



# EBRAPEM027

Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática



## VERIFICAÇÃO DE PROPRIEDADES DA GEOMETRIA PLANA COM O GEOGEBRA DISCOVERY EM UM CONTEXTO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Daniel Mendes Inácio de Souza<sup>1</sup>

GD nº 06 – Educação Matemática, Tecnologias e Educação à Distância

**Resumo:** Este texto aborda os resultados parciais de uma pesquisa, em andamento, de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática, em um contexto de formação de professores das redes pública e privada de Ensino Básico e Superior, com a utilização de um *software* de geometria com representações dinâmicas. Na versão do GeoGebra Discovery foi adicionada um conjunto de recursos denominados de Ferramentas de Raciocínio Automatizado (ART, em inglês) que possibilitam a descoberta, conjectura, exploração e a verificação de propriedades ou teoremas da Geometria Plana. O curso de formação de professores ofertado, foi realizado por meio de encontros síncronos, com a utilização da plataforma *Microsoft Teams*, os participantes e os pesquisadores compartilhavam a tela do GeoGebra Discovery para desenvolver as atividades. A pesquisa é de natureza qualitativa, ou seja, possui um caráter descritivo e com foco nos processos que foram desenvolvidos, tendo como aporte metodológico *Design Research*. As análises foram subsidiadas pela teoria *Technological Pedagogical Content Knowledge* (TPACK). Para este trabalho, são apresentadas as etapas da investigação e as análises de uma das atividades realizadas por um dos participantes. Em relação aos resultados, estes indicaram que o docente possuía conhecimento tecnológico e do conteúdo e, além disso, evidenciou a necessidade de explorar os caminhos pedagógicos de abordar o GeoGebra Discovery em sala de aula, respaldando a continuidade do estudo.

**Palavras-chave:** GeoGebra Discovery. Formação de Professores. Geometria Plana. Educação Matemática e Tecnologias.

### INTRODUÇÃO

O presente trabalho apresenta resultados preliminares de uma investigação inserida em uma dissertação de mestrado em desenvolvimento, na qual se propõem investigar a aplicação dos recursos disponibilizados no *software* GeoGebra Discovery, uma versão experimental do GeoGebra oficial, em uma formação de professores voltada para Geometria Plana, em especial, a descoberta e a verificação de propriedades e teoremas.

Mesmo que esses recursos estejam em processo de aperfeiçoamento pelos desenvolvedores do GeoGebra (HOHENWARTER; KOVÁCS; RECIO, 2019), eles possuem relevância no campo da Educação Matemática, visto que as tecnologias digitais têm ocupado espaço e motivado a realização de novas pesquisas, como o caso do GeoGebra

---

<sup>1</sup>Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP; Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática; Mestrado Acadêmico; [danielmisouza@outlook.com.br](mailto:danielmisouza@outlook.com.br); orientadora: Celina Aparecida Almeida Pereira Abar.

e outros aplicativos que permitem uma exploração mais interativa com o ambiente, possibilitando que o ensino e a aprendizagem de matemática se tornem personalizados (PEREIRA, 2012).

Os Sistemas de Geometria Dinâmica (DGS) são reconhecidos como ferramentas digitais de significativa importância para o ensino e o aprendizado de Geometria. López (2001) destaca que desde sua concepção, tais sistemas proporcionam oportunidades para desenvolver nos estudantes a habilidade de visualização geométrica e experimentação. Os DGS contemporâneos evoluíram ao ponto de incluir recursos de raciocínio automatizado, que permitem a descoberta, verificação automática e com rigor matemático de teoremas e propriedades da Geometria (KOVÁCS; RECIO; VÉLEZ, 2022).

O objetivo desse estudo é investigar a utilização e a integração dos recursos do GeoGebra Discovery em processo de formação de professores de matemática.

No intento de alcançar o objetivo desse estudo, tem-se a seguinte questão de pesquisa: Como os professores de matemática interagem com os recursos do GeoGebra Discovery, relacionando os conhecimentos tecnológicos, pedagógicos e de conteúdos específicos da matemática em um curso de formação de professores?

Neste contexto, a pesquisa tem como suporte metodológico o *Design Research*, pois na visão de Collins, Joseph, Bielaczyc (2004) essa abordagem permitiu um refinamento progressivo ao longo das etapas da investigação.

Para analisar os dados coletados recorreu-se à teoria TPACK (sigla em inglês para *Technological Pedagogical Content Knowledge*), proposta por Mishra e Koehler (2006), pois esse aporte teórico permite identificar quais conhecimentos pedagógico, tecnológico e do conteúdo os participantes da pesquisa dominam e utilizados ao longo do curso de formação ou que ainda não conseguiram desenvolver e quais as dificuldades estão envolvidas com a utilização do *software*.

## O GEOGEBRA DISCOVERY

O GeoGebra Discovery, uma versão experimental do GeoGebra, ainda não disponibilizada no *software* oficial e em processo de aprimoramentos foi incorporado um conjunto de recursos e comandos, as denominadas Ferramentas de Raciocínio Automático



(ART, em inglês), que proporcionam ao usuário uma verificação matemática (ou seja, a Prova Automática de Teorema (ATP, em inglês) e a descoberta automática de proposições gerais acerca de elementos da geometria euclidiana. Essas ferramentas e comandos disponíveis no Menu ou por meio do Campo de Entrada permitem que o usuário automaticamente conjecture, explore, interaja, descubra, formule hipóteses e verifique declarações exibidas pelo *software* sobre diferentes informações de uma determinada construção geométrica.

O conjunto de ART do GeoGebra Discovery, até o momento, é composto de algumas ferramentas e comandos denominados de: *Relation*, *LocusEquation*, *Prove* e *ProveDetails*, *Discover* e *Compare*. (KOVÁCS, 2021; KOVÁCS; RECIO; VÉLEZ, 2022).

Alguns recursos básicos de raciocínio automatizado estão disponíveis no GeoGebra Clássico; no entanto, outros comandos das ART podem ser encontrados no GeoGebra Discovery, disponível em <http://autgeo.online/geogebra-discovery/>, o qual foi utilizado nesta pesquisa.

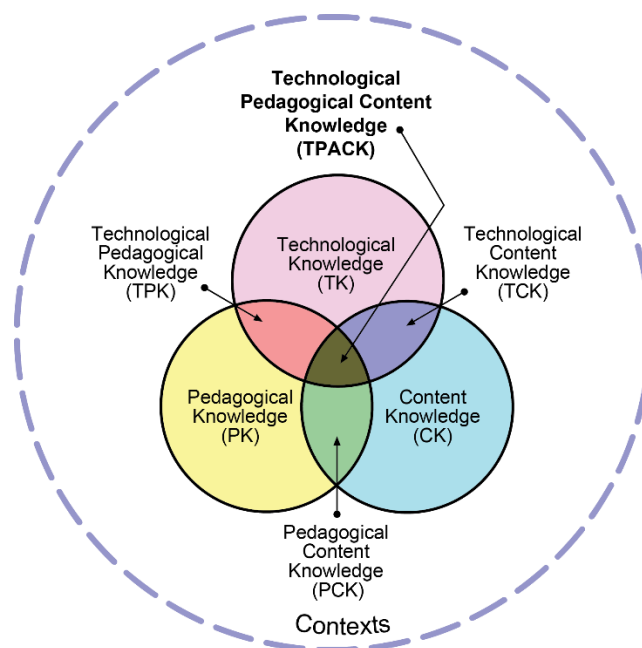
## CONSIDERAÇÕES SOBRE A TEORIA TPACK

O modelo TPACK de Mishra e Koehler (2006) tem o propósito de estudar a combinação das tecnologias com os conhecimentos das práticas pedagógicas e os conteúdos específicos a serem ensinados. Assim, permite compreender e descrever os diferentes tipos de conhecimentos essenciais para um professor alcançar uma prática pedagógica efetiva em um ambiente de aprendizagem e que utilize tecnologia. Conforme os autores defendem em seu trabalho as tecnologias passam por constantes mudanças, tal característica é inerente ao conhecimento tecnológico, dessa forma, exige do professor uma contínua atualização.

Esse modelo é uma expansão do trabalho desenvolvido por Shulman (1986), pois verifica-se que esse aporte teórico trabalha com o conhecimento do profissional docente recorrendo à integração simultânea e relacional de três vertentes: conteúdo, pedagogia e tecnologia, conforme a Figura 1.



**Figura 1:** A estrutura da teoria TPACK e seus componentes de conhecimento



Fonte: Koehler e Mishra, 2009, p. 63.

Tendo em vista a figura exposta, segundo Mishra e Koehler (2006), pode-se identificar três áreas de conhecimento: o conhecimento pedagógico (*Pedagogical Knowledge – PK*) envolve o conhecimento das práticas e estratégias de ensino; o conhecimento de conteúdo (*Content Knowledge – CK*) refere-se ao domínio dos conteúdos específicos da disciplina ministrada; e o conhecimento tecnológico (*Technological Knowledge – TK*) está ligado à compreensão das ferramentas e tecnologias e como utilizá-las de forma eficaz.

Ao se unirem, essas três grandes áreas do conhecimento originam, conforme Mishra e Koehler (2006), o conhecimento tecnológico pedagógico (*Technological Pedagogical Knowledge – TPK*) que envolve o saber da escolha e de como usar as ferramentas tecnológicas na promoção do processos de ensino e aprendizagem; o conhecimento tecnológico de conteúdo (*Technological Content Knowledge – TCK*) está ligado à capacidade de utilizar as tecnologias para ensinar e facilitar a compreensão de um determinado conteúdo; o conhecimento pedagógico de conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge – PCK*) refere-se a como ensinar determinado conteúdo de maneira eficiente, considerando as características e as necessidades dos alunos; e, por fim, o conhecimento



tecnológico e pedagógico do conteúdo (*Technological Pedagogical Content Knowledge – TPACK*), ponto central da teoria TPACK, pois representa uma integração holística das habilidades que envolvem os aspectos tecnológicos, pedagógicos e de conteúdo do professor, a fim de se aprimorar a aprendizagem dos estudantes.

Em suma, a teoria TPACK reconhece que o uso efetivo da tecnologia na educação não se trata apenas de saber como usar ferramentas tecnológicas, mas também de entender como incorporar tais ferramentas de forma significativa no ensino, considerando o conteúdo a ser ensinado e as estratégias pedagógicas mais adequadas (NAKASHIMA; PICONEZ, 2016).

## **METODOLOGIA**

A metodologia adotada para esta pesquisa de cunho qualitativo (CRESWELL, 2014) é o *Design Research* ou *Design Experiments*, introduzida por Ann Brown e Allan Collins, em 1992. Collins, Joseph e Bielaczyc (2004) apontam que esse aporte metodológico tem como intuito o refinamento de estudos e projetos educacionais, considerando como base investigações realizadas anteriormente.

Neste sentido, Collins, Joseph e Bielaczyc (2004), destacam que o *Design Research* foi construído para auxiliar pesquisas formativas, ou seja, para aprimorar e refinar projetos educacionais com embasamento em investigações científicas e observações progressas. Assim, também se torna possível realizar aperfeiçoamentos e adequações de acordo com as contribuições decorrentes dos *feedbacks* fornecidos pelos sujeitos envolvidos no estudo. Essa metodologia alicerçou a proposta oferecida e descrita a seguir, em sua construção, organização e no desenvolvimento do curso de formação de professores.

## **PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS**

O curso de formação de professores foi ofertado para docentes das redes pública e privada de Ensino Básico e Superior por integrantes do grupo de pesquisa Tecnologias Digitais na Educação Matemática (TecDEM) do Programa de Estudos Pós-Graduados em



Educação Matemática da PUC-SP sobre GeoGebra Discovery no contexto da Educação Matemática.

O curso foi desenvolvido por meio de encontros síncronos, via *Teams*, com o compartilhamento de tela da janela do GeoGebra Discovery para que os participantes pudessem acompanhar e interagir durante o desenvolvimento das atividades e execução das construções. Com o intuito dos participantes terem um maior contato com o *software* eles realizavam o compartilhamento de tela para desenvolver algumas atividades, podendo ocorrer variações dessas dinâmicas, por exemplo, um professor compartilhava a tela enquanto outro professor informava as instruções para conduzir a construção.

Destaca-se que no contexto da Educação Matemática os participantes da pesquisa são os primeiros a participarem de um processo de formação de professores com a integração dos recursos do GeoGebra Discovery, sendo assim, para este trabalho, apresenta-se uma das atividades desenvolvidas com os docentes durante um dos encontros síncronos.

#### ***Atividade desenvolvida com os professores***

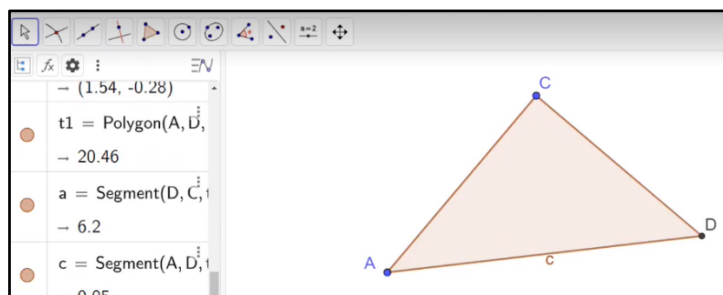
A pesquisadora, que ministrava o curso, compartilhou a tela do GeoGebra Discovery e solicitou para que um dos professores, denominado de P1, conduzisse a próxima atividade, indicando a ela quais os passos deveriam ser executados para que se pudesse verificar a seguinte propriedade da Geometria Plana: “A medida da mediana relativa ao vértice oposto da hipotenusa de um triângulo retângulo, é igual à metade da medida da hipotenusa”, tal propriedade foi indicada pelo próprio docente como uma das tarefas a serem realizadas nos momentos de estudo ao longo da semana, entre um encontro e outro.

O participante P1 verbalizou as seguintes instruções para construir o triângulo retângulo: “[Traçar] *uma reta passando por dois pontos A e B; um ponto fora da reta [ponto C]; [traçar] a reta AC; [traçar] a reta perpendicular à reta AC, passando por C e, por fim, marcar a intersecção da primeira e da terceira [retas]*”. O ponto de intersecção entre as retas mencionadas originaram o ponto *D*. Na sequência, a professora utilizou a ferramenta Polígono, disponível no Menu, para construir o triângulo *ACD* que é retângulo em *C* e ocultou alguns



objetos (as retas, os rótulos dos lados  $AC$  e  $CD$  e o ponto  $B$ ), a fim de deixar a construção mais organizada, conforme a Figura 2.

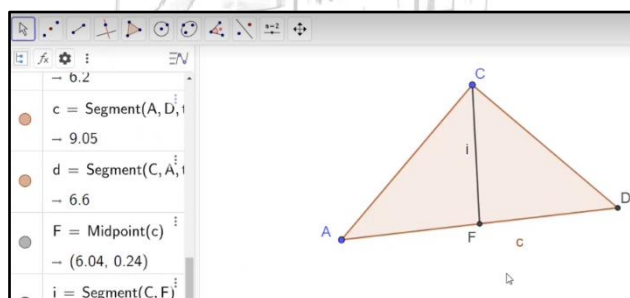
**Figura 2:** Triângulo retângulo construído por P1



Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência, P1 solicitou que se utilizasse a ferramenta Ponto Médio na hipotenusa  $AD$ , originando o ponto  $F$  e, posteriormente, construísse o segmento  $CF$ , que é a mediana relativa à hipotenusa, como ilustrada na Figura 3.

**Figura 3:** Construção da mediana relativa ao vértice oposto a hipotenusa



Fonte: Dados da pesquisa.

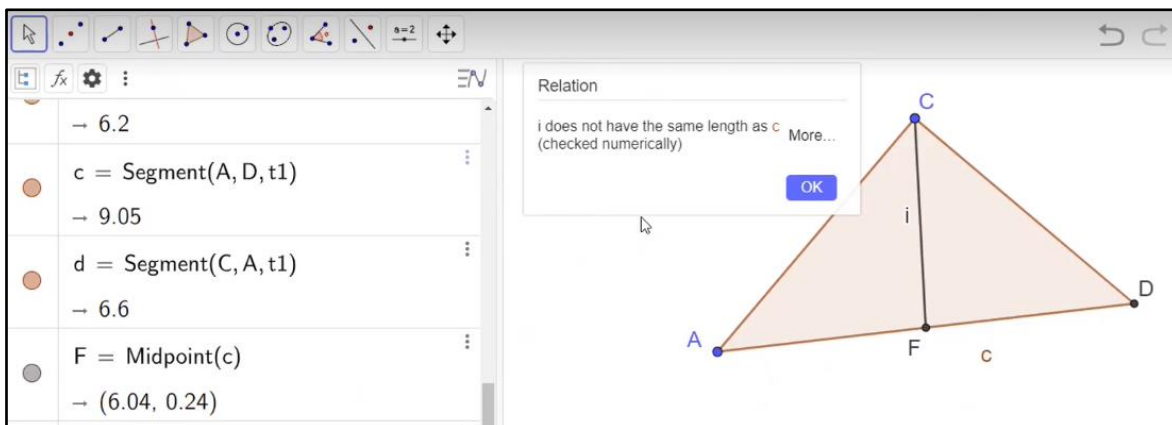
Após a construção do segmento  $i$ , o docente P1 proferiu “ $i$  é igual à metade de  $c$ ”, então a professora ressaltou que tal informação seria verificada pelo *software*. Na Barra de Entrada do GeoGebra Discovery ela digita o comando *Relation* ( $\langle object \rangle$ ,  $\langle object \rangle$ ) e, em prosseguimento, indica que os objetos seriam os segmentos  $i$  e  $c$ , respectivamente, e tecla *Enter*.

Depois de digitar o comando *Relation* ( $i$ ,  $c$ ) e teclar *Enter* o sistema do GeoGebra Discovery aciona automaticamente um subsistema interno, as ART, que fornece como reposta uma janela com a seguinte informação “ $i$  não possui o mesmo comprimento que  $c$



(verificado numericamente)”, e ao lado um botão com *More...*, como pode-se observar na Figura 4.

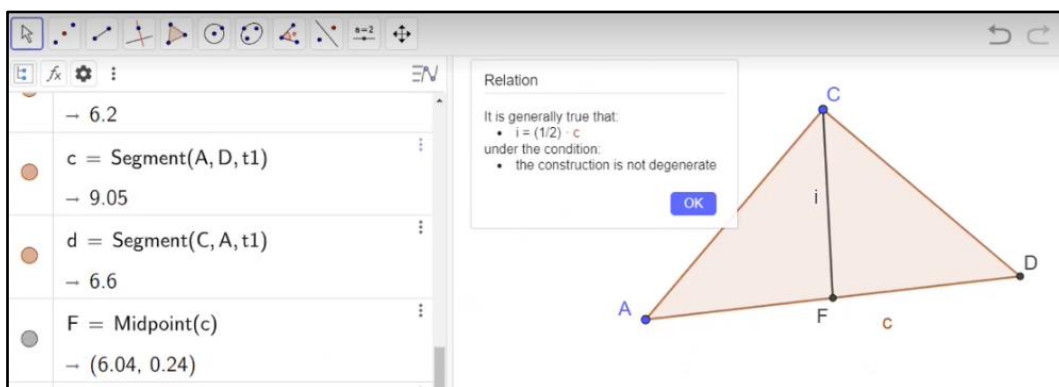
**Figura 4:** Resposta do GeoGebra Discovery em relação ao comando *Relation*



Fonte: Dados da pesquisa.

Foi realizada a leitura das informações da tela apresentada e, na sequência, a docente clicou no *More...*, e a tela trouxe novas informações, Figura 5, as quais foram lidas: “é geralmente verdadeiro que  $i = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot c$ , sob a condição que a construção é não degenerada”, dessa forma, verificando por meio do *software* a propriedade demandada. Cabe salientar que os demais participantes assentiam com a cabeça em conformidade e entendimento em relação ao desenvolvimento da atividade proposta.

**Figura 5:** Resposta do GeoGebra Discovery após clicar no botão *More ...*



Fonte: Dados da pesquisa.



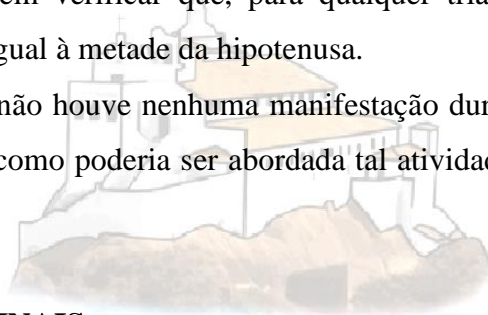


### *Análise da atividade desenvolvida com os professores*

Tendo em vista a atividade e as interações desenvolvidas, com base no modelo TPACK de Mishra e Koehler (2006), observa-se que o docente conseguiu mobilizar os conhecimentos tecnológicos, relacionados ao *software* GeoGebra, apresentou conhecer e como utilizar as ferramentas do Menu para que pudesse conduzir a construção de um triângulo retângulo, em um ambiente de representações dinâmicas, ponto crucial na verificação da propriedade.

Além disso, nota-se que existe pertinência no teorema escolhido para ser trabalhado durante o encontro síncrono, pois está relacionado à Geometria Plana e, conseqüentemente, possuía conhecimento matemático, que segundo os autores Mishra e Koehler (2006), referem-se ao saber ligado aos conteúdos específicos da área, para verbalizar os caminhos necessários que pudessem verificar que, para qualquer triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa é igual à metade da hipotenusa.

Ressalta-se que não houve nenhuma manifestação durante a realização da referida proposta no sentido de como poderia ser abordada tal atividade com os alunos em sala de aula.



### **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Com base na proposta apresentada, as ponderações realizadas pelos participantes da pesquisa e nas análises já produzidas, em especial, neste artigo, pondera-se que ocorram promissoras contribuições para o aprimoramento da prática docente permeada pelas tecnologias digitais, particularmente, o GeoGebra Discovery para conjecturar, descobrir e verificar propriedades da Geometria Plana.

As contribuições do aporte teórico do TPACK, proposto por Mishra e Koehler (2006), sugerem caminhos a serem observados para analisar os dados coletados do curso de formação de professores. Visto que os processos de ensino e aprendizagem estão envoltos de tecnologias, os docentes necessitam desenvolver um base de conhecimento, que forneça a eles, as condições de conduzirem a aprendizagem de seus discentes de maneira eficaz e com maior qualidade. Dessa forma, novos estudos estão em andamento e indicam



contribuições significativas no processo de ensino e aprendizagem no contexto da Educação Matemática e Tecnologias.

## REFERÊNCIAS

COLLINS, A.; JOSEPH, D.; BIELACZYK, K. Design Research: Theoretical and Methodological Issues. **Journal of the Learning Sciences**, v. 13, n. 1, p. 15–42, jan. 2004.

CRESWELL, J. W. **Investigação Qualitativa e Projeto de Pesquisa: escolhendo entre cinco abordagens**. 3. ed. Porto Alegre: Penso Editora, 2014.

HOHENWARTER, M.; KOVÁCS, Z.; RECIO, T. Determinando propriedades geométricas simbolicamente com GeoGebra. **Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas**. España, v. 100, p.79-84, maio 2019. Quadrimestral. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/14720/1/Hohenwarter2019Determinando.pdf>. Acesso em: 12 maio 2023.

KOEHLER, M. J.; MISHRA, P.. What is technological pedagogical content knowledge? **Contemporary Issues In Technology And Teacher Education**, [S. l.], v. 9, n. 1, p. 60-70, jan. 2009.

KOVÁCS, Z. Sobre um problema que não era interessante para Erdős. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, [S. l.], v. 10, n. 1, p. 5–18, 2021. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/54107>. Acesso em: 10 maio 2023.

KOVÁCS, Z.; RECIO, T.; VÉLEZ, M. P. Automated Reasoning Tools with GeoGebra: what are they? What are they good for? **Mathematics Education In The Age Of Artificial Intelligence**, [S. l.], p. 23-44, 2022. Springer International Publishing. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/188016037.pdf>. Acesso em: 12 maio 2023.

LÓPEZ, M. J. G. Gestión de la Clase de Geometría Utilizando Sistemas de Geometría Dinámica. In: GÓMEZ, P.; RICO, L. **Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro**. Granada: Universidad de Granada, 2001. p. 277-290. Disponível em: <https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprenggeom/archivos2/homenaje/19Gonzalez-LopezMJ.PDF>. Acesso em: 22 maio 2023.

MISHRA, P., KOEHLER, M. Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge. **Teachers College Record**, v. 108, n. 6, p. 1017-1054, 2006.

NAKASHIMA, Rosária Helena Ruiz; PICONEZ, Stela Conceição Bertholo. Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK): modelo explicativo da ação docente. **Revista Eletrônica de Educação**, [S. l.], v. 10, n. 3, p. 231-250, 2016. Disponível em: <https://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/1605/524>. Acesso em: 15 jul. 2023.



PEREIRA, T. L. M. **O uso do software GeoGebra em uma escola pública**: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio. 2012. 122 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012. Disponível em: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/1790>. Acesso em: 01 ago. 2023.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986. Disponível em: [https://depts.washington.edu/comgrnd/ccli/papers/shulman\\_ThoseWhoUnderstandKnowledgeGrowthTeaching\\_1986-jy.pdf](https://depts.washington.edu/comgrnd/ccli/papers/shulman_ThoseWhoUnderstandKnowledgeGrowthTeaching_1986-jy.pdf). Acesso em: 12 jul. 2023.



**XXVII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**  
Tema: Desafios educacionais e impactos Sociais das Pesquisas em Educação Matemática.  
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática / Instituto Federal do Espírito Santo - IFES-Vitória-ES  
12, 13 e 14 de outubro de 2023 – presencial.