

“ELEMENTOS” DE EUCLIDES E GEOGEBRA NAS AULAS DE MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

Thais Maria Barbosa Goulart¹

GD 5 – História da Matemática e da Educação Matemática

Resumo: A História da Matemática pode levar os estudantes a perceberem a Matemática como uma construção humana, social e cultural, que levou milhares de anos para se desenvolver e que ainda segue em construção. Neste sentido, escolhemos a obra “Elementos” de Euclides como principal inspiração para este trabalho devido ao seu potencial formativo e sua importância no ensino de Geometria. O objetivo desta pesquisa em andamento é investigar possíveis contribuições de tarefas matemáticas historicamente situadas, construídas a partir dos “Elementos” e desenvolvidas no GeoGebra, para a aprendizagem de algumas noções de Geometria. A partir de algumas proposições do Livro I da obra, procuramos articular passado e presente para aproximar os alunos do contexto histórico de desenvolvimento da Matemática e favorecer a aprendizagem em Geometria. O trabalho de campo se desenvolveu entre abril e agosto de 2019, em um total de 22 aulas, em uma classe do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual de Ibitiré (MG). Os dados foram produzidos a partir das observações e anotações em diário de campo, gravações em áudio em algumas aulas, gravações em vídeo e registros produzidos pelos alunos. Uma análise preliminar dos dados aponta que os estudantes demonstraram interesse sobre a história de Euclides e dos “Elementos”, assim como dos períodos anteriores a ele. Além disso, houve evidências de que o ambiente GeoGebra teve destaque no desenvolvimento das tarefas por favorecer construções mais rápidas e por permitir explorações e conjecturas através da manipulação de figuras.

Palavras-chave: “Elementos” de Euclides; História da Matemática; GeoGebra; Ensino de Geometria.

INTRODUÇÃO

A História da Matemática no ensino, de acordo com Miguel (1993) e Miguel e Miorim (2008), pode contribuir para que estudantes construam conceitos matemáticos e os perceba como produção humana pautada nas necessidades e interesses de cada época e sociedade. Na presente pesquisa, em andamento, elaboramos e desenvolvemos tarefas matemáticas voltadas para o ensino de Geometria em uma perspectiva histórica. Consideramos a obra “Elementos”² de Euclides como a principal inspiração. Esta escolha se deu tanto por seu papel no ensino de Geometria ao longo dos últimos séculos quanto por seu potencial educativo, organização e lógica interna. Embora não tenha sido criada com este propósito, por vários séculos, foi utilizada como livro texto para o ensino de Geometria e,

¹ Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP; Programa de pós-graduação em Educação Matemática/Mestrado Profissional em Educação Matemática; thaismariagoulart@gmail.com; Orientadora: Ana Cristina Ferreira, Coorientador: Jorge Luís Costa.

² A versão utilizada neste trabalho será o livro Os “Elementos” de Euclides, traduzido por Irineu Bicudo (2009).

mesmo após deixar de sê-lo, ainda se constituiu como principal referência para a elaboração dos livros didáticos até bem recentemente.

Escolhemos o *software* GeoGebra como ambiente de aprendizagem para o desenvolvimento destas tarefas. Além de ser gratuito, ele, como outros ambientes de Geometria dinâmica “são ferramentas informáticas que oferecem régua e compasso virtuais, permitindo a construção de objetos geométricos a partir das propriedades que os definem” (GRAVINA, 2001, p. 82) e favorecem construções e explorações por meio da visualização e manipulação das figuras (LINGEFJARD, 2011).

A partir dessas reflexões, recortamos a seguinte questão de investigação: *como tarefas matemáticas construídas a partir dos “Elementos” de Euclides e sua história e desenvolvidas no ambiente GeoGebra podem contribuir para a aprendizagem de tópicos de Geometria Plana em uma classe do 8º ano do Ensino Fundamental?*

Apresentamos aqui um recorte desta pesquisa. Iniciamos com uma síntese de nossas leituras e reflexões sobre os “Elementos” e o GeoGebra e, em seguida, descrevemos as opções metodológicas e as tarefas desenvolvidas. Detalhamos uma das tarefas e tecemos algumas considerações sobre a mesma e finalizamos com algumas reflexões acerca do estudo.

“ELEMENTOS” DE EUCLIDES E GEOGEBRA

“Elementos” é uma obra organizada por Euclides de Alexandria, matemático do século III a.C., responsável por estruturar muitos dos conhecimentos matemáticos da época (EVES, 2011). Da perspectiva da História da Matemática, a obra de Euclides merece atenção pelo que continua representando historicamente e por seu potencial educativo.

A obra de Euclides pode não ser, em sua integralidade, um instrumento de ensino direto na Educação Básica. Embora tenha sido utilizado como texto-base por muito tempo na Inglaterra (FUJITA, 2001; DUARTE; SILVA, 2006; MONTOITO; GARNICA, 2014; ANDRADE-MOLINA; RAVN, 2016), basta folhear a obra traduzida por Irineu Bicudo (EUCLIDES, 2009) para perceber as dificuldades que os estudantes podem enfrentar. Por essa razão, recebeu inúmeras críticas ao longo dos tempos (como mencionam FUJITA, 2001 e MORALES; VELÁZQUEZ, 2007). Apesar disso, é possível utilizá-la como um recurso didático apoiada em um direcionamento ou em outros objetos de ensino e aprendizagem,

como por exemplo, a tendência da História da Matemática e as Tecnologias. Ou seja, desde que se tenha claros os objetivos a serem alcançados, as proposições presentes nos “Elementos”, aliadas a outras ferramentas didáticas, podem contribuir para o ensino de Matemática. Como Sánchez (2012), entendemos que sua importância não está apenas na Matemática ali reunida, mas, sim, no raciocínio geométrico que representa uma determinada forma de pensar, particularmente interessante.

Ao nos apoiarmos na perspectiva da História da Matemática como abordagem de ensino encontramos nos “Elementos” uma “fonte de busca de compreensão e de significados para o ensino-aprendizagem da matemática escolar na atualidade” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 61). A partir desse argumento potencializador, conjecturamos que uma contextualização dos “Elementos” de Euclides e da história da sua época, poderia levar os estudantes a perceberem “as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 53). Entretanto, não propomos a retomada dos “Elementos” como livro didático ou como uma ordem didática a ser seguida, mas sim, como uma fonte histórica que permitirá um trabalho no qual a Matemática pode ser vista como uma construção humana, um trabalho de muitos.

A utilização da régua e do compasso é central nos livros de Euclides, uma vez que são os instrumentos de desenho privilegiados em todo o trabalho. Tais instrumentos passaram a ser conhecidos como instrumentos euclidianos em consequência da popularização do trabalho de Euclides, embora já existissem antes dele (EVES, 2011).

As construções geométricas com régua e compasso podem ser vistas como um dos potenciais pedagógicos de “Elementos”, pois construções com esses instrumentos podem proporcionar a visualização de propriedades de figuras geométricas. Porém, ao pensar em um trabalho na qual se deseja mais explorações por parte dos estudantes, ferramentas tecnológicas³, como os ambientes de Geometria Dinâmica, podem ser um caminho interessante, pois são capazes de proporcionar um espaço de conhecimento mais interativo.

O GeoGebra é um *software* de Matemática Dinâmica⁴ gratuito que também dispõe de régua e compasso. O *software* possui um ambiente que possibilita um trabalho dinâmico⁵ que, além da realização de construções geométricas de forma rápida, possui outras

³ Entende-se como “ferramentas tecnológicas” todos os artefatos virtuais e digitais como softwares, aplicativos e programas criados para alguma finalidade.

⁴ Site oficial do programa: <http://www.geogebra.org>

⁵ Entende-se por dinâmico aqui, um trabalho que favoreça a interatividade entre aluno e objeto matemático.

ferramentas e ainda permite a manipulação de figuras. Para Lingefjard (2011), ambientes de Geometria dinâmica como o GeoGebra possibilitam a verificação de conjecturas além de outras explorações, construções, e conclusões através da visualização e manipulação das figuras. Assim, utilizar este *software* no ensino de Geometria pode ser um ponto de partida para possibilitar aos estudantes o desenvolvimento do pensamento geométrico (GRAVINA, 2015) ao favorecer uma participação mais ativa na elaboração e análise de conjecturas e proposições, ao proporcionar a construção e visualização de entes geométricos variados.

ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

A pesquisa em andamento – de intervenção em uma abordagem qualitativa – tem como propósito investigar possíveis contribuições de tarefas envolvendo proposições de os “Elementos” desenvolvidos no ambiente Geogebra para a aprendizagem de noções de Geometria Plana.

A produção de dados ocorreu (e está ocorrendo) a partir das observações das aulas e anotações em diário de campo, gravações em áudio e vídeo de algumas aulas e registros dos estudantes, principalmente, no GeoGebra (o Gravador de Passos do Windows⁶ foi utilizado para capturar imagens do *software*).

Contexto e participantes do estudo de campo

O trabalho de campo se desenvolveu em uma escola pública estadual do município de Ibirité, situado na região metropolitana de Belo Horizonte (MG). Localizada na zona urbana, a escola possui cerca de 2600 alunos matriculados e atende aos três turnos, desde o Ensino Fundamental I até o Ensino Médio, além da Educação para Jovens e Adultos.

A escola possui dois laboratórios de informática com acesso à internet, entretanto, apenas o Laboratório I (maior e mais bem estruturado) possui um técnico responsável. Devido ao grande número de professores que utilizam esse laboratório, a escola

⁶ O Gravador de Passos do Windows é um programa que captura capturar telas do computador a cada clique. Esse programa permite ver os passos seguidos pelos alunos no GeoGebra. O “Protocolo de construção” do GeoGebra também é uma ferramenta que permite verificar os passos, entretanto, quando algum objeto é apagado a ferramenta não o registra. Sendo assim, não como visualizar as tentativas de construções que podem ser importantes na pesquisa.

disponibilizou o Laboratório II (com 17 computadores para os alunos, um computador central e um equipamento de Datashow) para a realização deste trabalho.

Participaram deste estudo, 35 estudantes de uma classe do 8º ano do Ensino Fundamental com idades de 13 a 15 anos, sendo 18 meninas e 17 meninos. Os estudantes foram organizados em dezesseis duplas e um trio, foram assíduos em quase todas as aulas e o professor titular da classe acompanhou o desenvolvimento das tarefas.

O desenvolvimento das tarefas matemáticas

A pesquisa iniciou em abril de 2019, a partir da aprovação do projeto de pesquisa no Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Ouro Preto⁷ e do consentimento da escola e do professor titular da classe. Até agosto de 2019, o estudo totalizava 22 aulas de 50 minutos. Para este estudo, cada dupla foi denominada por um código (D1, D2, D3, ...).

Devido à falta de conhecimentos prévios de Geometria e da reduzida habilidade com o manuseio de instrumentos de construção geométrica, foi necessária uma preparação prévia para a realização das tarefas no GeoGebra. Assim, inicialmente, duas tarefas foram desenvolvidas em sala de aula visando um primeiro contato com as primeiras noções de Geometria por meio de construções com régua e compasso. Procuramos criar um contexto para a realização de tais tarefas por meio da História da Matemática, situando Alexandria, sua biblioteca, Euclides e algumas fontes de conhecimento matemático (egípcios, hindus, etc.). Estas tarefas aconteceram entre abril e maio de 2019 e totalizaram oito aulas. Em seguida, entre junho e agosto de 2019, foram realizadas seis tarefas no laboratório de informática, utilizando o GeoGebra, com um total de 14 aulas. Devido à limitação de espaço, descreveremos brevemente as tarefas realizadas e detalharemos um pouco mais apenas a tarefa 6 desenvolvida no GeoGebra.

Tarefa 1 – A biblioteca de Alexandria, Euclides e os “Elementos”

Na primeira tarefa, os alunos foram convidados a “viajar no tempo”. Cada dupla recebeu um planisfério e, a cada destino visitado, localizaria o país. Paralelamente, a viagem

⁷ CAAE: 95816318.8.0000.5150

era feita no *Google Earth*⁸ (projetada em uma tela com o auxílio de Datashow) de modo que pudessem observar as distâncias entre sua cidade e país e os destinos em estudo.

O objetivo dessa tarefa foi promover uma primeira aproximação com a história de Euclides e os “Elementos”. Para isso, apresentamos um pequeno vídeo⁹ sobre a Biblioteca de Alexandria e Euclides, além de imagens da Biblioteca, de papiros e dos “Elementos”. Na finalização da tarefa 1, distribuímos uma régua não graduada e um compasso a cada dupla e propusemos que construíssem alguns desenhos utilizando esses instrumentos.

Tarefas 2 e 3 – Conhecimentos geométricos anteriores a Euclides

As tarefas 2 e 3 foram construídas com o propósito de fazer com os estudantes ganhassem habilidades com os instrumentos geométricos (régua não graduada e compasso) além dos conhecimentos prévios para a realização das tarefas no GeoGebra.

“Viajamos” para um período anterior a Euclides de modo a compreender que o conhecimento reunido nos “Elementos” era oriundo de várias culturas distintas. Desta vez, a Índia foi o destino. Procuramos conhecer os Sulbasutras¹⁰ e a Matemática envolvida na construção de altares na civilização védica, escolhemos o Altar do Falcão (GASPAR, 2003).

A cada etapa da construção, articulamos as figuras geométricas com as definições de Euclides (ditas aos alunos como ideias de Euclides) evidenciando a necessidade da padronização dos pontos, retas e segmentos. Além disso, a construção do Altar do Falcão permitiu avançar e estudar também os conceitos de reta perpendicular e paralelas definidos por Euclides em sua obra. Essa tarefa foi fundamental para que os estudantes pudessem perceber “a Matemática como uma criação humana” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 53).

Na tarefa 3, já no laboratório de informática, retomamos a história do altar a partir de um vídeo¹¹ e as duplas repetiram a construção, porém, agora no GeoGebra. Nessa tarefa, as duplas tiveram o primeiro contato com o *software* e se mostraram surpresos com suas possibilidades. Entretanto, algumas duplas demonstraram dificuldades na construção e a

⁸ Programa de computador da empresa Google que apresenta um modelo tridimensional do globo terrestre. Disponível em: <https://www.google.com.br/intl/pt-BR/earth/>.

⁹ Utilizamos alguns trechos dos vídeos disponíveis em www.youtube.com/watch?v=5A9B1rwg-D4 e www.youtube.com/watch?v=X033FOYg_p8

¹⁰ Os Sulbasutras são textos que possuem instruções para a construção de altares sagrados (GASPAR, 2003).

¹¹ Utilizamos alguns trechos do vídeo disponível em https://www.youtube.com/watch?v=DLKHQ_HI6OI.

partir das observações registradas e do próprio registro das duplas percebemos que a tarefa 2 não foi totalmente compreendida.

Tarefas 4, 5, 6, 7 e 8 – Construção e exploração de triângulos no GeoGebra

Realizamos mais uma “viagem no tempo”, dessa vez para a China (Tarefa 4). O intuito foi abordar o círculo a partir de uma perspectiva histórica. Segundo a antiga astronomia chinesa, o quadrado pertence à Terra e o círculo ao Céu¹². Discutimos com os alunos as diferenças entre círculo e a circunferência e seus elementos, relacionando-os com as ideias de Euclides¹³, como um caminho para as próximas construções.

Após conhecer algumas ferramentas do GeoGebra, principalmente a ferramenta “Compasso”, nas tarefas 5, 6 e 7, propusemos a construção de triângulos e a exploração de algumas de suas propriedades. Iniciamos a tarefa 5 com a apresentação de um vídeo¹⁴ sobre os Triângulos de Samos. O intuito foi abordar mais uma figura de os “Elementos” a partir de uma perspectiva histórica. Em seguida, lançamos perguntas às duplas sobre as características de um triângulo isósceles e como seria a sua construção no GeoGebra. A ferramenta “Compasso” já havia sido apresentada aos estudantes, mas essa seria a primeira construção de um triângulo no software. Dessa forma, na tarefa 5 propomos a construção do triângulo isósceles em conjunto com os alunos e exploramos a proposição 3¹⁵ do Livro I de Euclides.

Na tarefa 6 propomos um caminho para que as duplas chegassem à construção da proposição 1¹⁶ do Livro I de Euclides utilizando a ferramenta “Compasso” do GeoGebra. Para alcançar o objetivo dessa tarefa, propomos inicialmente uma retomada da construção do triângulo isósceles, com a exploração das proposições 5¹⁷ (apenas o seu início) e 6¹⁸, para estudar mais algumas de suas propriedades.

¹² Ver mais em <http://personal.us.es/cmaza/china/circulo.htm#C%C3%ADrculo%20y%20cuadrado>.

¹³ Mostramos aos alunos como Euclides determinou o círculo “com todo centro e distância, descrever um círculo” (Postulado 3, EUCLIDES, 2009, p. 98).

¹⁴ Utilizamos alguns trechos do vídeo disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=wsqm7uHywaY>.

¹⁵ Proposição 3: Dadas duas retas desiguais, subtrair da maior uma reta igual à menor (EUCLIDES, 2009, p. 100). Apesar de não estar diretamente relacionada aos triângulos, a proposição 3 foi utilizada na tarefa para explorar o transporte de segmento realizado com o compasso em quase todas as construções.

¹⁶ Proposição 1: Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada (EUCLIDES, 2009, p. 99).

¹⁷ Proposição 5: Os ângulos junto à base dos triângulos isósceles são iguais entre si [...]. (EUCLIDES, 2009, p. 102).

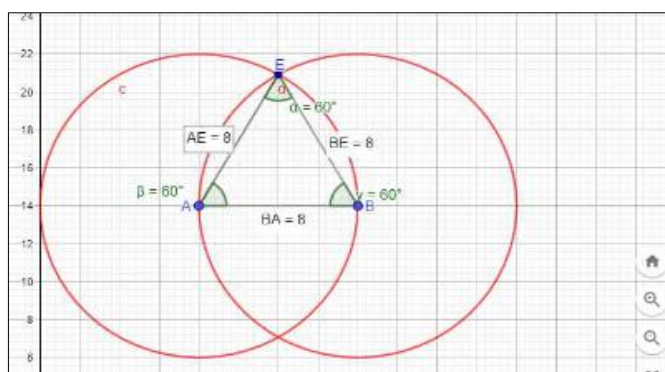
¹⁸ Proposição 6: Caso dois ângulos de um triângulo sejam iguais entre si, os lados que se estendem sob os ângulos iguais também serão iguais entre si. (EUCLIDES, 2009, p. 103).

Dessa forma, iniciamos a tarefa 6 com a construção do triângulo isósceles que já haviam sido construídos na tarefa 5. No triângulo isósceles dois segmentos foram construídos (cada um com uma medida à escolha da dupla): um representado a sua base (AB) e um segundo (CD) para ser a medida do raio da circunferência que será construída com o compasso formando então os outros dois lados do triângulo. A partir da construção, as duplas visualizaram diferentes medidas de lados e ângulos do triângulo isósceles com a movimentação do segmento CD. A manipulação desse triângulo permitiu estudar e explorar as propriedades desse triângulo e com as proposições 5 e 6 do Livro 1 da obra “Elementos”.

No segundo momento da tarefa 6, falamos para os alunos que Euclides começou a sua obra com algumas definições, como aquelas que estavam no quadro e, em seguida, apresentamos a proposição 1, sobre a construção do triângulo equilátero. Após uma pequena discussão sobre as características desse triângulo, propomos aos alunos que tentassem construí-lo com a ferramenta “Compasso”. O objetivo final dessa tarefa era fazer com que as duplas percebessem o compasso como um transporte de segmento e constatassem que as medidas dos lados dos triângulos eram raios de uma circunferência.

Para esse momento, programamos um tempo maior, pois o objetivo era que as duplas construíssem o triângulo equilátero sem nenhuma intervenção. Algumas duplas conseguiram construir o triângulo de forma mais rápida do que o esperado. Instantes após a proposta da construção, a dupla D11 construiu o triângulo equilátero conforme a figura 1.

Figura 1- Construção do triângulo equilátero no GeoGebra pela dupla D11.



Fonte: Dados da pesquisa.

A dupla D11 realizou essa construção de uma forma diferente das demais duplas, pois usaram o mesmo arquivo do triângulo isósceles e encontraram uma solução mais rápida. A partir das anotações no diário de campo, registramos o seguinte diálogo:

Figura 2 – Registro do diálogo com a dupla D11.

Fernando: Professora!
Fernando: Isso aqui é um triângulo isósceles ou é equilátero?
Felipe: É equilátero!
Professora-pesquisadora: Oi meninos.
Fernando: A gente terminou.
Professora-pesquisadora: Já terminaram?
Fernando: É só você reduzir o triângulo.
Professora-pesquisadora: Vocês tinham feito um isósceles então? Mostre como estava.
Fernando (*arrastando o segmento AB*): Estava assim.

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao arrastar o segmento AB, o triângulo isósceles foi transformado em um triângulo equilátero. Verificamos que as medidas dos lados do triângulo contribuíram que chegassem ao triângulo equilátero. Apesar da dupla D11¹⁹ não chegar a construir o triângulo utilizando a régua e o compasso, a manipulação da figura (do triângulo isósceles) defendida por Gravina (2015) foi uma estratégia para alcançar o objetivo final da tarefa.

Além da construção do triângulo equilátero, as duplas deveriam escrever o porquê era possível afirmar que o triângulo que construíram é equilátero. Na figura abaixo registramos novamente o diálogo com a dupla D11:

Figura 3 – Registro do diálogo com a dupla D11.

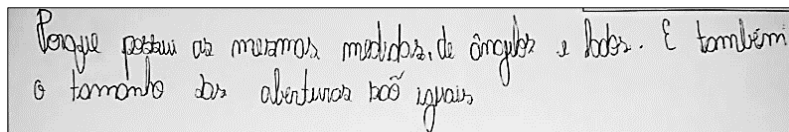
Fernando (*lendo a pergunta*): por que podemos afirmar que todos os lados do triângulo equilátero são iguais?
Felipe: Por que todos os lados dele é igual por isso ele é equilátero? Você não vai escrever isso não né?
Fernando (*depois de ler novamente a pergunta*): Essa é mais difícil que a outra né?
Felipe: Porque tem tudo a mesma medida!
Professora: E aí meninos, conseguiram responder à pergunta?
Felipe: Mais ou menos.
Professora: Por que esses três segmentos são iguais?
Fernando (*apontando para a tela*): Porque nós medimos os segmentos e eles tem a mesma medida.
Professora: Quando vocês fizeram, vocês ainda não tinham certeza que eles tinham as mesmas medidas. Vocês confirmaram agora e só por isso usaram a ferramenta (para medir). Tentem usar mais argumentos para responder essa pergunta.

Fonte: Dados da pesquisa.

Após um tempo, a dupla D11 registrou a seguinte justificativa sobre o porquê era possível afirmar que o triângulo que construíram era equilátero:

¹⁹ Os nomes Fernando e Felipe são fictícios, foram usados apenas para escrever o diálogo.

Figura 4 – Resposta da dupla D11.

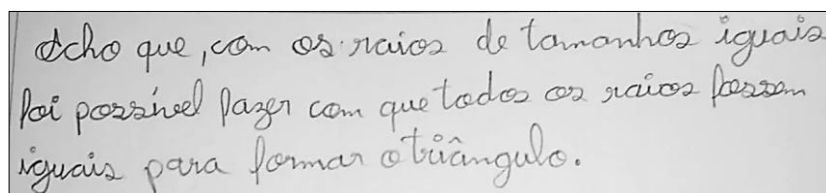


Porque possui as mesmas medidas de ângulos e lados. E também o tamanho das alturas são iguais.

Fonte: Dados da pesquisa.

Verificamos que a dupla manteve a justificativa pelas medidas, mas a segunda frase parece apresentar indícios de uma aproximação da ideia de que os lados do triângulo equilátero são raios de uma mesma circunferência. Essa constatação foi encontrada nos registros da dupla D9 apresentada na figura 5.

Figura 5 – Resposta da dupla D9.



Digo que, com os raios de tamanhos iguais foi possível fazer com que todos os raios fossem iguais para formar o triângulo.

Fonte: Dados da pesquisa.

A tarefa 7, que ainda está em andamento, se refere a construção e exploração do triângulo escaleno, pois pretendemos encerrar o trabalho de campo com a tarefa 8, sobre a condição de existência de um triângulo. Dessa forma, o propósito é fazer com que as duplas cheguem até as proposições 20²⁰ e 22²¹ do Livro I de Euclides.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa em andamento tem o intuito de compreender como as tarefas, desenvolvidas em uma perspectiva histórica a partir dos “Elementos” de Euclides e da história de sua época, influenciam na aprendizagem de algumas noções de Geometria.

Com as tarefas matemáticas propostas neste estudo buscamos mostrar a Matemática como uma construção humana para desmistificá-la e aproximá-la das “pessoas comuns” que

²⁰ Proposição 20. Em qualquer triângulo a soma de dois lados é maior que o terceiro.

²¹ Proposição 22. Para construir um triângulo com três segmentos de reta dados é necessário que o comprimento da soma de dois deles seja maior que o remanescente.

ao longo da história participaram da sua construção. A partir dessa perspectiva, aprender Geometria pode ganhar mais sentido na medida que os estudantes compreendam o seu desenvolvimento e os diversos propósitos de acordo com cada sociedade e cultura.

Em relação ao GeoGebra, verificamos que esse ambiente permitiu construções mais rápidas e favoreceu as explorações nas construções dos triângulos através da manipulação. Dessa forma, o *software* pode contribuir no ensino de Geometria, pois os estudantes podem perceber como a tecnologia pode estar em sintonia com a história e com a construção do conhecimento matemático.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Universidade Federal de Ouro Preto e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

ANDRADE-MOLINA, M.; RAVN, O. The Euclidean tradition as a paradigm for scientific thinking. **Philosophy of Mathematics Education Journal**. 2016, n. 30.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e introdução de I. Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.

DUARTE, A. R. S.; SILVA, M. C. L. Abaixo Euclides e acima quem? Uma análise do ensino de Geometria nas teses e dissertações sobre o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. **Práxis Educativa**. v. 1, n. 1, p. 87-93. Ponta Grossa, PR, 2006.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5 ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FUJITA, T. The order of theorems in the teaching of Euclidean geometry: Learning from developments in textbooks in the early 20th Century. **ZDM Mathematics Education**. 2001, v. 33, n. 6, p. 196-203.

GASPAR, Maria Terezinha Jesus. **Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores**. 318 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. 277 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GRAVINA, M. A. O potencial semiótico do Geogebra na aprendizagem da Geometria: uma experiência ilustrativa. **Revista Eletrônica VIDYA**. v. 35, n. 2, p. 237-253. Santa Maria, 2015. Disponível em: <https://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/view/605/561>>. Acesso em: 27 de maio de 2018.

LINGEFJARD, T. Rebirth of Euclidean Geometry?. In: Bu L., Schoen R. (eds) **Model-Centered Learning**. v. 6. The Netherlands: Sense Publishers, 2011. p. 205-215.

MIGUEL, A. **Três Estudos sobre História e Educação Matemática**. Tese de Doutorado (Faculdade de Educação), UNICAMP, Campinas, 1993.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. 1 ed., 2 reim. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

MONTOITO, R.; GARNICA, A. V. M. Ecos de Euclides: breves notas sobre a influência d'*Os Elementos* a partir de algumas escolas filosóficas. **Educação, Matemática, Pesquisa**. v. 16, n. 1, p. 95-123, São Paulo, 2014.

MORALES, M. A.; VELÁZQUEZ, S. Algunas inconsistencias en el sistema axiomático deductivo de los elementos de Euclides y sus implicaciones en el aprendizaje de la geometría. En Crespo, Cecilia Rita (Ed.), **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa** (pp. 43-48). Camagüey, Cuba: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., 2007. Disponível em: <<http://funes.uniandes.edu.co/5140/>>. Acesso em: 25 de abril de 2018.

SÁNCHEZ, C. H. S. La história como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. **Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología**. n. 32, p. 71-92, Bogotá, 2012. Disponível em: <<http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/1860/1836>>. Acesso em: 25 de abril de 2018.