# O ENSINO DE FRAÇÕES EM UMA TURMA DE 6º ANO

Roseane Nunes Garcia de Souza[1]

GD 2 – Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental

**Resumo**: Motivada pela sabida dificuldade que os alunos do Ensino Fundamental possuem em trabalhar com frações e também por uma reflexão sobre a construção dos números racionais pela ciência matemática versus a construção dos mesmos pela escola, constituiu-se esta pesquisa sobre a viabilidade de demonstrar-se com estudantes do 6º ano o que aqui chamamos Teorema de Caracterização de Frações Equivalentes, e de aplicar a técnica utilizada em sua demonstração na comparação, na adição e na subtração de frações, com o objetivo de dar maior significado a estes conceitos. Para isso, desenvolvemos uma sequência didática que foi aplicada em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental. A pesquisa fundamenta-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, pois pretende-se analisar a construção do conhecimento apoiada no uso das várias representações do objeto de estudo fração.

**Palavras-chave**: Frações, Frações equivalentes, Caracterização.

## INTRODUÇÃO

Este trabalho é um relato sobre a dissertação de mestrado da autora, em fase de conclusão. Essa dissertação tem por objetivo buscar amenizar a dificuldade de alunos da Escola Básica com as definições e utilização de fração e de número racional, e tem sua origem em uma reflexão ligada ao chamado *conhecimento matemático do professor para o ensino* (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Analisando a construção dos números racionais feita pela ciência Matemática (encontrável, por exemplo, em FERREIRA, 2013), percebe-se que o conceito que é *elementar* para esta construção é o de equivalência de frações. De fato, é a partir do conhecimento sobre números inteiros e de uma relação de equivalência considerada no conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ que é definido número racional e construída toda a estrutura de corpo dos números racionais. Assim, defende-se que o conceito de equivalência deve ser muito bem construído com os alunos do ensino fundamental, facilitando, dessa maneira, o estudo de frações e de números racionais. Salienta-se que um conceito "bem construído" sobre frações equivalentes subentende a caracterização dessas frações, a saber:

*Duas frações* $\frac{a}{b}$ *e* $\frac{c}{d}$ *são equivalentes se e só se ad=bc* (*).

[1] Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS; Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática; Mestrado Profissional em Ensino de Matemática; rosengs@gmail.com; orientadora: Cydara Cavedon Ripoll.

A autora defende que, com tal caracterização construída junto com os estudantes, são fornecidas melhores condições para o desenvolvimento das ideias de comparação, adição e subtração de frações. O que, de fato, foi confirmado em sua implementação.

Em sua trajetória como professora de matemática, a autora escutou, por diversas vezes, seus alunos explicitarem dúvidas com relação ao uso do mínimo múltiplo comum. Dúvidas essas que muitas vezes travavam as resoluções de questões envolvendo comparação ou operações com frações. Questionamentos do tipo: “como resolvo isso? primeiro multiplico ou divido?”, “posso somar o de cima e o de baixo?” (questionando a possibilidade de adicionar frações de denominadores diferentes, apenas somando numeradores e denominadores), “para somar é só fazer a receita de dividir pelo de baixo e multiplicar pelo de cima” (explicação de aluno para colegas que não conseguem adicionar ou subtrair frações de denominadores diferentes); são indícios sobre a dificuldade dos alunos ao lidar com as frações. Colocações como estas sugerem, não apenas, o quanto trabalhar com frações é complicado e sem sentido, para os estudantes, como evidenciam o quanto o uso de mínimo múltiplo comum atrapalha e é adotado como ingrediente da receita de comparar e operar com frações. Sobre isso, os PCN afirmam que: “ o importante é superar a mera memorização de regras e de algoritmos (“divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima”, “inverte a segunda e multiplica”) e os procedimentos mecânicos que limitam, de forma desastrosa, o ensino tradicional do cálculo” (PCN, 1998, p.67).

Ressaltamos que, na escola, a caracterização das frações equivalentes (*) é uma propriedade, e não uma definição, necessitando então, ser demonstrada. Por isso, chama-se, neste trabalho, tal propriedade de *Teorema de Caracterização de Frações Equivalentes*.

Ao desenvolver esse trabalho, realizou-se a análise de 13 livros didáticos de ensino fundamental (dois livros de 4º ano, dois livros de 5º ano, sete livros de 6º ano e dois livros de 7º ano). No entanto, em livros didáticos de 4º, 5º e 6º ano, a equivalência de frações é em geral constatada apenas amparada por imagens que sugerem “observe (a representação) e veja o que acontece”, o que chama-se, neste trabalho, de “olhômetro”. Cabe ressaltar que, para a ciência matemática, o “olhômetro” não serve como argumentação suficiente, necessitando, portanto, de uma argumentação que a complete até uma demonstração. Além disso, de acordo com os PCN: “é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas que assumam uma postura de sempre tentar justificá-las” (PCN, 1998, p.71). Nesse sentido, está-se concordando que "(...) tanto o pensamento genérico como a atividade de demonstrar, podem (e devem!) ser explorados e desenvolvidos na escola. Vamos além: tanto quanto possível, a exploração e o desenvolvimento de tais princípios matemáticos devem iniciar-se já nos primeiros anos de escolaridade" (CARVALHO e RIPOLL, 2013, p.150).

Dessa forma, neste trabalho, defende-se que a demonstração dessa propriedade é passível de ser construída com estudantes de 6º ano, mais do que isso, defende-se que ela ajuda na compreensão do conceito de equivalência. Dá-se assim um exemplo de situação que contempla as ideias de Hanna, na medida em que ela orienta que as demonstrações que devem entrar na sala de aula são aquelas que ajudam a promover a compreensão (HANNA, 1990).

A dissertação da autora tem como produto final, um plano de aula para o estudo introdutório de frações em uma turma de 6º ano, tendo como diferencial a proposta de incluir o enunciado e a demonstração do Teorema de Caracterização de Frações Equivalentes e de abordar a comparação e as operações de adição e de subtração com a técnica utilizada na demonstração deste teorema. É importante ressaltar-se aqui que, quando se fala em "demonstração", não se está pressupondo o uso de simbologia matemática, mas sim de uma argumentação completa o suficiente a ponto de ser aceita pela ciência Matemática. De acordo com os PCN, "a argumentação está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação e, para tanto, é importante produzir alguma explicação, bem como justificá-la" (PCN, 1998, p.70).

## REFERENCIAL TEÓRICO

É buscando amparo na Teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval que pretende-se desenvolver o trabalho de dissertação da autora.

Em sua teoria, Duval explica que "(...) os registros de representações são maneiras típicas de representar um objeto matemático, e o sistema no qual podemos representar um objeto matemático, denomina-se sistema ou registro semiótico. Os registros semióticos são importantes não somente por se constituírem num sistema de comunicação, mas também por possibilitarem a organização de informações a respeito do objeto representado" (PANTOJA, CAMPOS, SALCEDO, 2013, p.02).

Duval salienta a importância de nunca se confundir um objeto e sua representação (COLOMBO, FLORES, MORETTI, 2008). Sendo assim, é fundamental saber que nenhum dos registros de representação "é" o objeto matemático, mas sim uma representação "dele". Dessa forma, $5, cinco, \frac{25}{5}\ e\ (10 \times 0{,}5)$ são diferentes representações que se referem a um mesmo objeto matemático, o *número* cinco. Dessa forma, quanto mais variadas forem as representações de um objeto, maior é a compreensão a seu respeito. Utilizando as palavras de Duval (2003), quer-se dizer que "a compreensão em matemática implica na capacidade de mudar de registro" (DUVAL, 2003, p.21, apud PANTOJA, CAMPOS e SALCEDOS, 2013).

No ensino fundamental, as frações são introduzidas com três tipos de representação apontados por Duval: registro simbólico – numérico (fracionário) ou algébrico; no figural (representação de partes de grandezas discretas ou contínuas); e evidentemente no registro da língua natural.

## DEMONSTRAÇÃO EM SALA DE AULA

Sobre as demonstrações na sala de aula, Hanna[2] (1996), afirma que uma demonstração além de convencer, pode também promover a compreensão (HANNA, apud RODRIGUES, 2008, p.20). Para Hanna, "uma demonstração que explica e uma demonstração que prova são ambas provas legítimas" (HANNA, 1990, tradução livre). No entanto, ela orienta que, sempre que possível, devem ser apresentadas aos alunos as demonstrações que promovem maior compreensão, no lugar de apenas aquelas que convencem. Reitera-se que, ao propor-se *demonstrar,* não se está pressupondo a utilização de linguagem simbólica e sim significando uma argumentação matematicamente completa, lembrando que "(...) dominar a linguagem matemática simbólica não é sinônimo nem pré-requisito para demonstrar em matemática" (CARVALHO, 2013, p.151).

[2] Gila Hanna é pesquisadora da Universidade de Toronto e foi uma das palestrantes convidadas do Grupo de Trabalho intitulado *Reasoning and Proof* no *International Congress on Mathematical Education* (ICME 13) ocorrido em julho de 2016 em Hamburgo, Alemanha. Hanna usa sempre o termo *proof* como sinônimo de demonstração, e é pela presença da demonstração na escola que ela se interessa, desde a década de 90.

## METODOLOGIA DA PESQUISA E DA AÇÃO DOCENTE

A primeira questão desta pesquisa é a seguinte:

*O que há de elementar na construção dos números racionais a partir do conjunto dos números inteiros?*

Cabe esclarecer que, neste trabalho, o termo *elementar* refere-se às “partes nucleares que constituem os germes com base nos quais se sustenta toda a ciência superior. (...) Desta forma, os *elementos* que as constituem vão sendo identificados e, em consequência, a capacidade de esclarecer e difundir seus conceitos aumenta” (RIPOLL, RANGEL e GIRALDO, 2016, p. IX).

No intuito de responder essa questão, relembramos a construção dos números racionais, que pode ser encontrada no livro “A Construção dos Números”, Jamil (2013). Durante a leitura do mesmo, surgiu também a seguinte questão, não salientada pelo autor, porém imprescindível para a construção dos números racionais:

*Em que momento aparece, nesta construção, o significado numérico do novo objeto matemático construído justificando então a nomenclatura “número” racional?*

Responder a estas questões revelou-se um conhecimento do professor (na terminologia utilizada em Ball, Thames, Phelps (2008)) para o ensino, conhecimento esse, imprescindível para o encaminhamento da dissertação e para o planejamento da Proposta alternativa. De fato, uma vez respondidas estas questões, surgiram naturalmente duas novas, tornando-se a segunda delas a questão de pesquisa propriamente dita:

*Como os livros didáticos lidam com a equivalência de frações?*

Uma análise do conteúdo de frações em livros didáticos de 4º, 5º, 6º e 7º ano foi então realizada, avaliando se o que está sendo reconhecido como elementar para o ensino desse tópico, a saber, o conceito e caracterização de frações equivalentes, está contemplado nos livros analisados de maneira satisfatória, principalmente nos de 6º ano. Essa análise está particularmente voltada para o pensamento matemático, verificando sua presença nas obras. O que se pode perceber é que muitos dos livros didáticos analisados, ao definir e explorar frações equivalentes, recorrem exclusivamente ao “olhômetro”, apoiando-se em imagens, deixando de contemplar o pensamento matemático em sua plenitude. Como a opinião da autora é de que muito mais poderia ser explorado sobre tal conceito ao nível de um 6º ano, surgiu a questão de pesquisa propriamente dita:

*É possível propor a alunos de um 6º ano do Ensino Fundamental, o Teorema de Caracterização de Frações Equivalentes, desde a sua motivação até a sua demonstração?*

Encontra-se respaldo sobre a relevância dessas questões e sobre a viabilidade de trabalhar-se com argumentação matemática em uma das orientações da Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Fundamental que recomenda ser preciso, nos anos finais do ensino fundamental, destacar-se a importância da comunicação em linguagem matemática utilizando-se da linguagem simbólica, da representação e da argumentação (BRASIL, 2017, p.296); além disso, o documento ressalta também a importância do desenvolvimento da capacidade de abstrair o contexto, aprendendo relações e significados, para que possam ser aplicados em outros contextos (BRASIL, 2017, p.297).

A continuidade do trabalho de dissertação foi feita por meio de uma pesquisa de cunho qualitativo, na intenção de responder à questão norteadora da pesquisa.

Para a coleta de dados utilizou-se uma sequência didática, previamente elaborada, sobre o ensino de frações e por meio de atividades impressas, respostas orais e escritas dadas pelos alunos, anotações em um diário de campo, vídeos e fotos, realizamos nossa análise. Buscando apoio em Duval para refletir sobre os resultados obtidos, a análise dos dados coletados foi posterior ao término da implementação e teve como foco as relações entre os significados produzidos pelos alunos, na intenção de compreender suas escolhas e relevância das representações utilizadas.

## SOBRE A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Cada uma das atividades planejadas para a sequência didática é acompanhada de objetivos e expectativas, bem como de bilhetes ao professor, que incluem comentários julgados relevantes e sugestões para o desenvolvimento das atividades.

As atividades propostas aos alunos foram elaboradas pela autora com a supervisão de sua orientadora. Algumas delas são adaptadas de livros didáticos, outras são adaptações de atividades constantes do projeto "Livro Aberto de Matemática" (https://www.umlivroaberto.com/wp/). Procurou-se incluir atividades envolvendo tanto grandezas contínuas como discretas.

As atividades envolveram uma variedade de material concreto, bem como exploração de várias representações, seguindo de perto a orientação de Duval. Entre os materiais selecionados, estão o Tangram, folhas de papel e pizzas de e.v.a., bem como o material desenvolvido por Baldin, Martins e Silva, intitulado "Estojo de Frações". Segundo as autoras, esse material pode ser utilizado para introduzir o conceito de frações como parte/todo, frações equivalentes, comparação de frações e operações básicas com frações(BALDIN, MARTINS E SILVA, 2017).

As atividades iniciais envolveram uma revisão do conceito de frações, contemplando relação parte/todo, frações unitárias, importância e recuperação da unidade, tópicos que deveriam ter sido estudados nos anos anteriores. Os tópicos de frações equivalentes, comparação, adição e subtração, que devem ser introduzidos de forma sistemática no 6º ano, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Fundamental (BNCC), foram contemplados em uma segunda etapa do trabalho.

Como ideia para trabalhar o diferencial desta proposta, a saber, a caracterização das frações equivalentes, partimos da comparação entre duas frações (as duas frações dadas representam ou não a mesma quantidade?) e como abordagem do problema, propomos o uso da técnica de subdividir cada fração pelo denominador da outra, gerando uma equipartição que serve para expressar a quantidade representada pelas duas frações originalmente dadas . Essa foi a técnica utilizada na demonstração do Teorema de Caracterização das Frações Equivalentes. Uma vez "absorvida" esta técnica com o apoio em representação(ões) pictórica(s), os estudantes foram convidados a explicá-la, chegando ao enunciado e à demonstração do teorema, sem esperar-se que ela surja permeada da linguagem simbólica.

## IMPLEMENTAÇÃO

Para responder à questão de pesquisa, realizou-se a implementação em uma turma B30 (nomenclatura utilizada no ensino por ciclo) equivalente a um 6º ano, de uma escola do município de Porto Alegre, realizada durante 22 encontros que totalizaram 33 horas-aula.

Como não era professora titular da turma, a autora realizou observação, de duas horas/aula, a fim de conhecer um pouco as características dos alunos. A turma contava com 30 alunos matriculados, mas alguns com baixa frequência.

Na sua aula, pelo planejamento, iniciar-se-ia uma revisão do conteúdo de frações, mas para surpresa (da autora, sua orientadora e a professora titular da turma), apenas dois alunos (uma menina e um menino) tinham algum conhecimento sobre o conteúdo. Em conversa com a professora do 5º ano, teve-se a confirmação de que o conteúdo de frações, não havia sido trabalhado no ano anterior.

Dessa forma, as aulas inicialmente preparadas para revisar o conteúdo de frações, foram utilizadas para introduzir o conteúdo.

Durante toda a implementação a turma mostrou-se participativa, mas também bastante agitada. Em alguns encontros, o fechamento das atividades foi prejudicado devido à agitação da turma.

Alguns pontos mostraram-se mais complicados para os alunos, como o caso das frações no discreto e as frações impróprias. Percebeu-se que ao envolver frações no discreto, a turma tinha mais dúvidas e cometia mais "erros". Uma das possíveis dificuldades que percebemos ao trabalhar com o discreto é o fato de os alunos não prestarem atenção na unidade, como por exemplo, em uma das atividades, que envolvia a determinação de $\frac{3}{10}$ de 15 balas. As frações impróprias se revelaram também complexas, porém, menos do que frações no discreto. Percebeu-se que trabalhar a representação pictórica aliada à escrita numérica na forma de fração, contemplando as diferentes representações, como postula Duval, facilitou o entendimento dos alunos.

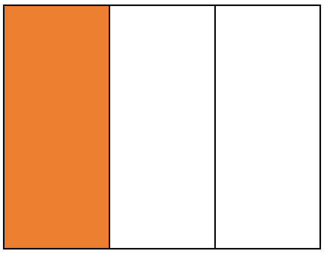
Mesmo antes de introduzir frações equivalentes, foram aproveitados momentos e situações onde apareceram frações que representavam a mesma quantidade, para já comentar que por isso dizemos que elas são iguais (o termo equivalente nesta proposta não foi introduzido na turma, consta apenas nos bilhetes ao professor). O mesmo ocorreu com a comparação e com as operações de adição e subtração, no sentido de não serem perdidas oportunidades de tecer algum comentário sobre esses tópicos antes do momento da sistematização dos mesmos.

O ponto mais esperado dessa implementação foi o momento de generalizar a caracterização das frações equivalentes. Salienta-se que em decisão conjunta da autora com sua orientadora, a nomenclatura "equivalentes" não foi utilizada, escrevendo-se apenas que as frações eram iguais por representarem a mesma quantidade da unidade considerada. Nesse dia começou-se, então, relembrando a problemática da comparação por meio de um exemplo (criado na hora), usando as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$.

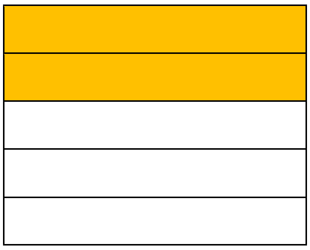
Para comparar as frações $\frac{1}{3}$ *e* $\frac{2}{5}$ identificando qual representa a maior quantidade ou se ambas representam a mesma quantidade, podemos buscar frações de mesmo denominador que representem essas quantidades, pois com frações de mesmo denominador não temos dúvidas quanto à comparação. No Quadro 1 apresentamos o desenvolvimento dessa comparação usando o modelo pictórico de barras, modelo esse utilizado durante toda a implementação.

**Quadro 1**: **Comparação entre as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$.**

"Como representar as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$?", perguntou a autora. Muitos estudantes responderam certo. Registrou-se no quadro a representação mencionada pelos estudantes.



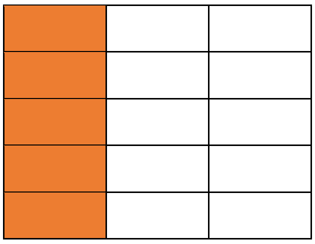
$\frac{1}{3}$



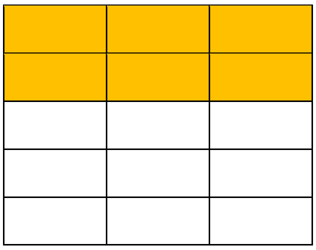
$\frac{2}{5}$

"E como fazer para obter frações de mesmo denominador, porém representando estas mesmas quantidades?", perguntou a autora.

Buscamos então subdividir cada terça parte $\left(\frac{1}{3}\right)$ em 5 partes e cada quinta parte $\left(\frac{1}{5}\right)$ em 3 partes, obtendo uma nova equipartição, que tem agora $3 \times 5 = 15$ partes.



$\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$



$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$

Sendo assim, essa nova equipartição produz um número de partes que é múltiplo do número de partes da equipartição original.

A equipartição em $3 \times 5 = 15$ partes, gera frações iguais às frações dadas, mas agora elas têm denominadores iguais:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{5}{15} \text{ e } \frac{2}{5} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$$

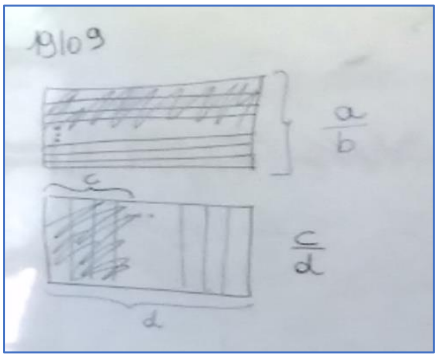
Agora é possível comparar sem dúvidas:

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15} < \frac{6}{15} = \frac{2}{5}, \text{ logo, } \frac{1}{3} < \frac{2}{5}.$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Só após o exemplo iniciou-se a tentativa de generalizar, retomando a ideia da aula anterior, onde construiu-se a estratégia, juntamente com a turma, de "multiplicar cada fração pelo denominador da outra". No entanto, a experiência de tentar usar frações genéricas revelou-se excessiva para esta turma. Muitos estudantes reagiram com muita surpresa ao verem uma fração escrita na forma $\frac{a}{b}$ . Agitaram-se e anunciaram mais de uma vez que não estavam "entendendo nada", pedindo para explicar novamente (Figura 1).

**Figura 1**: **Foto de uma tentativa de generalização do Teorema de caracterização das frações equivalentes**




Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, decidiu-se parar de tentar registrar a generalização no quadro e deu-se continuidade ao raciocínio apenas oralmente. A orientadora da autora estava presente e sinalizou que estava de acordo com esta decisão.

Retomou-se a comparação de $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$ e, com a ajuda dos alunos, foi feita a generalização oralmente. Eles mesmos comentaram: "Para deixar no mesmo denominador, multiplica pelo denominador da outra fração".

Perguntei: "multiplica só o denominador?"

Alunos: "não, o de cima também."

Mesmo sem fazer nenhum registro escrito dessa generalização para comparar frações equivalentes, com o objetivo de buscar frações equivalentes às frações dadas, considera-se que os alunos entenderam a caracterização e sua aplicação, pois souberam utilizar no desenvolvimento da atividade. Na aula seguinte o assunto foi retomado e o argumento registrado em palavras.

Ao longo das aulas percebeu-se que os alunos não têm e nem adquiriram o hábito de justificar as atividades. Foi possível perceber que aqueles que tentavam justificar, muitas vezes apenas repetiam a afirmação dada. Sempre que foi pedido para explicarem suas resoluções, deu-se a liberdade de os alunos usarem desenhos para justificar.

## REFERÊNCIAS

BALDIN, Y. Y.; SILVA, A. F.; MARTINS, A. C. C. Estojo de Frações. In: SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, 3., 2017, Rio de Janeiro.

BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for teaching: what makes it special?. **Journal of Teacher Education**, 59 (5), p.389-407. 2008.

BRASIL. **Base Nacional Curricular Comum**. Brasília: Ministério da Educação. (2017). Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf>. Acessado em: 22 dez. 2017.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC. 1998.

CARVALHO, S. A.; RIPOLL, C. C. O Pensamento Matemático na Escola Básica. **Zetetiké**, Campinas/SP, v.21., n.40, p.149–161, jul/dez 2013. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/148383>. Acesso em: 21 set. 2017.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C.; MORETTI, M. T. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. **Zetetiké**, Campinas/SP, v. 16. n. 29, p. 41-72, jan./jun. 2008.

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa**: Métodos qualitativo, quantitativo e misto. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

DUVAL, R. **Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática**. 7. ed. Campinas: Papirus, 2010.

FERREIRA, J. **A Construção dos números**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

HANNA, G. More than Formal Proof. **For the Learning of Mathematics**. Montreal, Quebec / Canadá, v. 9, n. 1. (p. 20 – 23), feb. 1989. Disponível em: <http://www.flm-journal.org/Articles/32AC027A455E667CCA7BB6152C671.pdf>. Acesso em: 08 nov. 2017.

HANNA, G. Some Pedagogical Aspects of Proof. **Interchange**, Spring, v. 21, n. 1, p. 6-13, 1990. Disponível em: < https://www.researchgate.net/profile/Gila_Hanna/publication/226635673_Some_pedagogical_aspects_of_proof/links/549c38710cf2d6581ab4826b.pdf>. Acesso em: 22 dez. 2017.

PANTOJA, L.F.L; CAMPOS, N.F.S.C; SALCEDOS, R. R. C. A Teoria dos Registros de Representações Semióticas e o Estudo de Sistemas de Equações Algébricas e Lineares. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 4. 2013, Canoas/RS.

PATRÍCIO, R. S.; ALMEIDA, M. da S. L. O Papel das Representações Semióticas no Ensino de Matemática. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2. 2011, Ijuí/RS.

RANGEL, L. G. **Teoria de Sistemas – Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo –** Estabelecendo Relações em um Estudo Colaborativo. 2015. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas de Computação) - Instituto Alberto Luiz Coimbra, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

RIPOLL, C. C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V. **Livro do Professor de Matemática na Educação Básica**: Números inteiros. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

RIPOLL, C. C.; SIMAS, F.; BORTOLOSSI, H.; RANGEL, L.; GIRALDO, V.; REZENDE, W.; QUINTANEIRO, W. **Frações no Ensino Fundamental** – v. 1. Instituto de matemática Pura e Aplicada. 2017. Disponível em: <https://www.umlivroaberto.com/livro/lib/exe/fetch.php?media=fracoes_v2_book_view.pdf>. Acesso em: 20 dez. 2017.

RODRIGUES, M. M. A. T. **A demonstração na prática social da aula de Matemática -** Volume 1. Tese (Doutorado em Educação: Especialidade de Didática de Matemática) – Faculdade de Ciências, Departamento de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008. Disponível em: < http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1593/1/17214_TESE_doutoramento_margarida_rodrigues_VOLUME_1.pdf>. Acesso em: 18 dez. 2017.

SÁ, F. B. **Aprendizagem de frações no ensino fundamental**. Trabalho de conclusão de graduação. Universidades Federal do Rio Grande do Sul, 2011. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/31633>. Acessado em: 21 set 2017.

VENTURA, H. M. G. L. **A Aprendizagem de Números Racionais através das Conexões entre as suas Representações: Uma Experiência de Ensino no 2.o Ciclo do Ensino Básico**. Tese (doutorado). Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, 2013. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/10661/1/ulsd067673_td_Helia_Ventura.pdf>. Acessado em: 18 agosto 2017.