ABORDANDO O CONCEITO DE CIRCUNFERÊNCIA E DEDUZINDO SUA EQUAÇÃO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Mário Barbosa da Silva[1]

GD n° 14 – Resolução de Problemas

Resumo: Documentos oficiais curriculares e a comunidade de pesquisadores em Educação Matemática têm enfatizado que os estudantes sejam envolvidos em atividades de resolução de problemas, assim como com as provas e demonstrações matemáticas associadas aos recursos tecnológicos. O presente trabalho, parte de uma pesquisa de doutorado em andamento, tem por objetivo analisar uma prática em sala de aula e as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas com a utilização do GeoGebra. Os resultados evidenciaram que essa metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação contribuiu tanto para a compreensão do conceito de circunferência quanto para a introdução dos aspectos demonstrativos aos estudantes, conforme os protocolos apresentados; além de favorecer o processo avaliativo ao professor, em relação ao desenvolvimento de toda a atividade realizada.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem. Circunferência. Resolução de Problemas. Demonstrações e Provas Matemáticas.

INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, é perceptível a preocupação da comunidade de pesquisadores em Educação Matemática com a melhoria da qualidade do ensino e aprendizagem de Matemática, diante das transformações sociopolíticas, econômicas, tecnológicas que estão ocorrendo no mundo. Além disso, os sistemas educacionais em diversos países passaram por reestruturação e os currículos foram reelaborados, para melhor preparar os (futuros) professores de Matemática a empregar métodos eficazes, visando ajudar os estudantes a enfrentarem novos desafios, desenvolver criatividade e o pensamento reflexivo. Diante desse cenário, a resolução de problemas pode ser uma estratégia de ensino e aprendizagem proeminente na compreensão do conteúdo matemático e, também, no desenvolvimento diversas habilidades cognitivas essenciais para preparar o estudante a enfrentar uma sociedade cada vez mais complexa e competitiva.

A literatura sobre Resolução de Problemas se constitui vasta e diversificada no âmbito da Educação Matemática, apontando sua eficácia no processo de ensino e aprendizagem tanto em território nacional (SILVA et al., 2023; NUNES et al., 2022; ALLEVATO; ONUCHIC, 2021;

[1]Instituto Federal de São Paulo – campus Itaquaquecetuba – IFSP; Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências; Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática; prof.mariodasilva@outlook.com; orientador(a): Profa. Dra. Norma Suely Gomes Allevato.

SILVA; ALLEVATO, 2021), quanto em internacional (LESTE; CAI, 2016; LILJEDAHL et al., 2016; VAN de WALLE, 2009), e sendo indicada como uma forma privilegia de aprendizagem em documentos oficiais (BRASIL, 2018; SÃO PAULO, 2019) e de orientação curricular (NCTM, 2000).

No contexto das provas e demonstrações matemáticas na Educação Básica, esses fatos são enfatizados também pela comunidade de pesquisadores em Educação Matemática (SILVA; JUNIOR, 2020; BALACHEFF, 2019; SILVA, 2016), recomendando que os estudantes sejam inseridos em atividades que visam a elaboração de argumentos, conjecturas e justificativas indutivas de suas resoluções, visando atingir a compreensão e a elaboração das deduções formais do que estão estudando. Ademais, pesquisadores em Educação Matemática, formadores de professores, os próprios professores e os futuros professores têm um desafio significativo de ajudar o estudante para que compreenda o raciocínio empregado na dedução e a importância da prova matemática (HANNA; DE VILLIERS, 2012).

Acreditamos na convergência íntima entre a resolução de problemas com a prova e a demonstração em Matemática, pois ambas apresentam similaridades no processo de ensino e aprendizagem em Matemática: o estudante deve refletir, raciocinar, investigar, criar e usar muita criatividade, tanto para encontrar a resposta para o problema como para o desenvolvimento da prova matemática.

Este trabalho tem por objetivo analisar uma prática em sala de aula e as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, segundo Allevato e Onuchic (2021), na construção do conhecimento matemático e na elaboração e compreensão da prova matemática, relacionada ao conceito de circunferência, trabalhado na Geometria Analítica.

Desse modo, na sequência desta introdução, realizamos uma discussão teórica, explicitamos como a resolução de problemas é tratada por alguns pesquisadores; posteriormente, abordamos as provas e as demonstrações no âmbito da Educação Matemática. Em seguida, apresentamos a metodologia de pesquisa, procedimentos adotados e as análises da atividade proposta. Explicitamos, então, as considerações finais e, por fim, as referências.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A resolução de problemas pode constituir-se em uma metodologia de ensino que promove a compreensão do conteúdo abordado em sala de aula, bem como a melhoria da qualidade de ensino e aprendizagem de Matemática.

Estes aspectos são evidenciados tanto nos documentos normativos brasileiros (BRASIL, 2018) quanto nas orientações curriculares americanas (NCTM, 2000), e nas pesquisas, onde a resolução de problemas são consideradas estratégias de aprendizagem que visam o pleno desenvolvimento intelectual e a criatividade do estudante, de forma mais complexa. Segundo Leikin (2016), a criatividade se apresenta como uma condição essencial na edificação do saber e desempenha um papel primordial para estabelecer conexões com as habilidades de provas matemáticas.

Cai e Lester (2012) apontam que o objetivo da resolução de problemas é promover desafios intelectuais aos estudantes a fim de que possam compreender os conteúdos matemáticos. Por sua vez, Allevato e Onuchic (2021, p. 53) são contundentes ao enfatizar que a resolução de problemas deve possibilitar "o desenvolvimento de processos sofisticados do pensamento matemático" e, também, "a resolução de problemas faz da compreensão seu foco central e seu objetivo".

Assim, em um ambiente de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, para essas pesquisadoras, a abordagem de um novo tópico matemático pode iniciar por um problema gerador[2]. Para Allevato e Onuchic (2021), a dinâmica dessa metodologia exige nova, postura tanto do estudante como do professor. O primeiro é o protagonista, o responsável e o interessado na construção do seu saber; enquanto o segundo deve preparar problemas geradores para desencadear o processo de ensino e aprendizagem estabelecido em seus objetivos, além de atuar como mediador, incentivador e questionador.

Para promover aprendizagem em sala de aula com essa metodologia, Allevato e Onuchic (2021) sugerem dez etapas:

> (1) proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) proposição e resolução de novos problemas. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021, p. 52)

Concordamos com essas pesquisadoras que, através dessa metodologia, ocorrerá a compreensão do conteúdo matemático; emergirão justificativas embasadas por meio de conceitos,

[2] Segundo Allevato e Onuchic (2021, p 49), "Esse problema inicial é chamado problema gerador, pois visa à construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento; ou seja, o conteúdo matemático necessário ou mais adequado para a resolução do problema ainda não trabalho em sala de aula".

para refutar ou não as resoluções apresentadas; será possível aprender diversas formas de resolução; e serão construídos dados avaliativos em todo o contexto da atividade.

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Provas e demonstrações matemáticas estão associadas à veracidade do conhecimento matemático, ou seja, à verdade matemática que, segundo Batistela, Barbariz e Lazari (2016), corresponde a apresentar, para uma dada proposição, uma afirmação verdadeira. Tais afirmações, nesse contexto, são formuladas na forma de demonstrações e elaboradas por meio de investigação utilizando o método axiomático dedutivo.

No âmbito educacional, além disso, as provas e as demonstrações matemáticas podem desempenhar um papel fundamental no desenvolvimento cognitivo e de habilidades de pensamento crítico e reflexivo; na compreensão dos conceitos matemáticos; na promoção da criatividade; no desenvolvimento de habilidades de comunicação; na resolução de problemas; e na promoção da autonomia e confiança dos estudantes. Nesse contexto, os Standards 2000[3] (NCTM, 2000) especificam que demonstração e prova precisam estar presentes em toda a formação matemática, desde a Educação Básica, pois são meios eficazes para explicar o raciocínio do estudante.

Para De Villiers (2001), as principais funções matemáticas que a demonstração apresenta no ensino escolar são as seguintes:

> **verificação** (dizendo respeito à verdade da afirmação); **explicação** (fornecendo explicações quanto ao facto de ser verdadeira; **sistematização** (a organização dos vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas); **descoberta** (descoberta ou invenção de novos resultados; **comunicação** (a transmissão do conhecimento matemático e o **desafio intelectual** (a realização pessoal/gratificação resultantes da construção de uma demonstração) (DE VILLIERS, 2001, p. 32) (grifo nosso).

Acreditamos também que, em um contexto de aprendizagem desencadeado pela resolução de problemas, isso possibilitará a compreensão do conceito matemático, bem como a compreensão e a elaboração das provas e demonstrações matemáticas. Isso se deve à existência de uma relação íntima entre seus objetivos nos processos de ensino e aprendizagem em Matemática. O estudante

---

[3]*Principles and Standards for School Mathematics (2000):* orientações e propostas curriculares para o ensino de matemática nos Estados Unidos da América, que foram desenvolvidos pelo *National Coucinl of the Teachers of Mathematics (NCTM).*

deverá elaborar uma argumentação para justificar, explicar as resoluções ou as refutações apresentadas, ou seja, precisará criar cuidadosamente estratégias de resolução tanto para encontrar a solução do problema como para a demonstração Matemática.

A relação entre resolução de problemas e provas matemáticas também é evidenciada no NCTM (2000, p. 406), pois “Por vezes, desenvolver uma demonstração é uma forma de analisar um problema”. No documento normativo brasileiro também é possível perceber essa relação ao enfatizar a necessidade de “[...] estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos” (BRASIL 2018, p. 529). Acreditamos que a resolução de problemas pode desencadear situações de aprendizagem visando tanto a compreensão do conteúdo matemático quanto das provas e das demonstrações.

Assim, nesta pesquisa, assumimos as funções de prova e de demonstração, conforme estabelecidas por De Villiers (2001). Isso significa que uma prova matemática deve comunicar, explicar, sistematizar, verificar e desafiar intelectualmente o estudante, desenvolvendo diversos aspectos cognitivos, além de promover a reflexão e a criatividade. Na sequência, apresentamos a metodologia de pesquisa e a análise de dados constituídos a partir da proposição de um problema gerador sobre circunferência, ou seja, um problema a partir do qual se desencadeou o processo de aprendizagem do conteúdo de circunferência.

METODOLOGIA DE PESQUISA

O estudo apresentado neste trabalho faz parte de uma pesquisa maior de doutorado. A prática relatada foi desenvolvida em oito encontros realizados no mês de agosto de 2023 e envolveu 74 estudantes de duas turmas de 3° ano do Ensino Médio do curso de Mecânica do Instituto Federal de São Paulo, campus Itaquaquecetuba, situado na região metropolitana de São Paulo, Brasil.

Trata-se de uma investigação qualitativa, que, de acordo com Borba, Almeida e Gracias (2018), tem como objetivo priorizar a compreensão da dinâmica do contexto da sala de aula, bem como as discussões e produções dos participantes que vivenciaram o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática.

Após serem fornecidas algumas orientações sobre a pesquisa, e terem realizado duas atividades sobre a construção das seções cônicas utilizando o GeoGebra, foi proposto o problema gerador apresentado no Quadro 1.

Quadro 1: Problema gerador sobre as emissoras de rádio

Duas emissoras de rádio, a primeira com uma potência que é o dobro da segunda, estão separadas por uma distância de 5 quilômetros. Sabe-se que a intensidade (***I***) com que um receptor recebe os sinais emitidos é proporcional à potência (***P***) e inversamente proporcional ao quadrado da distância (***d***) da emissora ao receptor segundo a equação: $\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{d}^2}$. a) Faça uma possível representação do problema utilizando o GeoGebra. Justifique sua resposta. b) Determine os pontos nos quais a qualidade de recepção das emissoras é a mesma. Justifique sua resposta. c) Utilizando o GeoGebra, faça a representação dessa situação com a resposta do item anterior e informe qual é o tipo da figura encontrada e os seus elementos; d) Explore o software de geometria dinâmica e crie novas figuras similares à situação expressa no problema justificando cada representação nova; e) A figura encontrada sugere qual significado em relação à situação expressa no problema? f) A expressão encontrada no item (b) pode ser representada de outra maneira? Como? g) No seu conhecimento, este novo conteúdo está relacionado com outro conceito matemático? Justifique sua resposta. h) Encontrar a expressão analítica que generaliza o item (b). Justifique sua resposta. i) Elabore um novo problema sobre o mesmo conteúdo que foi evidenciado nos itens anteriores para propor aos seus colegas.

Fonte: Adaptado de Giovanni; Bonjorno, 2005, p. 82

Tivemos por objetivo iniciar o novo conteúdo planejado por este problema gerador, conforme as recomendações de Allevato e Onuchic (2021), com foco na aprendizagem do conceito de circunferência e na dedução de sua equação, temas abordados na Geometria Analítica. Seguimos as dez etapas propostas pelas pesquisadoras para o desenvolvimento da atividade.

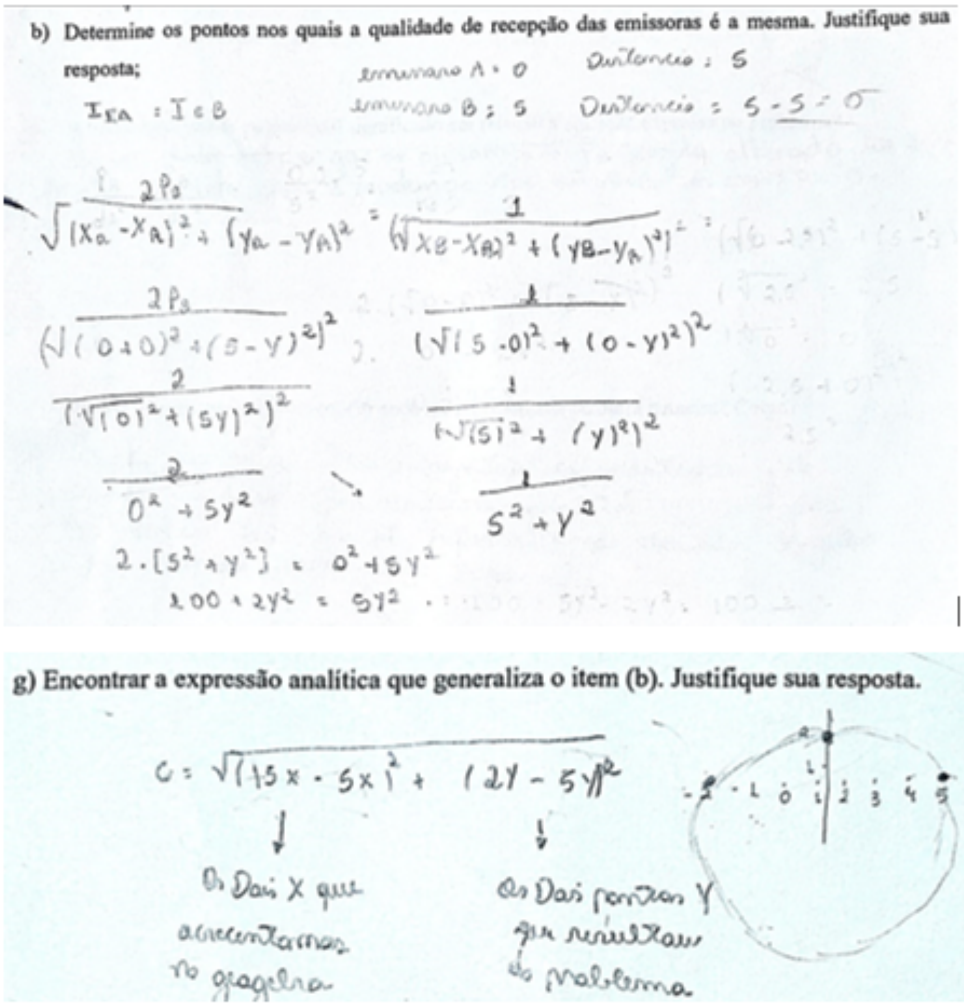
Cada estudante recebeu uma cópia desse problema gerador para leitura individual. Em seguida, em grupos[4], iniciaram a discussão e a resolução de cada item. Pressupomos que, após a resposta do item 'a', os estudantes poderiam encontrar dificuldades para desenvolver a resposta do próximo item, uma vez que uma possível estratégia para encontrar a solução seria utilizar o conceito de distância entre dois pontos.

Nesse momento, o pesquisador auxiliou a turma apresentando alguns questionamentos sobre o que significava a qualidade de recepção ser a mesma. Os estudantes informaram que seriam determinados locais, em que ambas emissoras apresentariam a mesma intensidade de sinal.

[4] No 3ºA foram formados nove grupos com quatro estudantes cada. No 3ºB, formaram sete grupos com quatro estudantes cada e dois grupos com cinco.

Utilizando a expressão informada no problema, o pesquisador perguntou como seria possível escrever isso. Os estudantes responderam: igualando ambas as intensidades, ou seja, $I_{EA} = I_{EB}$[5]. Após as dúvidas serem sanadas, os estudantes continuaram as resoluções e trabalharam por cinco encontros para finalizar a resolução do problema de todos os itens. Em seguida, ocorreu a plenária, na qual os grupos apresentaram suas resoluções para os colegas, registrando no quadro; e explicando o que haviam elaborado. Apresentação não teve uma ordem pré-estabelecida, tendo ocorrido conforme cada grupo se dispunha a apresentar seus resultados. A imagem a seguir reproduz as respostas do grupo 5 do 3ºA.

Figura 1: Resolução dos itens (b) e (g) do grupo 5

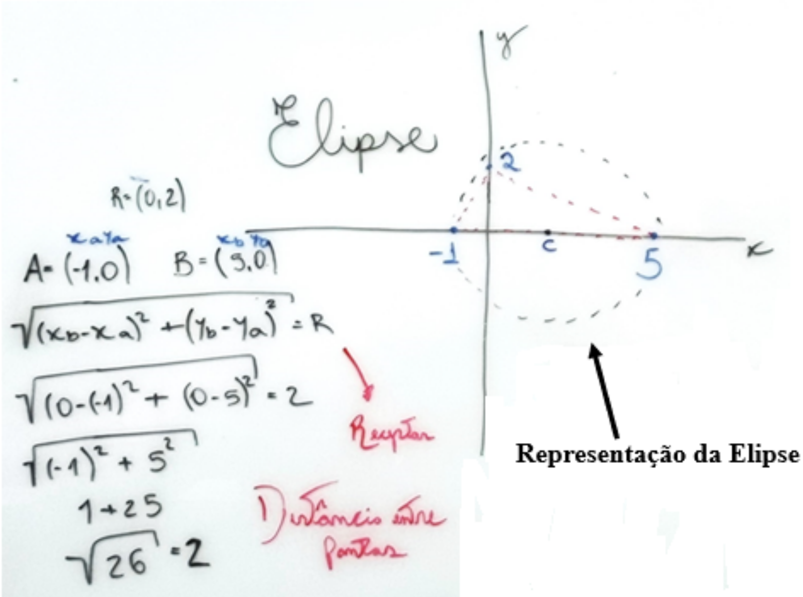


Fonte: Dados da pesquisa

[5] EA indica emissora A, enquanto EB representa a emissora B. Os estudantes para essa resolução, utilizaram "suas" notações, de acordo com a representação adotada no item 'a'.

No presente trabalho, vamos nos ater apenas nos itens (b) e (g), por serem suficientes para as discussões que aqui pretendemos realizar. Durante a plenária e na busca pelo consenso, a resolução apresentada gerou discussões envolvendo tanto a representação pictórica quanto a representação algébrica. Os estudantes resolvedores informaram que as emissoras estavam localizadas sobre o eixo da abscissa, e o receptor sobre o eixo da ordenada. Além disso, afirmaram que a figura que melhor representava a situação, no papel e lápis ou no GeoGebra, era a de uma circunferência. No entanto, o grupo 5 utilizou a representação de uma elipse na lousa, conforme a Figura 2.

Figura 2: Representação da situação problema no momento de plenária



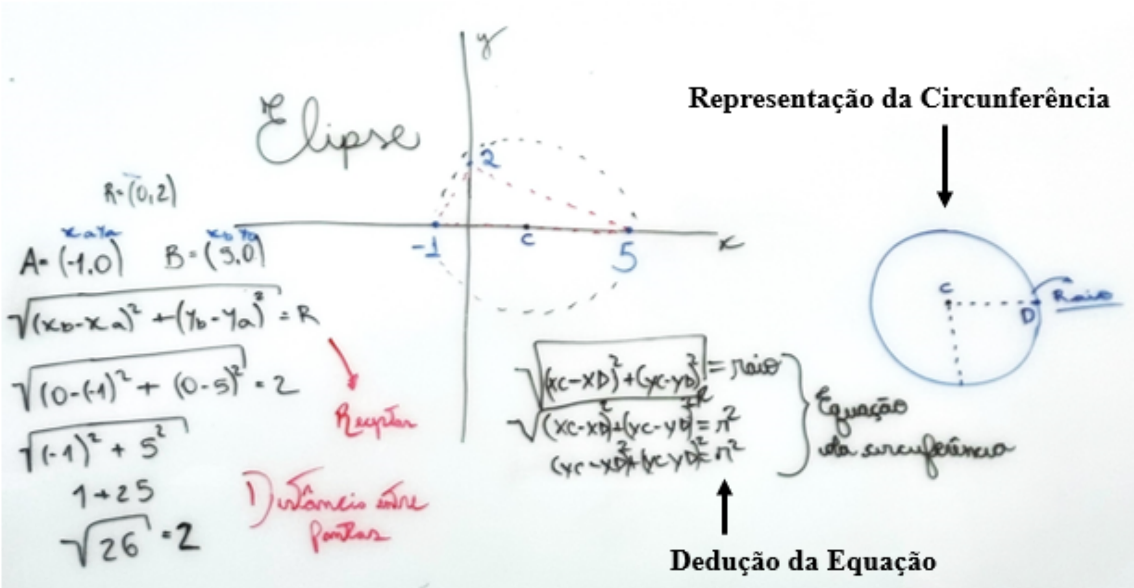
Fonte: Dados da pesquisa

A resolução desse grupo desencadeou uma discussão importante entre os estudantes. Tanto os membros do grupo quanto os outros estudantes presentes conseguiram compreender seus erros e corrigi-los. Por exemplo, o pesquisador fez a seguinte pergunta: como é possível argumentar ou justificar que a imagem no GeoGebra é uma circunferência? Após alguns instantes, uma aluna do grupo 7 respondeu: pela imagem, é possível verificar que a curva é uniforme sobre um dos eixos cartesianos formando um ângulo de 180º. Portanto, completando a outra semicircunferência de 180º, a soma das duas semicircunferências será de 360º, que é igual a uma circunferência completa.

Conforme apontam Allevato e Onuchic (2021, p. 50), o objetivo da plenária é fazer com que “[...] o professor estimule os alunos a compartilharem e justificarem suas ideias, defenderem pontos de vistas, compararem e discutirem as diferentes soluções, isto é, avaliarem suas próprias resoluções de modo a aprimorarem a apresentação (escrita) da resolução”.

Nesse momento, o pesquisador questionou e estimulou os estudantes do grupo 5 a apresentar uma possível definição para circunferência utilizando as coordenadas do ponto central C(a, b) e as coordenadas de um ponto P(x, y) da circunferência, e a realizar a dedução da sua equação, conforme a imagem da Figura 3.

Figura 3: Dedução da equação da circunferência do grupo 5



Fonte: Dados da pesquisa

Em primeiro lugar, as alunas do grupo 5 representaram uma circunferência na lousa, indicando o centro C, o ponto D na circunferência e o raio. Uma aluna do grupo 9 afirmou: “a distância do ponto D até o centro C é igual à medida do raio”. Ficou evidente após essa afirmação da aluna do grupo 9, que os estudantes compreenderam que a definição de circunferência está relacionada à distância entre o centro e os pontos na circunferência, sendo igual à medida do raio. Não apresentamos a definição nesse momento, pois isso ocorreria durante a formalização, que é a penúltima etapa da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, conforme proposto por Allevato e Onuchic (2021).

Como o auxílio do pesquisador, as estudantes iniciaram a dedução da equação da circunferência. Primeiro, elas indicaram a necessidade de começar usando a expressão que calcula a distância entre dois pontos, representando por C o centro, e por D os pontos da circunferência.

O grupo percebeu que essa expressão estava na lousa, mas com notação diferente $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = r$, e ajustaram usando nova notação: $\sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} = raio.$

Em seguida, o pesquisador questionou as alunas, se poderiam ou não deixar a raiz quadrada. Elas informaram que retirar a raiz quadrada seria melhor para facilitar o cálculo, quando fosse necessário. O pesquisador perguntou como podemos fazer isso, e elas responderam que poderiam elevar ambos os lados da igualdade ao quadrado, já que a potenciação é a operação inversa da radiciação. Elas escreveram $\left(\sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2}\right)^2 = r^2$. Por fim, concluíram a dedução e escreveram a expressão $(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 = r^2$.

Em consenso, os estudantes concluíram que os equívocos apresentados nas resoluções os levaram a, inicialmente, não encontrar a resposta correta para os itens (b) e (g); porém, contribuíram para sanar dúvidas, retificar suas respostas durante a plenária, relembrar conceitos que já haviam aprendidos anteriormente e aprender novos conceitos. Durante toda a atividade, foi possível evidenciar os esforços empenhados pelos estudantes para encontrar a resposta, enfrentaram desafios para ultrapassar obstáculos proporcionados pelo problema gerador além de aprender Matemática por essa metodologia de ensino. Ademais, a postura do pesquisador nesse contexto foi fundamental para que os estudantes compreendessem o conteúdo abordado, além de conduzi-los a desenvolver a construção da dedução da equação da circunferência.

Embora não sejam o foco deste estudo os processos avaliativos, foi possível evidenciar em todo o percurso da atividade as dúvidas e os equívocos dos estudantes e ajudá-los a superá-los. Por exemplo, na Figura 1, é possível identificar que o grupo 5 apresentou erros relacionados nas manipulações algébricas, produto notável, troca dos valores das coordenadas, possibilitando ao pesquisador realizar mediações que auxiliaram os estudantes a corrigir e compreender seus erros e avançar na construção do conhecimento (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021). Isso ressalta a importância não apenas de avaliar o resultado final, mas, também, de acompanhar o processo de aprendizagem e fornecer orientações quando necessário para promover um aprendizado eficaz.

CONSIDERAÇÕES

Este trabalho teve por objetivo analisar uma prática em sala de aula e as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, segundo Allevato e Onuchic (2021), na construção do conhecimento matemático e da elaboração e compreensão da prova matemática relacionada ao conceito de circunferência trabalhado na Geometria Analítica.

O caso da prática de aula analisada tanto no momento de plenária quanto no protocolo dos estudantes possibilitaram evidenciar o potencial da Metodologia na compreensão do conceito de circunferência e na dedução de sua equação. Ela conduziu os estudantes na construção de conhecimento matemático de forma consciente, responsável, criativa, diante dos objetivos estabelecidos pelo professor para a temática de aula, além do desenvolvimento da dedução formal e compreensão da equação da circunferência. Ressalte-se que, para promover os aspectos demonstrativo em sala de aula, o professor precisa ter a sensibilidade de orientar os estudantes e envolve-los com perguntas, para relacionar suas simbologias adotadas, redação, lógica da dedução com a temática de aula.

Cabe destacar, ainda, que, ao valorizar o protagonismo do estudante, as diferenças individuais nas resoluções do problema proposto, seus esforços e processos de pensamentos com a atividade proposta, a interação e a aprendizagem promovida no momento de plenária e na busca pelo consenso, bem como a aceitação do erro como um caminho que conduz ao conhecimento, foram habilidades relevantes para o desenvolvimento da compreensão do conteúdo abordado. Ademais, é possível nesse contexto, o professor avaliar e identificar os avanços, as compreensões, as descobertas, as deduções e as dificuldades apresentada pelos estudantes e ajudá-los em sua aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (org.): **Resolução de Problemas teoria e prática**. Paco Editorial, 2021, p. 37-58.

BALACHEFF, N. Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. In PILET, J.; VENDEIRA, C. (org.): **Actes du séminaire national de didactique des mathématiques**. ARDM et IREM de Pris-Université de Pari Dioderot, p. 423-456, 2019. Disponível em https://www.researchgate.net/publication/338751258_Controle_preuve_et_demonstration_Trois_regimes_de_la_validation. Acesso em: 21 mar. 2023.

BATISTELA, R. F.; BARBARIZ, T. A. M.; LAZARI, H. Um estudo sobre demonstração matemática por/com computador. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 11, n. 2, p. 204-215, 2016. Disponível em https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11nespp204/33446. Acesso em: 25 fev. 2023.

BORBA, M. C.; ALMEIDA, H. R. F. L.; GRACIAS, T. A. S. **Pesquisa em ensino e sala de aula**: Diferentes vozes em uma investigação. Autêntica, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Base Nacional Comum Curricular**. Matemática, Brasília: Versão completa MEC/SEB, 2018. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 10 nov. 2022.

CAI, J.; LESTER, F. Por que o ensino com a Resolução de Problemas é importante a aprendizagem do aluno? **Boletim GEPEM**. Rio de Janeiro, n.60, p. 241-254. 2012. Tradução de BASTOS, A. S. A. M. e ALLEVATO, N. S. G. Disponível em n. 60 (2012): BOLETIM GEPEM 60 | Boletim GEPEM (ufrrj.br). Acesso em: 10 nov. 2022

DE VILLIERS, M. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. In **Educação e Matemática: revistada Associação de Professores de Matemática**, Porto, n. 63, p. 31-36, 2001. Disponível em https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1013. Acesso em: 10 fev. 2023

HANNA, G.; DE VILLIERS, M. Aspects of Proof in Mathematics Education. In HANNA, G.; DE VILLIERS, M. (org.): **Proof and Proving in Mathematics Education**. Springer, p. 1-12, 2012.

LEIKIN, R. Interplay between creativity and expertise in teaching and learning of mathematics. In CSIKOS, C.; RAUSCH, A.; SZITÁNYI, J. (org.): **Proceeding of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Vol. 1, p. 19-34, 2016.

LESTER, F.; CAI, J. Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers froma 30 Years of Research. In: Felmer, P.; Pehkonen, E.; Kilpatrick, J. (org): **Posing and Solving Mathematical Problems**: Advances and New Perspectives. Springer, 2016, p. 117-135.

LILJEDAHL, P. et al. Problem solving in mathematics education. Springer Nature, 2016.

NATIONAL COUCINL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Principles and Standards for School Mathematics**, Reston, 2000.

NUNES, C. B. et al. Resolução de Problemas em sala de aula. **Com a Palavra, o Professor**, Vitória da Conquista, v. 7, n. 18, p. 57-59, edição especial, mai/aug. 2022

SÃO PAULO. Secretaria Municipal de Educação de São Paulo. **Orientações didáticas do Currículo da Cidade**: Matemática – volume 1, 2ed., São Paulo, SP, Prefeito de São Paulo, 2019. Disponível em: Acervo Digital (prefeitura.sp.gov.br). Acesso em: 12 nov. 2022

SILVA, M. B. et. al. Uma abordagem para o ensino de Geometria Analítica através da Resolução de Problemas. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 16, 2023, Lima. **Anais do 16º CIAEM**. Lima, Peru: ULIMA, 2023, p. 1-8.

SILVA, M. B.; ALLEVATO, N. S. G. O papel da resolução de problemas na aprendizagem matemática na atualidade. In: BASTOS, M. S.; MEDEIROS, L. T.; SILVA, A. B. S.; FARIAS, D. L. G. (Orgs). **Práticas pedagógicas na Educação Básica**. Divinópolis: Meus ritmos editora, 2021, p. 34-67.

SILVA, M. B. **O ensino da demonstração**: um Estado da Arte das pesquisas realizadas nos programas de pós-graduação em Educação Matemática no período de 2005 a 2015. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016.

SILVA, J.; JUNIOR, E. D. M. Demonstrações matemáticas no Ensino Médio: o que pensam e sentem os estudantes. **Revista Iberoamericana de Educação Matemática**, v. 16, n. 59, p. 204-226, 2020. Disponível em https://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/137. Acesso em: 20 mar. 2023.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino Fundamental**: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. Tradução: Paulo Henrique Colonese.