlos.vidigal@outlook.com; Orientadora: Fernanda Aparecida Ferreira

descoberta "Matemática" em sala de aula por outros meios criativos, nas quais os alunos possam inferir, conjecturar, validar e refutar, abstrair e generalizar proposições.

Permitir que os alunos vivenciem um momento criativo é fundamental no ensino e na aprendizagem, uma vez que aproxima o estudante da verdadeira criação da Matemática enquanto ciência. Dessa forma, contribuímos para despertar nos alunos o seu lado questionador, crítico e investigativo.

Nesse contexto de importância do ensino de Geometria na Educação Básica julgamos que ferramentas tecnológicas possam ser grandes aliadas aos processos de ensino e de aprendizagem que tenha por finalidade facilitar experimentações no ambiente de sala de aula. Destacamos, também, o potencial para se trabalhar com práticas pedagógicas diferenciadas e criativas, o que permite ao aluno interagir com conceitos matemáticos, propiciando a descoberta, inferindo resultados, levantando e testando hipóteses, permitindo verificar a veracidade (ou não) de determinada proposição. Dentre várias ferramentas disponíveis, o aplicativo *GeoGebra* tem se mostrado um grande aliado, oferecendo ao aluno um ambiente no qual ele pode vivenciar o "fazer" Matemática.

No âmbito da Geometria escolar, as demonstrações são pouco trabalhadas sendo o foco a Geometria Métrica. Talvez essa restrição esteja relacionada às dificuldades dos alunos com a Matemática formal suscitando algumas indagações:

Quais são as principais dificuldades que os estudantes (e professores) enfrentam em relação às demonstrações?

Qual pode ser a origem de tais dificuldades?

Que tipo de intervenções podem ser realizadas de forma a superar as dificuldades que os estudantes e os professores encontram em relação às argumentações e demonstrações matemáticas?

Sem a pretensão de buscar respostas taxativas para essas indagações, apresentamos, nesse artigo, uma proposta de trabalho que tem por objetivo tratar algumas demonstrações geométricas clássicas, a nível Fundamental II, por meio de experimentações matemáticas que contribuam para que o aluno tenha contato com outras "formas de provar", favorecendo a elaborações de argumentos matemáticos válidos, facilitando a compreensão das demonstrações formais.

DEMONSTRAÇÕES EM GEOMETRIA

Incialmente, o conhecimento geométrico foi obtido por meio de induçãode um grande número de observações e experimentos realizados por nossos antepassados. No entanto, à medida que os fatos geométricos se acumularam, ficou evidente que muitos deles podiam ser obtidos a partir de outros fatosde raciocínio, e por dedução, fazendo de alguns experimentos, algo desnecessário. (EVES, 1992)

Foram os gregos que insistiram que os fatos geométricos deviam ser estabelecidos por raciocínios dedutivos o que levou a uma transformação de uma Geometria empírica para uma geométrica "sistemática" ou demonstrativa. (EVES, 1992)

Então, podemos nos perguntar: o que é uma demonstração? Suponha que você esteja tentando convencer um amigo de certa observação que você fez e tem certeza de que ela está correta. Cada uma das afirmações que você fez para convencer seu amigo é um argumento. Porém, cada argumento deve ser convincente baseado em fatos do nosso cotidiano, propriedades dos objetos ao nosso redor ou até experiências já comprovadas por outros.

O estabelecimento de conclusões gerais a partir da observação de inúmeros casos específicos é denominado indução. Mas quando estamos cientes de algumas leis gerais e queremos aplicar esse conhecimento a casos específicos, este processo é denominado dedução.

Em Matemática, uma demonstração é um processo pelo qual, partindo exclusivamente de definições, conceitos primitivos e postulados, comprova-se a veracidade de uma afirmação por meio de uma sequência lógica válida. (GARBI, 2010)

Em uma demonstração matemática, busca-se argumentos para provar alguma proposição com base na experiência, nas observações, nos fatos e nas proposições estabelecidas que já foram comprovadas. Com base em resultados assim obtidos, chega-se a uma conclusão sobre a validade, ou falsidade, da proposição que está sendo provada.

Observações e experiências podem nos convencer que *uma e apenas uma linha reta passa por quaisquer dois pontos*[2]. Uma consequência dessa afirmação é o fato que *duas linhas retas diferentes podem não ter mais do que um ponto em comum*.

Um raciocínio simples nos permite argumentar sobre essa afirmação a fim de comprová-la sem muitas observações e experiências. De fato, quando se assume que duas

[2] Axioma de Incidência (BARBOSA, 1997, p.1)

linhas retas diferentes possuem dois pontos em comum, conclui-se que duas retas diferentes podem passar por dois pontos, e isso contradiz a afirmação já conhecida anteriormente[3].

No percurso da humanidade, um grande número de propriedades geométricas que refletem o conhecimento fora sendo estabelecidos. Com a evolução, estudos mais cuidadosos destas propriedades mostraram que algumas delas podiam ser obtidas das anteriores como conclusões lógicas. Isso levou à ideia de que se podia escolher dentre os fatos geométricos um subconjunto com alguns fatos mais simples e gerais que poderiam ser aceitos sem demonstrações. Tais fatos, denominados axiomas (do grego *áksios*: digno, confiável), seriam então usados para deduzir o resto das propriedades geométricas. (GARBI, 2010)

Assim, os geômetras da Grécia antiga começaram a sistematizar fatos geométricos conhecidos por eles deduzindo-os de poucas proposições fundamentais. E foi Euclides[4] que, cerca de 300 anos antes de Cristo, fez o mais completo tratado de Geometria do seu tempo, *Os Elementos*, que incluiu um seleto grupo de proposições que foram aceitas sem provas, os chamados axiomas.

> Em "Os Elementos", Euclides parte de três princípios: as definições, os postulados e as noções comuns (axiomas) – herança da lógica de Aristóteles. Utilizando-se desses princípios, Euclides coloca em funcionamento a "máquina dedutiva" para, a partir do rigor lógico, "descobrir" as verdades matemáticas, mediante as demonstrações. É fato que as noções comuns (axiomas) eram baseadas na autoevidência e na experiência, o que vai de acordo com a concepção aristotélica de que as noções comuns são percebidas por meio da intuição. Logo, o empreendimento de Euclides é um todo racional, baseado em evidências empíricas. (FERREIRA, 2016, p. 46)

É importante destacar que a obra de Euclides se perpetuou por vários séculos como a metodologia a ser seguida no "fazer" matemática. Seu grande empreendimento de sistematização do conhecimento matemático em bases lógico-dialéticas em que, partindo de verdades evidentes e, prosseguindo por meio de demonstrações rigorosas (o rigor está associado ao uso das inferências lógicas), chegava-se a um conhecimento certo, objetivo e eterno, parece

[3] Método de demonstração que consiste em reduzir um raciocínio ao absurdo, baseado no fato de que uma proposição não pode ser verdadeira se dela deduzimos uma contradição. (MEDEIROS, 2010).

[4] "Euclides de Alexandria (séc. III a.C.) esteve dentre os estudiosos que foram convidados para trabalhar no Museu de Alexandria. Pelas evidências que temos, não há descobertas matemáticas atribuídas a Euclides, mas sua contribuição foi muito relevante âmbito da compilação e da sistematização do conhecimento matemático pela originalidade em seu trabalho, tanto na forma de exposição quanto na estrutura das demonstrações." (MOL, 2013, p.46)

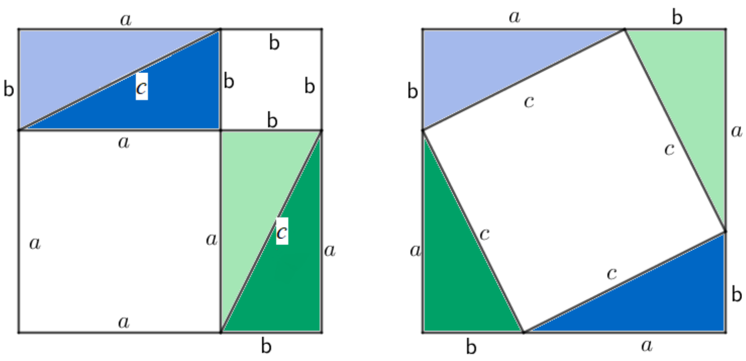
não ter sido questionado pela comunidade Matemática, que até meados do século XIX, seguia o método axiomático-dedutivo de Euclides como método. (FERREIRA, 2016)

É necessário demonstrar?

Aristóteles foi o criador da Lógica, que é o estudo sistemático das inferências, suas leis, as que são válidas e as que não são. (GARBI, 2010). E a demonstração decorre de uma das leis fundamentais da lógica: a lei da razão suficiente que inclui a exigência que todas as declarações feitas devem ser acompanhadas de argumentos capazes de confirmar a verdade de nossa afirmação, atestando sua conformidade com a realidade. A prova de uma proposição geométrica visa estabelecer sua validade por meio de dedução lógica de fatos conhecidos anteriormente.

Matemáticos na Idade Média representavam as proposições geométricas com desenhos expressivos, mas não demonstraram tais proposições usando a dedução lógica. Dessa maneira, a Figura 1, ilustrada abaixo, servia, naquela época, como demonstração para o que hoje conhecemos como Teorema de Pitágoras.

Figura 1: Ilustração do teorema de Pitágoras



Fonte: Autor (2019)

Alguém que observe a Figura 1, pode fazê-lo de forma que não pondere sobre seu significado geométrico e chegue à mesma conclusão que a soma das áreas dos quadrados a e b, representam a mesma área do quadrado c.

Assim, mesmo que existam teoremas muito “óbvios”, uma ciência exata não pode aceitar essa condição pois o conceito de óbvio é individualizado: o que uma pessoa aceita como óbvio, pode gerar muita dúvida em outra.

Aqui destacamos o papel desempenhado pela figura na demonstração de um teorema geométrico. A figura acima é apenas um exemplo, apenas um caso específico de triângulos retângulos. Seria o teorema válido então para todos os triângulos desse tipo?

A necessidade de uma demonstração em Geometria está atrelada à necessidade de que determinada proposição possa ser utilizada para estabelecer propriedades especiais de determinados objetos geométricos. Utilizando-se da dedução lógica, ao realizar uma inferência correta e baseada em proposições iniciais corretas, podemos ter certeza de que a proposição que provamos é válida. Dessa forma, temos certeza que o Teorema de Pitágoras, é válido para qualquer triângulo retângulo.

As demonstrações alinham os fatos geométricos em um sistema de conhecimento científico que garante as conexões existentes entre um último teorema demonstrado e teoremas comprovados anteriormente aos axiomas considerados como fundamentais no desenvolvimento da Geometria Euclidiana.

Demonstrações no contexto da escola básica

BALACHEFF (1987) afirma que as demonstrações matemáticas como meio de validar o conhecimento podem e devem ser incorporadas ao ensino de acordo com cada nível de escolaridade. O autor também faz uma distinção entre “demonstração” e “prova” em termos de validação. Para o autor, podemos dizer que a Matemática desenvolve o primeiro, enquanto os professores de Matemática lidam apenas com o segundo. (BALACHEFF, 1987)

Para FOSSA (2009), uma prova para o ensino básico não é dar uma explicação explicitamente rigorosa para um fato matemático utilizando uma estrutura organizada com base em inferência de argumentos dedutivos. A prova em uma sala de aula desse nível é baseada em argumentos que têm como principal função convencer os alunos da validade de determinada proposição. Demonstrar não é um ato mecânico, mas sim um ato criativo. (FOSSA, 2009)

Além disso, LINDQUIST (1994) destaca que o declínio da Geometria Euclidiana escolar muito se deve às dificuldades conceituais causadas pelas argumentações lógicas que constituem a essência da Geometria Euclidiana. Sendo que a maioria das dificuldades que se observam nos alunos em sala de aula está relacionada com a maneira de organizarem o raciocínio e construírem argumentações lógicas. (LINDQUIST; SHULTE, 1994)

Porém, uma abordagem axiomática da Geometria é uma forma natural de decifrar as relações entre diferentes fatos e exibir a lógica estrutural, sendo o pensamento construtivo, guiado pela intuição, uma verdadeira fonte da dinâmica matemática trazendo elementos que a torna comparável à música e à arte. (COURANT; ROBBINS, 2000)

Para isso, julgamos que, em níveis fundamentais de ensino é preciso aceitar que uma prova pode só explicar e convencer, independentemente dos argumentos utilizados. Em ambientes formais de ensino, as provas matemáticas deveriam ser exploradas como um meio para se chegar às demonstrações formais da Matemática (ou quase). Dessa forma, muito da Geometria Euclidiana, área da Matemática na qual as demonstrações são mais comuns, teria mais sentido para os alunos e contribuiria para o desenvolvimento de um raciocínio que transitaria para a evolução de uma prova em demonstração.

Podemos constatar as observações feitas acima, com os resultados encontrados em uma pesquisa realizada por Ferreira (2016) em seu doutoramento. A autora fez um mapeamento sobre a produção internacional em Educação Matemática com o objetivo de compreender o que estava sendo discutido sobre a temática “Provas e Demonstrações Matemáticas”. Dentre as várias compreensões trazidas em seu trabalho, chamamos atenção especial para aqueles que tratam das provas e demonstrações no âmbito da Educação Básica.

Ferreira (2016) constatou em seu levantamento que as pesquisas voltadas para esse nível de escolaridade sugerem que é preciso explorar “novas possibilidades para tornar o ensino da prova matemática significativa e necessária para os alunos” (FERREIRA, 2016, p. 309). É necessário levar em conta, em situações de aprendizagem, que não existem provas melhores do que outras, apenas públicos diferentes, capazes de compreender, em determinados contextos (comunidades), os argumentos apresentados por um expositor (CHATEUBRIAND, 2005).

Ainda, de acordo com Ferreira (2016), seu trabalho indica que há uma necessidade de discutir o ensino das provas matemáticas desde a Educação Básica, levando em conta as diferentes funções que uma demonstração exerce. “A visão tradicional de que a única função da prova é a verificação de afirmações matemáticas parece ignorar o real papel da experimentação na Matemática.” (FERREIRA, 2016, p. 309). A referência primária a respeito da função “verificação” da prova em contexto escolar, em muitas pesquisas analisadas se apoiam nas ideias de De Villiers (2001).

> De acordo com De Villiers (2001), a demonstração tem as seguintes funcionalidades: (i) verificação (diz respeito à verdade de uma afirmação); (ii) explicação (fornece explicações do porquê certa afirmação ser verdadeira); (iii) sistematização (organiza os resultados/argumentos em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos primários e teoremas); (iv) descoberta (evidencia a descoberta ou invenção de novos resultados); (v) comunicação (transmite o conhecimento produzido); (vi) desafio intelectual (reflete a gratificação pessoal, resultante da construção de uma demonstração). (FERREIRA, 2016, p.310)

Para Ferreira (2016), as pesquisas que trazem alternativas para o ensino de provas na Educação Básica afirmam que um trabalho significativo deve levar em consideração as funções descritas acima, não apenas como características da prova matemática, mas também como funções das provas que emergem em situação de ensino, "promovendo, sempre que possível, uma relação entre essas formas de justificação, e a evolução das ações de verificação empírica para a exigência de uma prova rigorosa. " (FERREIRA, 2016, p. 310).

Ainda, é destacado que uma abordagem mais experimental para o ensino de demonstrações acaba por colocar em evidência essas funções, seja na elaboração de conjecturas, na verificação ou refutação de argumentos, na busca de alternativas para entender determinadas percepções e, até mesmo, na tentativa de comunicar as ações e os resultados empreendidos em uma atividade exploratória de prova.

Nesse sentido, julgamos que os aplicativos de Geometria dinâmica são excelentes suportes na medida em que permitem explorar novas formas de interação com objetos matemáticos com a possibilidade para fazer generalizações a partir de casos específicos.

As experimentações em aplicativos de Geometria dinâmica assumem uma posição comprobatória para aqueles que lidam com elas, levando à transformação de uma conjectura em prova e permitindo essa comprovação sem a necessidade de produzir justificativas com deduções, como nas chamadas demonstrações. Porém, um trabalho em sala de aula não deve ignorar a demonstração formal de uma constatação feita por meio do recurso tecnológico. Nesse momento, é importante que o aluno compreenda a necessidade de formalizar os seus resultados, por meio de uma demonstração mais rigorosa.

Nesse contexto do uso de aplicativos, as pesquisas mapeadas por Ferreira (2016) que focam em práticas de ensino com o uso de *Softwares* de Geometria Dinâmica (SGD) destacam as possibilidades exploratórias que o uso desse recurso permite aos estudantes. Um dos pontos destacados pela autora remete à contribuição dos SGD para que os alunos evoluam do nível empírico para o dedutivo, "já que as argumentações elaboradas nesses ambientes dinâmicos aos poucos vão se revelando, insuficientes, dada a quantidade de situações possíveis de serem exploradas, culminando assim, na necessidade de uma prova dedutiva para explicar as argumentações elaboradas. " (FERREIRA, 2016, p. 312)

Nos chamou atenção o fato que, dentre as pesquisas levantadas por Ferreira (2016), poucas se reportaram ao uso de SGD, mesmo sendo reconhecido o potencial do uso desses recursos no ensino de Matemática. Dentre esses trabalhos, destaca-se que a utilização desses recursos pode ser um mediador na transição entre a argumentação e a prova dedutiva, principalmente, pela utilização da função "arrastar".

> Notamos, nos trabalhos, que a função "arrastar" éconcebida numa perspectiva que abre novas "rotas" para o conhecimento teórico, por meio de um ambiente concreto com muito significado para os estudantes.
> A função "arrastar", aparentemente, permite a introdução "infinita" de exemplos e contraexemplos para apoiar ou refutar uma conjectura. Ademais, os estudantes, arrastando, costumam "passar" de figuras para conceitos, bem como de processos indutivos para dedutivos. As possibilidades exploratórias permitidas pela função "arrastar" podem ser vistas como uma contrapartida perceptível para relações lógicas e algébricas, uma vez que, ao "arrastar", os alunos estabelecem associações entre os objetos geométricos em níveis perceptível, lógico e algébrico. (FERREIRA, 2016, p. 313)

Diante o exposto, não há que questionar o papel das demonstrações para a Matemática e para o seu ensino. Contudo, a prática do "fazer" Matemática (enquanto ciência) não pode ser assumida como um único caminho para o "fazer" Matemática em contexto escolar.

Sendo as demonstrações matemáticas o caminho para se chegar a verdade em Matemática, há que se assumir, quando pensamos em ensino, que é possível chegar nas verdades por caminhos distintos, seja por meio de experimentações que permitem a elaboração de conjecturas, a comprovação ou refutação das mesmas, além de uma forma de comunicar os argumentos elaborados. Cabe o professor, encontrar formas para promover uma transição desses argumentos elaborados em sala de aula (provas) para as demonstrações matemática.

Um projeto em Construção

Como exposto no início desse texto, estamos em fase inicial de um trabalho que tem por objetivo trabalhar demonstrações matemáticas (geométricas) em nível fundamental de ensino, especificamente, nos 8º e 9º ano.

Nossas leituras sobre as demonstrações matemáticas, expostas nos tópicos que compõem esse artigo, nos levaram a elaborar um projeto de pesquisa que tem por fundamento a relevância das demonstrações geométricas para o ensino de Matemática e a importância de se trabalhar com métodos diferenciados que possibilitem ao aluno, a elaboração de argumentos e a verificação ou refutação desses.

Para tal, propomos a elaboração de uma sequência didática de atividades tendo como prerrogativa a experimentação matemática de algumas propriedades geométricas consideradas clássicas, como por exemplo o Teorema de Pitágoras e a soma dos ângulos internos de um triângulo.

São objetivos dessa sequência:

- Trabalhar conceitos geométricos destinados aos 8º e 9º anos do Ensino Fundamental II;

Apresentar o *GeoGebra* e utilizá-lo como instrumento mediador das atividades;

- Desenvolver atividades que levem o aluno a formular e verificar conjecturas recorrendo a experimentação;
- Contribuir para o desenvolvimento da argumentação matemática, essencial para o processo demonstrativo;
- Estimular a redação matemática de argumentos e demonstrações;
- Apresentar a sequência desenvolvida na forma de um produto educacional para auxiliar o ensino de Geometria.

Com essa proposta, esperamos que o estudante vivencie experiências matemáticas de investigação, conjecturação e generalização que contribuam para dar significado às demonstrações matemáticas que são apresentadas em sala de aula e em livros didáticos.

Além disso, esperamos que a sequência desenvolvida possa servir de material de apoio para professores atuantes no ensino básico, que encontram pouco material de apoio que promova a experimentação matemática como recurso para transição das provas feitas pelos alunos para as demonstrações matemáticas.

REFERÊNCIAS

BALACHEFF, N. **Processus de preuve et situations de validation. EducationalStudies in Mathematics**.Springer: 1987

BARBOSA, J. L. M., **Geometria Euclidiana Plana.** Rio de Janeiro: SBM, 1997.

CHATEAUBRIAND, O. **Logical forms. Part II:** logic, language, and knowledge. Campinas: Unicamp, Centro de lógica, epistemologia e história da ciência, 2005. (Coleção CLE, v. 42.).

COURANT, R., ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Ed. Ciência Moderna, 2000.

DAVIS, P. J; HERSH, R. **A experiência Matemática.** Lisboa: Gradiva, 1995.

EVES, H. **Tópicos de Histróra da Matemática para uso em sala de aula: Geometria.**

São Paulo: Atual, 1992.

FERREIRA, F. A. **Provas e Demonstrações:** Compreensões de dez anos da produção emEducação Matemática (2003-2013). 2016. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

FOSSA, J. **Introdução às Técnicas de Demonstração na Matemática.** São Paulo: Livraria da Física, 2009.

GARBI, G. G. **C.Q.D. Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria.** São Paulo: Livraria da Física, 2010

GAZIRE, E. S. **O não resgate das geometrias**. 2000. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual deCampinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP.

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando Geometria.** São Paulo: Atual Editora, 1994.

MEDEIROS, M. DA P. N. DE. **A Prova por Redução ao Absurdo na Lógica Clássica.** Princípios: Revista de Filosofia (UFRN), v. 2, n. 02, p. 120-125, 6 out. 2010.

MOL, R. S. **Introdução à história da Matemática.** Belo Horizonte: CAED/UFMG, 2013.