VI SIPEM
Pirenópolis - Goiás
SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Desenvolvimento de Material para o Ensino de Conceitos do Cálculo Diferencial

[1]Sonia Barbosa Camargo Igliori, [2]Marcio Vieira de Almeida

[1]Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil
sigliori@pucsp.br

[2]Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil
marcioalmeidasp@gmail.com

Palavras-chave:

Ensino do Cálculo, Gênese Documental, Organizadores Genéricos, Raízes Cognitivas.

Keywords

Teaching of Calculus, Documental Genesis, Generic Organizer, Cognitive roots.

RESUMO

Este artigo se insere no âmbito das pesquisas sobre o ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino superior, em especial ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Exatas. O objetivo é apresentar elementos que possibilitem o desenvolvimento de materiais para esse ensino visando a melhoria das condições de aprendizagem. A problemática da pesquisa envolve a necessidade existente e propalada de integrar teoria e prática no campo da Educação Matemática e para tanto a necessidade de produzir materiais de ensino baseados em resultados de pesquisas. As respostas ao enfretamento dessas necessidades foram construídas tendo como suporte as referências da Gênese Documental, formulada por Gueudet e Trouche, e das noções de organizadores genéricos e raízes cognitivas, desenvolvidas por Tall e seus associados. Consta do artigo a apresentação de elementos que compõem um material que explora a relação entre continuidade e diferenciabilidade de funções de uma variável real.

ABSTRACT

This paper in the context of the researches related the teaching and learning of Mathematics on tertiary education, namely the teaching and learning of Differential and Integral Calculus in the context of Exact Sciences. The objective is to exhibit elements that enable the development of materials for this teaching aimed at improving the learning conditions. The problematization of this research involving the existing and touted necessity to integrate theory and practice in the field of mathematics education and to both the need to produce teaching materials based on research findings. Coping responses to these needs were built having as support the references of Genesis Documentary, formulated by Gueudet and Trouche, and the notion of generic organizer and cognitive roots, by Tall and his associates. In this article, it is presented elements that compose a material that explore the relationship between continuity and differentiability of one valued function.

Introdução

Este artigo se insere no âmbito das pesquisas sobre o ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Superior, em especial no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral[1] nos cursos de Exatas. O objetivo é apresentar elementos que possibilitem o desenvolvimento de materiais para esse ensino visando a melhoria das condições de aprendizagem.

No artigo são exibidos elementos que compõem a problemática da pesquisa, o quadro teórico que referencia a pesquisa, e elementos que compõem o material que será desenvolvido.

No caso desta pesquisa a problemática envolve: a necessidade de integrar teoria e a prática no campo da Educação Matemática e nas pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem do Cálculo e a necessidade de produzir materiais para o ensino baseados em resultados de pesquisas do campo da Educação Matemática.

Para pontuar o primeiro elemento da problemática é trazida a posição da pesquisadora Barbara Jaworski, em relação ao que tem sido feito no campo da Educação Matemática. Segundo essa autora, o campo da Educação Matemática:

> [...] tem se tornado maduro em suas considerações teóricas. Entretanto, a posição do ensino da Matemática permanece teoricamente anômala e não desenvolvida. Enquanto teorias proveem-nos lentes para analisar o ensino (LERMAN, 2001), as "grandes teorias" não parecem oferecer percepções claras para o ensino e maneiras nas quais o ensino vise à promoção da aprendizagem na Matemática (JAWORSKI, 2006, p. 188, tradução nossa).

Jaworski (2006) sugere que os professores podem utilizar a investigação no ensino da Matemática para explorar o desenvolvimento e a realização de tarefas, problemas e atividades em sala de aula. Os pesquisadores devem utilizar a investigação como uma ferramenta para capacitar os professores para o desenvolvimento do ensino.

No caso das pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem do Cálculo Rasmussen, Marrangelle e Borba ressaltam que "é fundamentalmente importante que o corpo de pesquisa em ensino, aprendizagem e entendimento do Cálculo contribua com a prática educacional de estudantes que estão matriculados em cursos de Cálculo a cada ano" (RASMUSSEN; MARRANGELLE; BORBA, 2014, p. 507, tradução nossa).

Rasmussen, Marrangelle e Borba revelam que pesquisas sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo têm apresentado quatro padrões: pesquisas em que foi objetivado identificar e estudar dificuldades e obstáculos cognitivos dos estudantes; pesquisas em que foram

[1] Ao longo deste texto, poderemos nos referir ao "Cálculo Diferencial e Integral" por apenas "Cálculo".

investigados processos pelos quais os estudantes aprendem um conceito particular; estudos empíricos, que incluem reflexão sobre os efeitos de inovações curriculares e pedagógicas na aprendizagem dos estudantes; e mais recentemente, o último padrão identificado é composto por pesquisas relacionadas à busca dos conhecimentos, crenças e práticas dos professores. Considerando esses padrões de pesquisa, Rasmussen, Marrangelle e Borba entendem que em vista da profundidade do que é conhecido sobre a aprendizagem dos alunos, obtidos a partir das pesquisas anteriores, especialmente, daquelas conduzidas nas décadas de 80 e 90, é necessário que os pesquisadores do campo da Educação Matemática no Ensino Superior se engajem no desenvolvimento de projetos de pesquisa abrangentes, nos quais os matemáticos e os educadores matemáticos trabalhem em conjunto com vistas a abordarem questões relacionadas ao ensino e aprendizagem do Cálculo tanto de natureza teórica quanto de natureza pragmática.

Em Robert e Speer (2000) é reforçada a urgência da integração teoria e prática nas pesquisas do ensino de Cálculo. No trabalho dessas autoras foram destacadas duas categorias de pesquisa para o ensino e aprendizagem do Cálculo e da Análise. A primeira incluía pesquisas guiadas por teorias, e a outra por pesquisas guiadas pela prática. Essa categorização não implicava em dizer separação, uma vez que Robert e Speer entendiam que essas duas abordagens são complementares e que o campo de pesquisa da Educação Matemática "vai fazer progressos no ensino e na aprendizagem, de maneira eficaz, só se tratar, de forma significativa, com as questões teóricas e pragmáticas simultaneamente" (ROBERT; SPEER, 2001, p. 297, tradução nossa).

É possível detectar nos dois trabalhos expostos (ROBERT; SPEER, 2001; RASMUSSEN; MARRANGELLE; BORBA, 2014) a seguinte constatação: a necessidade de se valorizar, nas pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem do Cálculo, a produção de conhecimento para a melhoria da prática.

Outro ponto que integra a problemática desta pesquisa é a existência da necessidade de produzir materiais e propostas de abordagens de ensino de tópicos da Matemática no Ensino Superior. Um fator de estímulo para a produção de materiais está no fato de que é necessário abordar em materiais de ensino diferenças na maneira pela qual cursos de Matemática, em Nível Superior, são ministrados e nas expectativas dos professores em relação à aprendizagem dos alunos.

Mamona-Downs e Downs (2002) destacam, tendo por base comentários de estudantes, diferenças na aprendizagem da Matemática de Nível Básico para o Superior. A primeira é que as práticas de ensino, de Nível Superior, exigem uma participação independente do estudante em sua aprendizagem, a qual muitos estudantes não estão acostumados. Nesse aspecto, os autores relatam o seguinte sentimento dos estudantes: "Eles sentem que a própria natureza do material ensinado mudou radicalmente, e eles não entendem completamente como, por que e como lidar com essa mudança" (MAMONA-DOWNS; DOWNS, 2002, p. 98, tradução nossa).

As reflexões sobre as diferenças entre as abordagens da Matemática do Ensino Básico e do Superior e da necessidade de considerar aspectos teóricos e práticos nas investigações, apoiam a decisão de considerar como elemento de pesquisa a criação de materiais, fundamentados teoricamente e que levem em consideração a transição entre a Matemática Básica e a Matemática Superior.

É com o desenvolvimento de tais materiais que vislumbramos uma maneira de tornar acessível, o que foi produzido pelos pesquisadores, aos professores. Essa preocupação encontra respaldo no que foi discuto por Fey (1994) sobre a implicação dos estudos psicológicos para o ensino e aprendizagem da Matemática escolar, ao dizer que:

> No entanto, longe de fornecer uma orientação clara para a construção de estratégias de ensino e ambientes de aprendizagem adequados, os resultados são mais sugestivos do que prescritivos – incompletos e muitas vezes contraditórios. Um desenvolvedor de currículo ou professor que se volta para a Psicologia para insights sobre o ensino de ideias matemáticas e métodos fundamentais de raciocínio vai encontrar teorias provocativas, mas também um grande desafio para traduzir essas teorias em práticas de sala de aula (FEY, 1994, p. 20, tradução nossa).

Com base nos elementos apresentados nesta seção é assumido que uma maneira, apesar de desafiante, de traduzir as teorias em práticas de sala de aula é elaborar materiais de ensino, por meio de um processo de produção fundamentado na Gênese Documental, proposta por Gueudet e Trouche (2009), e nas indicações teóricas desenvolvidas por David Tall e seus associados, que compõe o quadro teórico, desta pesquisa, apresentado na próxima seção.

Quadro Teórico

Para Severino um quadro teórico, numa pesquisa qualitativa, constitui-se como "o universo de princípios, categorias e conceitos, formando sistematicamente um conjunto logicamente coerente, dentro do qual o trabalho do pesquisador se fundamenta e se desenvolve" (SEVERINO, 2000, p. 162). Esse quadro possui a função de servir como diretriz e orientação do percurso da pesquisa e não de subjugar, de maneira mecânica e formal, o pensamento criativo do pesquisador.

Sriraman e English (2010) destacam que uma teoria pode ser utilizada como uma ferramenta e destacam os seguintes papéis da teoria:

> (a) conceber maneiras para melhorar o ambiente de ensino/aprendizagem incluindo a currículo, (b) desenvolver metodologia, (c) descrever, interpretar, explicar e justificar observações, em sala de aula, de estudantes e atividades dos professores (d) transformar problemas práticos em problemas de pesquisa, (e) definir diferentes passos no estudo de um problema de pesquisa, e (f) gerar conhecimento (SRIRAMAN; ENGLISH, 2010, p. 13, tradução nossa).

Os elementos teóricos, que compõem o quadro teórico da pesquisa, tem o papel de ferramenta, conforme exposto por Sriraman e English, na medida em que a pesquisa envolve concepção, de maneira a melhorar o ambiente de ensino/aprendizagem, de materiais de ensino para o Cálculo. O quadro teórico é composto de dois elementos: a Gênese Documental e elementos teóricos desenvolvidos por Tall.

A Gênese Documental embasa a maneira pela qual o material de ensino para os conceitos do Cálculo, objetivado na pesquisa aqui apresentada, é produzido.

Segundo Gueudet e Trouche, a documentação elaborada por professores, para preparar sua aula, está no cerne tanto das atividades quanto do desenvolvimento profissional do professor (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 199). O trabalho de documentação, definido pelos autores, constitui-se em: buscar por novos recursos, selecionar e criar tarefas matemáticas, planejar sequências nas quais as atividades serão desenvolvidas, gerenciar o tempo disponível e a administração dos artefatos disponíveis.

O processo de Gênese Documental produz o que é chamado de documento e pode ser representado pela expressão:

$$\textit{Documentos} = \textit{Recursos} + \textit{Esquema de utilização} \qquad (1)$$

O termo recurso, para Gueudet e Trouche, é utilizado para descrever uma variedade de artefatos que pode ser utilizada por um professor. Um recurso pode ser, por exemplo, um livro texto, uma aplicação produzida num *software*, uma lista de exercícios que será resolvida pelos alunos, uma discussão com outros professores, etc... Um recurso nunca é isolado, mas sim um conjunto de recursos, e o professor esboça num conjunto de recursos seu trabalho de documentação.

De maneira complementar,

> [...] um recurso pode ser um artefato, ou seja, o resultado da atividade humana elaborada por uma atividade humana, com um objetivo preciso. Mas os recursos superam artefatos: a reação de um estudante, uma vara de madeira no chão também pode constituir-se como recursos, por um professor que os adote em sua atividade (GUEUDET; TROUCHE, 2012, p. 204, tradução nossa).

O esquema de utilização indicado em (1), é um componente psicológico definido por Vergnaud "como uma organização invariante do comportamento do sujeito para uma classe de situações" (VERGNAUD, 1998, p. 229).

Gueudet e Trouche representam o processo de Gênese Documental, pelo seguinte esquema (Figura 1):

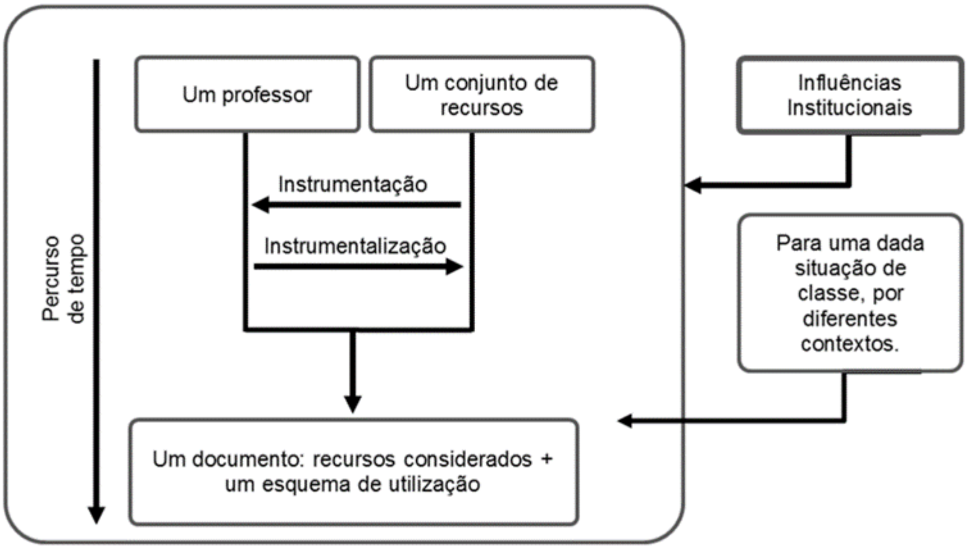

Figura 1 – Representação esquemática da Gênese Documental.
Fonte: GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 206, tradução nossa.

O processo de Gênese Documental não pode ser considerado como uma transformação na qual um conjunto de recursos é dado como entrada e um documento como saída (GUEUDET; TROUCHE, 2009). Esse processo é contínuo cujo desenvolvimento ocorre durante a utilização de determinado documento. Gueudet e Trouche (2009) defendem a existência de uma relação dialética entre os recursos e os documentos e que a elaboração de documentos é dada em longo prazo.

Durante o processo de Gênese Documental, devem ser levados em consideração três componentes, que são entrelaçados, na consideração de um conjunto de recursos, ou um documento: material; matemática e a componente didática.

A componente material é composta por materiais que serão utilizados para o desenvolvimento de uma atividade, por exemplo, papel, computador, fichários, etc.

As noções matemática envolvidas, tarefas e técnicas matemáticas necessárias compõem a componente matemática de um dado conjunto de recursos, ou documento.

Na componente didática devem ser levados em consideração aspectos institucionais que influenciam o trabalho do professor em sala de aula. Gueudet e Trouche definem que essa componente é composta por "elementos organizacionais, que vão desde o mapeamento do ano ao planejamento de uma única sessão de uma hora" (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 207, tradução nossa).

Com esse elemento teórico é pretendido desenvolver materiais de ensino. Eventualmente, é possível sugerir que as pesquisas, desenvolvidas por pesquisadores da Educação Matemática, podem ser incluídas no repertório de recursos de um professor. Ademais, resultados de pesquisas também podem auxiliar na formulação de uma justificativa para o desenvolvimento de determinado recurso.

Outros elementos teóricos, que referenciam esta pesquisa, são a noção de organizadores genéricos e raízes cognitivas.

A noção de organizador genérico, que é definida como "um ambiente (ou micromundo[2]) que permite ao aprendiz manipular exemplos e (se possível) contraexemplos de um conceito matemático específico ou de um sistema de conceitos relacionados" (TALL, 2000, p. 10, tradução nossa, grifo do autor). O termo "genérico" foi utilizado para denotar que a atenção do aluno é dirigida a determinado aspecto dos exemplos considerados e esses aspectos devem incorporar elementos do conceito abstrato objetivado pelo professor/pesquisador (TALL, 1986). Exemplos de organizadores genéricos são: o material Cuisenaire[3] e os Blocos de Dienes[4].

Outro exemplo de um organizador genérico é um *software* que dá retorno imediato às alterações realizadas pelo usuário, como o *software* GeoGebra, aquele pelo qual o material de ensino pretendido será desenvolvido. Em vista das funcionalidades disponíveis no GeoGebra, determinada aplicação construída nele pode ser um organizador genérico. Contudo, essa aplicação deve levar em consideração a seleção de uma ideia importante e essencial, que será o foco da atenção do estudante. Ideia essa que não é necessariamente fundamental para a teoria matemática pretendida, porém, ela auxilia o sujeito a desenvolver intuições apropriadas ao desenvolvimento teórico.

Tall alerta que no desenvolvimento de um organizador genérico devem ser considerados elementos que sejam utilizados para o favorecimento do desenvolvimento formal teórico da Matemática, pois:

[2]Esse termo é utilizado pelo pesquisador no sentido que Papert (1980, p. 117 *apud* TALL, 1986) como "um mundo autossuficientes no qual certas questões são relevantes e outras não".
[3]É constituído de dez prismas retangulares com tamanhos diferentes e coloridos com cores distintas. Cada barra representa um número natural. O idealizador do material é o professor belga Georges Cuisenaire Hottelet.
[4]Conhecidos também por Blocos Lógicos, eles foram criados na década de 50 pelo matemático húngaro Zoltan Paul Dienes. Eles são um conjunto de pequenas peças geométricas divididas em quadrados, retângulos, triângulos e círculos.Com eles é possível trabalhar com as crianças as primeiras operações lógicas como correspondência e classificação de objetos.

> [...] um organizador genérico está devidamente projetado e o agente de organização atua de forma eficaz, a compreensão intuitiva das ideias oferecidas pelo organizador pode fornecer uma base sólida para o desenvolvimento posterior da teoria formal. Isso pode depender muito da ação do agente organizador que tenta garantir que as propriedades não-genéricas do organizador não atuem como distratores e causem obstáculos (TALL, 1986, p. 85, tradução nossa).

Conceitos e noções que podem ser utilizados no desenvolvimento de um organizador genérico são denominados por raiz cognitiva, sendo essa "uma unidade cognitiva que é (potencialmente) significativa ao estudante naquele momento, no entanto deve conter sementes de uma expansão cognitiva para definições formais e desenvolvimento teórico futuro" (TALL, 2000, p. 11, tradução nossa).

Um exemplo de raiz cognitiva é a noção de retidão local. Ela é originada a partir da percepção de que quanto maior a ampliação do gráfico menor será a curvatura percebida na representação gráfica de uma função (TALL, 1989). Segundo Tall, a noção de retidão local deve ser levada em conta no ensino por dois motivos: o primeiro é que por meio dela seria possível contornar algumas das "conhecidas dificuldades conceituais dos alunos em compreender o conceito de limite" (DUBINSKY; TALL, 1991, p. 238, tradução nossa); o outro seria porque essa noção "permite que a função gradiente seja vista como a mudança do gradiente do próprio gráfico" (TALL, 2000, p. 12, tradução nossa, grifo do autor). Nesse sentido, a representação gráfica de função diferenciável, quando ampliada suficientemente, assemelha-se localmente a um segmento de reta. Observe a Figura 2, nela é possível perceber que dada a representação gráfica de uma função diferenciável, localmente, assemelha-se a um segmento de reta:

Figura 2 – Uma pequena parte da curva assemelha-se a um segmento de reta.
Fonte: TALL, 2013, p. 11.

Pela retidão local é possível inferir que uma função que é contínua num determinado ponto e não diferenciável nele, localmente, possui uma representação gráfica, que não se assemelha a um segmento de reta e até a conjecturar como seria a representação gráfica de uma função contínua e não diferenciável, exemplo explorado na próxima seção.

Elementos para o Desenvolvimento do Material de Ensino

Os elementos tratados aqui servirão de base para a formulação de um documento, no sentido de Gueudet e Trouche (2009), que visa abordar a relação entre os conceitos de continuidade e diferenciabilidade. A seguir são apresentadas componentes que foram utilizados no desenvolvimento desse material e considerações sobre a maneira pela qual o material pretendido pode ser elaborado.

A componente material desse documento é o computador munido do *software* GeoGebra, por meio dos quais pode ser explorada tanto a construção quanto a representação de uma função contínua e não diferenciável. As noções matemáticas envolvidas são: a continuidade e a diferenciabilidade de função real. Entra em jogo a discussão sobre a condição suficiente, porém não necessária para a continuidade da função ou seja o teorema: Seja *f*: $(a,b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$, se *f* é diferenciável em x_0 então *f* é contínua em x_0

Outra noção importante para a atividade é a da retidão local. Com o material, baseado nessa noção, é possível imaginar a representação gráfica tanto de uma função diferenciável quanto de uma função não diferenciável em determinado ponto do domínio. Para que a diferenciabilidade não ocorresse, a representação gráfica dessa função deveria permanecer "com bicos", não importando o quanto essa função fosse ampliada.

A relação entre os conceitos de continuidade e diferenciabilidade de uma função real, é dada pelo teorema apresentado anteriormente, por uma condição suficiente. A recíproca desse teorema, ou seja a condição necessária, é falsa, pois existem funções contínuas e não diferenciáveis em todo ponto de seu domínio. Em geral, o exemplo de uma função contínua e não diferenciável em um ponto de seu domínio é a função modular $h(x) = | x |$ no ponto x=0. Objetivando ampliar a compreensão do aprendiz sobre a noção de diferenciável, é pretendido promover o estudo de uma função contínua e não diferenciável em todos os pontos do domínio: a função "manjar branco". A partir desse exemplo, segundo David Tall, é possível formular "uma explicação conceitual da continuidade e da diferenciabilidade que são formalmente corretas e têm uma interpretação pictórica adequada" (Tall, 1982, p. 11, tradução nossa).

A função "manjar branco", denotada por *b*, é uma função definida no intervalo fechado [0,1] que assume valores no conjunto dos números reais. Ela é definida como o limite da série de funções em cada ponto do intervalo, isto é:

$$b(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \tag{2}$$

com $f_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} f(2^{n-1} \cdot x)$ e f é uma função real de uma variável real definida por $f(x) = |x - \{x\}|$. Na Figura 3 são representados o primeiro e o trigésimo termos da série de função[5]:

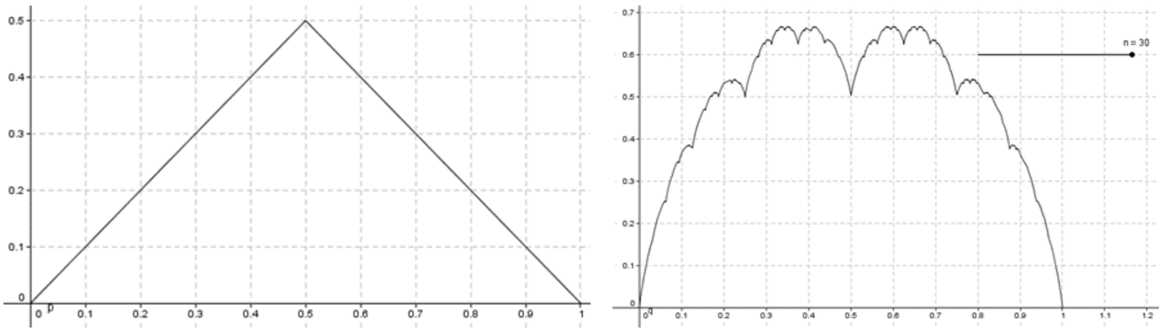

Figura 3 - O primeiro termo (esquerda) e o trigésimo termo (direita) da série de funções cujo limite é a função "manjar branco".
Fonte: Produção nossa.

É fato que a representação, por si só, não explica o por que a função "manjar branco" é contínua e não diferenciável em todos os pontos de seu domínio, fato que pode ser demonstrado posteriormente. Mas a discussão sobre sua existência e os passos de sua construção podem motivar os alunos. O material aqui apresentado pode auxiliar o professor a desenvolver, no aprendiz, conceitos imagens ricos relativamente aos conceitos matemáticos, na medida em que é explorado um exemplo significativo do ponto de vista teórico, da relação continuidade e diferenciabilidade.

Com este trabalho espera-se contribuir com a produção de documentos para o ensino do Cálculo com vistas a favorecer o desenvolvimento de novas abordagens que para a Educação Matemática no Ensino Superior, no que se refere especialmente à desejada relação teoria e prática.

Referências Bibliográficas

DUBINSKY, E.; TALL, D.. Advanced Mathematical Thinking and the Computer. In: TALL, David (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking.** New York: Kluwer Academic Publishers, 1991. Cap. 14. p. 231– 243. (Mathematics Education Library).

FEY, J. Y. Eclectic approaches to elementarization: cases of curriculum construction in the United States. BIEHLER, R. et al. (Orgs) **Didatics of Mathematics as a Scientific Discipline**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 15 – 26, 1994.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Teachers' Work with Resources: Documentational Geneses and Professional Geneses. In: GUEDET, G; PEPIN, B.; TROUCHE, L. **From Text to 'Lived' Resources**: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development. Dordrecht: Springer Netherlands, 2012. p. 23 – 41. (Mathematics Teacher Education). Disponível em: <http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-007-1966-8_2>. Acesso em: 08 jun. 2015.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Towards new documentation systems for mathematics teachers?. **Educational Studies in Mathematics**, v. 71, n. 3, p. 199– 218, 2009.

IGLIORI, S. B.; ALMEIDA, M. V. A Utilização do GeoGebra para a Construção da Representação de um Exemplo de Função Contínua Não Diferenciável. **Anais da V Jornada Nacional de Educação Matemática**: V JNEM. Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo. 2014, p.1 – 15.

JAWORSKI, B. Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 9, p.187 – 211, 2006. Disponível em: <http://link.springer.com/article/10.1007/s10857-005-1223-z>. Acesso em: 08 jun. 2015.

MAMONA-DOWNS, J.; DOWNS, M. Advanced mathematical thinking with a special reference to reflection on mathematical structure. In. ENGLISH, Lyn D. (Ed.) **Handbook of International Research in Mathematics Education**. New Jersey: Lawrence Erlbaum, p. 165 – 198, 2002.

RASMUSSEN, C.; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go?. **ZDM**, v. 46, n. 4, p. 507 - 515, 2014.

ROBERT, A.; SPEER, N. Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary Analsys. In: HOLTON, D. (Ed.) **The Teaching and Learning of Mathematics at University Level – an ICMI study.**, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001. p. 283 – 299.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico**. 21. ed. São Paulo: Cortez, 2000.

SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. Surveying Theories and Philosophies of Mathematics Education. In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. (Eds.). **Theories of Mathematics Education:** Seeking New Frontiers.

Berlin/Heidelberg: Springer, 2010. p. 7– 32. (Advances in Mathematics Education). Disponível em: <http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-00742-2_2>. Acesso em: 08 jun. 2015.

TALL, D. A sensible approach to the calculus. F. Pluvinage & A. Cuevas (Eds.), **Handbook on calculus and its teaching**. México: Pearson. 2013. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2012z-sensible-calculus.pdf>. Acesso em: 08 jun. 2015.

TALL, D. Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In: ASIAN TECHNOLOGY CONFERENCE IN MATHEMATICS, 5, 2000, Chiang Mai. **Proceedings**... Blackwood: ATCM Inc, 2000. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2000h-plenary-atcm2000.pdf>. Acesso em: 08 jun. 2015.

TALL, D. **Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics**. 1986. 505 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – University of Warwick, Inglaterra, 1986.

TALL, D. O. The Blancmange Function Continuous Everywhere but Differentiable Nowhere. **The Mathematical Gazette**, v. 66, n. 435, p. 11– 22, 1982. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1982a-blancmange.pdf>. Acesso em: Acesso em: 08 jun. 2015.

VERGNAUD, G. Toward a cognitive theory of practice. In. SIERPISKA, A; KILPATRICK, J. (Eds.), **Mathematics education as a research domain: A search of identity**. Dordrecht: Kluwer. p. 227 – 241. 1998.