Anais do V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

28 a 31 de outubro de 2012
Petrópolis, Rio de janeiro, Brasil
Hotel Vale Real - Rodovia BR 040, Km 62 - Itaipava

TRANSIÇÃO DO ENSINO MÉDIO PARA O SUPERIOR: COMO MINIMIZAR AS DIFICULDADES EM CÁLCULO?

Lilian Nasser
Projeto Fundão, Universidade Federal do Rio de Janeiro e CETIQT/SENAI – Brasil
lnasser@im.ufrj.br

Geneci Alves de Sousa
Projeto Fundão, CETIQT/SENAI, UNIABEU, SEEDUC/RJ e SME/RJ – Brasil
prof.geneci.@yahoo.com.br

Marcelo André Torraca
Projeto Fundão, CETIQT/SENAI, UVA e SEEDUC/RJ – Brasil
torraca@gmail.com

RESUMO

Os altos índices de evasão e repetência na primeira disciplina de Cálculo no curso superior têm sido tema de pesquisas nacionais e internacionais, buscando identificar as razões para esses problemas. O baixo desempenho de alunos calouros em Cálculo é atribuído, em geral, a lacunas na aprendizagem de Matemática na Escola Básica. O objetivo desta pesquisa, desenvolvida no âmbito do Projeto Fundão (IM/UFRJ), é investigar como se dá a transição do Ensino Médio para o Superior, e empreender ações para diminuir esses índices. A prontidão para a aprendizagem de Cálculo depende de vários conteúdos trabalhados na Escola Básica. A Geometria, em particular, aborda problemas que podem preparar para a representação de problemas típicos de máximos e mínimos e de taxas relacionadas. Por outro lado, o tópico de funções é abordado no Ensino Médio de modo pontual, não estimulando uma visão abrangente, necessária ao domínio do pensamento matemático avançado, inerente ao estudo de Cálculo. Portanto, este trabalho mostra que as dificuldades na transição para o Ensino Superior, em especial na disciplina de Cálculo, podem ser amenizadas por abordagens adequadas de tópicos do Ensino Médio, tais como Funções e Geometria.

Palavras-chave: Cálculo, transição, funções, gráficos

ABSTRACT

The high indices of evasion and repetition in the first discipline of Calculus have been the focus of national and international research, which try to identify reasons for these problems. The poor performance of freshmen pupils in Calculus is attributed, in general, to the gaps in the learning of Mathematics at the Basic School. The aim of this research, developed in the scope of Projeto Fundão (IM/UFRJ), is to investigate the transition from high school to college, and to undertake actions to diminish those indices. The promptitude for the learning of Calculus depends on some contents studied at the Basic School. Geometry, in particular, explores problems that can anticipate the representation of typical Calculus problems of maximums and minimums and of related taxes. On the other hand, the topic of functions is taught at high school in a point wise way, not stimulating a global vision, needed for the advanced mathematical thinking, inherent to Calculus. Therefore, this research intends to investigate if the difficulties in the transition for Superior Education, in special in the discipline of Calculus, can be brightened up by suitable approaches of various topics at high school, as Functions and Geometry.

Keywords: Calculus, transition, functions, graphs

1 Introdução

Esta pesquisa foi motivada pela observação realizada pelos membros do grupo (docentes que ensinam Cálculo em Instituições de Ensino Superior (IES) do Rio de Janeiro) em relação às dificuldades, cada vez mais graves, apresentadas pelos alunos ingressantes, na primeira disciplina de Cálculo. Há relatos de que os alunos não sabem calcular o valor de uma função num ponto dado e não têm ideia de como traçar gráficos simples, nem de completar o quadrado de uma expressão.

Os altos índices de evasão e repetência nessa disciplina têm sido tema de estudos nacionais e internacionais, que investigam as causas das dificuldades apresentadas. Para amenizar tal situação, várias estratégias têm sido empreendidas, tal como a inclusão de disciplinas de Matemática Básica (também chamadas de pré-Cálculo ou Cálculo 0). Em alguns casos, são oferecidas atividades concomitantes de monitoria ou mesmo cursos de Fundamentos ou Complementos de Cálculo. Entretanto, a solução para minimizar esse problema ainda está por ser encontrada.

Alguns professores do grupo também são professores de Matemática da rede pública de Ensino Médio, e tentam justificar o baixo desempenho dos alunos no Ensino Superior pelas condições adversas que enfrentam para ensinar os tópicos necessários para que os alunos possam, no futuro, lidar com o pensamento matemático avançado. Uma das professoras do grupo leciona no Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (CAp-UFRJ), que adota um ensino diferenciado para a Matemática do Ensino Médio e cujos alunos têm um bom desempenho nas avaliações oficiais e no vestibular de modo geral.

O grupo, então, decidiu investigar se as dificuldades na transição para o Ensino Superior, em particular na disciplina de Cálculo, podem ser amenizadas por uma abordagem adequada de tópicos do Ensino Médio, como Funções e Geometria.

2 Referencial Teórico

Esta investigação se caracteriza como uma “pesquisa sobre a própria prática” (PPP), uma vez que os pesquisadores são os próprios docentes de Cálculo ou do Ensino Médio (rede estadual do RJ ou CAp-UFRJ). De acordo com Ponte (2004),

> cada vez mais professores empreendem pesquisas sobre a sua própria prática profissional. Fazem-no porque sentem necessidade de compreender melhor a natureza dos problemas com que se defrontam, para poder transformar a sua prática e as suas condições de trabalho. (PONTE, 2004, p. 1)

De fato, o que motivou o grupo para o desenvolvimento deste estudo foi a observação das dificuldades apresentadas por alunos nas disciplinas de Cálculo e as boas perspectivas de um enfoque diferenciado adotado no Ensino Médio do CAp-UFRJ.

Analisando os desafios enfrentados por alunos ao iniciar os estudos em Matemática avançada, Robert e Schwarzenberger (1991) apontam mudanças quantitativas:

> mais conceitos, menos tempo, necessidade de mais reflexão, mais abstração, menos problemas significativos, mais ênfase em demonstrações, maior necessidade de aprendizagem versátil, maior necessidade de controle pessoal

> sobre a aprendizagem. A confusão causada pelas novas definições coincide com a necessidade de mais pensamento dedutivo abstrato. A junção dessas mudanças quantitativas gera uma mudança qualitativa que caracteriza a transição para o pensamento matemático avançado. (ROBERT e SCHWARZENBERGER, 1991, p. 133)

Em sua tese de doutorado, Rezende (2003) afirma que as dificuldades em Cálculo são de natureza epistemológica, requerendo uma preparação anterior ao início dos estudos de Cálculo. Ele sugere que um trabalho no Ensino Médio sobre a variabilidade de funções pode facilitar a aprendizagem nessa disciplina.

Outra pesquisa sobre o tema foi desenvolvida por Palis (2010), com enfoque nos cursos de pré-Cálculo da PUC-Rio, indicando a tecnologia como ferramenta que pode auxiliar no domínio de funções e seus gráficos.

Nasser (2009) investigou o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos, constatando que as dificuldades se devem, principalmente, à falta de preparação prévia e sugere ações que podem ajudar a superá-las, como "desenvolver estratégias de ensino apropriadas, de acordo com os estilos de aprendizagem dos alunos, em particular, enfatizando exercícios sobre transformações de gráficos" (NASSER, 2009, p. 54). Nessa abordagem, os alunos chegam ao gráfico pretendido por meio de transformações nos gráficos básicos. São mostrados exemplos de gráficos de retas, parábolas e funções envolvendo $ln\ x$ e e^x, obtidos por esse processo. Mais adiante, em Cálculo III, a pesquisadora relata como o mesmo procedimento facilitou a identificação de parabolóides, cones, cilindros e esferas por meio de transformações de superfícies centrais básicas (NASSER, 2009, p.52).

De acordo com Sierpinska (1992), há 16 obstáculos a se transpor para a aquisição do conceito de função. Um desses obstáculos é a concepção ingênua de que "o gráfico de uma função não precisa ser exato". Essa concepção explica alguns dos problemas observados nas tentativas de alunos de Cálculo I ao traçar gráficos de funções simples como $f(x)=\frac{1}{x}$ ou das funções seno e cosseno. Outro obstáculo apontado por Sierpinska é a concepção de que "apenas relações representáveis por fórmulas analíticas são dignas de serem chamadas funções". De fato, muitos alunos só reconhecem como funções as relações que são representadas por uma expressão algébrica, e apresentam dificuldades, por exemplo, ao lidar com funções definidas por várias sentenças.

Even (1990) também observou essas concepções em sua pesquisa. Ela relata a dificuldade de futuros professores em decidir se

$g(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \text{ é um número racional} \\ 0, \text{ se } x \text{ é um número irracional} \end{cases}$ é ou não uma função. Checando com a definição de função, um sujeito da pesquisa afirmou que é uma função, já que "há uma imagem única para cada número" (p. 528). No entanto, na tentativa de traçar o gráfico dessa função, esse futuro professor marcou alguns números irracionais no eixo dos x: π, $\sqrt{3}$, $\frac{7}{4}$ (considerando uma fração imprópria como um número irracional) e esboçou uma parte da reta $y = x$ com buracos, conforme ilustrado a seguir na Figura 1.

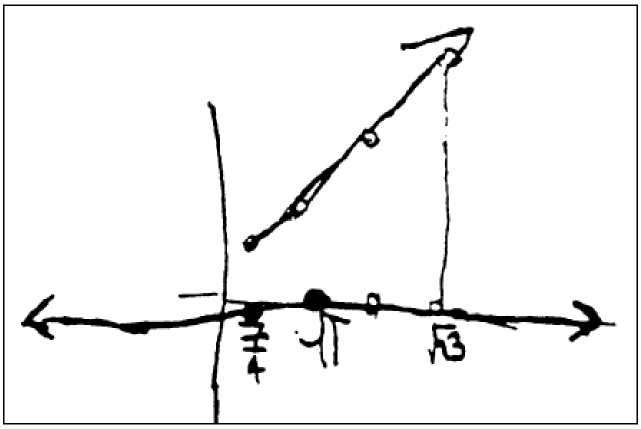


Figura 1 – Gráfico de um futuro professor para a função g(x).

Even (1990) afirma ainda que

> essa situação é compreensível – quase todas as funções encontradas por alunos do Ensino Médio e mesmo de faculdades são do tipo que têm um gráfico "simples" e podem ser descritas por uma fórmula, de modo que o seu conceito imagem de uma função é determinado pelas funções que eles vivenciam, e não pela definição moderna de uma função, que enfatiza a sua natureza arbitrária. (p. 529)

Observa-se que a maioria dos problemas do Cálculo depende de uma representação visual adequada, como os problemas típicos de "máximos e mínimos", de "taxas relacionadas" e de "área entre curvas". Em geral, a dificuldade dos alunos nesses problemas não é na aplicação do conceito de derivada ou de integral, mas na sua representação geométrica e na identificação de relações entre os elementos da figura. Balomenos, Ferrini-Mundy e Dick (1994) afirmam que muitos professores não percebem a ligação da geometria do Ensino Médio com a matemática do Curso Superior. Vários conceitos fundamentais de Cálculo são introduzidos por meio de figuras, como os conceitos de integral definida, derivada, área entre curvas, máximos e mínimos, e os problemas de taxas relacionadas. Esses pesquisadores observaram que

> apesar da predileção dos professores de Cálculo por diagramas, nossa pesquisa indica que o aluno resiste ao uso de estratégias geométricas e

> espaciais na resolução efetiva de problemas de Cálculo. (BALOMENOS, FERRINI-MUNDY e DICK, 1994, p. 241)

Essa resistência se deve, com certeza, à falta de domínio dos conceitos geométricos por parte dos alunos de Cálculo. Esses autores afirmam ainda que

> o verdadeiro desafio está na habilidade de desenvolver uma representação geométrica de situações físicas a partir de uma descrição verbal complicada. Muitas vezes, a chave da solução consiste em resolver um problema geométrico em que o tempo é “congelado”. (p. 247)

Exemplos de problemas de taxas relacionadas e máximos e mínimos do Cálculo, cuja representação gráfica pode ser antecipada no Ensino Médio, são apresentados mais adiante.

Os estudos relatados aqui sugerem o debate sobre a investigação de estratégias de ensino que tornem mais amena a transição para o ensino superior, em especial, na disciplina de Cálculo. Com este trabalho, esperamos contribuir para esse debate.

3 Análise de Livros Textos

Na tentativa de entender as dificuldades apresentadas no curso de Cálculo, foi necessária a análise de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio e de livros de Cálculo do Ensino Superior. Dessa forma, foi possível avaliar alguns exemplos de como é feita a transição entre esses níveis de ensino nos conteúdos que geram maior dificuldade para os alunos na prática. Foram analisados seis autores de livros do Ensino Médio e nove autores de livros de Cálculo.

Tradicionalmente, o ensino de função era iniciado com o conceito de relação e a função era vista como caso especial de relação. Lima (2001) destaca sobre o conceito de relação:

> Esta opção não é das mais indicadas, pois não enfatiza a noção básica, usada em aplicações, de lei de correspondência, de dependência entre duas variáveis, substituindo-a por um tratamento teórico-formal, correto sem dúvida, mas que não é motivado por aplicações relevantes. De todo o modo, a partir do momento em que o autor opte por esta linha, o exemplo dado para motivar o conceito de relação não deveria ser uma função. (LIMA, 2001, p.319)

Os livros analisados do Ensino Médio e de Cálculo já não definem função a partir do conceito de relação, e não existe mais uma ênfase em diagramas de flechas. A introdução de funções por meio do diagrama de flechas limita a visão mais abrangente do conceito de função, além de restringir o domínio a um conjunto finito.

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006):

> O estudo de funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento

> populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras. (BRASIL, 2006, p.72)

O enfoque ao gráfico de funções usando transformações, como translação, reflexão, rotação e homotetia, usado no curso de Cálculo, já tem sido incluído em livros do Ensino Médio. Dois autores desse nível de ensino abordam transformações, analisando a função quadrática na forma canônica $f(x) = a(x-m)^2 + p$, e outros dois usam translações para obter gráficos de funções modulares e trigonométricas.

Surpreendentemente, dos nove livros de Cálculo analisados, apenas três autores abordam transformações de gráficos. A princípio, os autores usam as ferramentas de Cálculo para fazer análises gráficas e dois destes trabalham o Cálculo com Geometria Analítica.

Todos os autores do Ensino Médio e do Ensino Superior enfatizam a análise gráfica, incluindo crescimento e decrescimento, domínio e imagem, pontos críticos, zeros da função, mas dos livros do Ensino Médio, somente um aborda o conceito de assíntotas, que é enfocado por todos os autores do Ensino Superior.

Quanto ao conceito de função par e ímpar, apenas um autor de Ensino Superior não apresenta esse conceito no capitulo de funções, mas o apresenta em exercícios de cálculo de áreas e volumes. No Ensino Médio, dois autores abordam a definição e as representações gráficas de funções pares e ímpares, inclusive enfatizando a simetria em cada caso.

Todos os livros de Ensino Médio e Superior abordam funções trigonométricas, mas, dos livros de Ensino Médio, somente dois abordam funções trigonométricas do tipo $y = a + b\,\mathrm{sen}(mx+q)$, função injetiva e sobrejetiva.

Os conteúdos analisados acima devem ser cuidadosamente explorados no Ensino Médio, a fim de promover uma transição amena para a aprendizagem de Cálculo no Ensino Superior.

4 Atividades de Investigação

As atividades preliminares de investigação foram divididas em duas etapas e aplicadas a alunos de duas universidades particulares do estado do Rio de Janeiro, a calouros da UFRJ e, a alunos egressos ou não, do Ensino Médio do CAp-UFRJ. Este foi escolhido por adotar um enfoque diferenciado para o ensino de funções, que pode ser adequado para a preparação dos alunos para a abordagem no curso de Cálculo.

Inicialmente, 98 alunos de duas universidades particulares e 18 alunos egressos do CAp-UFRJ responderam a um questionário que buscou identificar as dificuldades encontradas por eles na disciplina de Cálculo I, quais os tópicos de Matemática do Ensino Médio que facilitaram sua aprendizagem, e quais deveriam ser inseridos para contribuir nesse processo. Além disso, resolveram três questões sobre funções. A primeira delas envolvia a análise de duas funções do tipo afim, a segunda abordava o domínio de uma função e, por fim, a última pedia o gráfico de uma função definida por três sentenças.

Na análise dos resultados dos questionários observamos que, dentre os tópicos citados do Ensino Médio que ajudaram na assimilação dos conteúdos de Cálculo, os que apresentaram maior frequência, no universo dos alunos egressos do CAp-UFRJ, foram o conceito de funções e a análise de gráficos. Os demais alunos citaram como tópicos que gostariam de ter estudado para facilitar a aprendizagem de Cálculo: funções, conteúdos do Ensino Superior e maior aprofundamento do conteúdo em geral.

Na resolução das questões propostas, identificamos, nos alunos calouros, uma deficiência na análise de funções afim e quadrática definidas por uma ou mais sentenças. Em geral, demonstram conhecimento superficial de funções e seus gráficos. Eles conseguem marcar alguns pontos no plano cartesiano, que unem por segmentos de reta, deixando de considerar a lei de formação da função. A Figura 2 mostra o gráfico traçado por uma aluna aplicada de Cálculo I. Ela foi capaz de perceber a translação horizontal aplicada à função $y = \text{sen}\, x$ para obter o gráfico da função $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ marcando os pares ordenados, mas ligou-os por segmentos de reta.

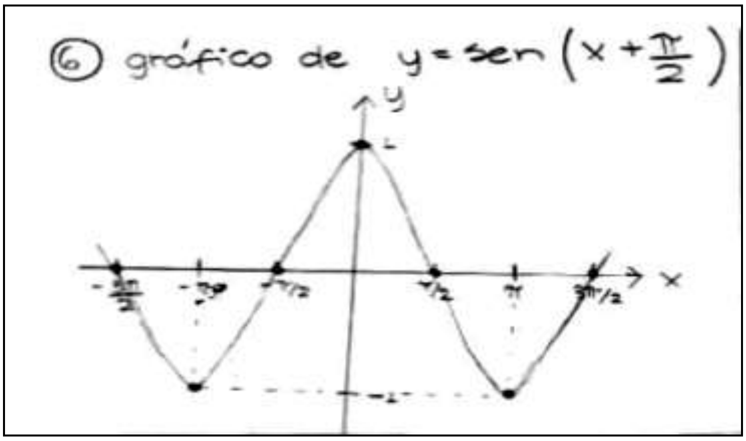


Figura 2 - Exemplo de gráfico utilizando segmentos de reta para a ligação dos pontos.

Em sua pesquisa, Even (1990) ressalta que a primeira abordagem de funções, marcando pontos, não é difícil de aprender, mas

> uma abordagem com marcação de pontos para o traçado de gráficos de funções é, em muitos casos, menos poderosa que um método que enfatiza uma análise mais global do comportamento da função. Por exemplo, fazer o gráfico de uma função quadrática que tem $\left(-100, 78\right)$ como vértice pela marcação de vários pontos próximos de (0, 0) não vai produzir um gráfico informativo. Também, traçar o gráfico de uma função que é descontínua em $x = 0,3$ pela marcação de pontos com coordenadas inteiras e ligá-los vai produzir um gráfico errado. (p. 534)

A maior parte dos alunos egressos do CAp-UFRJ que respondeu a essa atividade não apresentou esse tipo de erro, e usou os conhecimentos aprendidos em Cálculo I, além dos ensinamentos básicos do Ensino Médio para obter o gráfico pedido.

A segunda etapa de investigação consistiu na aplicação de outra atividade a 153 alunos de duas universidades particulares, dos cursos de Engenharia e Licenciatura em Matemática, cursando o 1º período e a 28 alunos do 2º ano do Ensino Médio do CAp-UFRJ. Nesse caso, os exercícios propostos envolveram os conceitos de função par e ímpar, a translação de gráficos e a identificação, a partir de um gráfico apresentado, do domínio, da imagem, dos intervalos de crescimento e decrescimento e dos pontos de máximo e mínimo locais da função dada. Os alunos do CAp-UFRJ testados demonstraram mais familiaridade com o conceito de função.

Foi possível perceber nesse grupo de alunos que a identificação de funções pares (pela simetria em relação ao eixo vertical) ocorre com mais facilidade do que a de funções ímpares. Em particular, foi observada a dificuldade em completar o gráfico de uma função ímpar, quando esta não passa pela origem (função descontínua). Veja os exemplos a seguir.

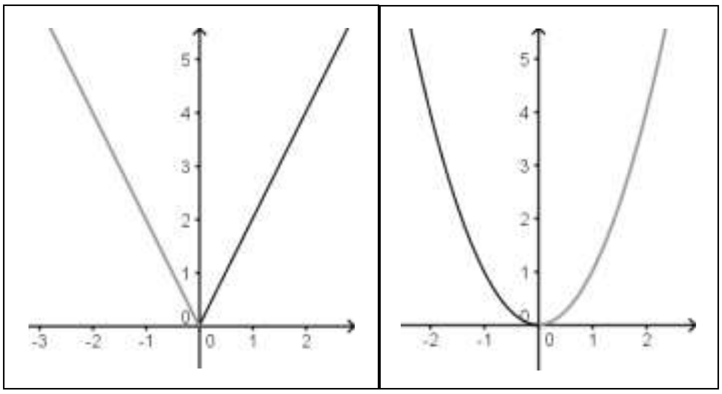


Figura 3 – Atividade: Complete os gráficos para que as funções sejam pares.

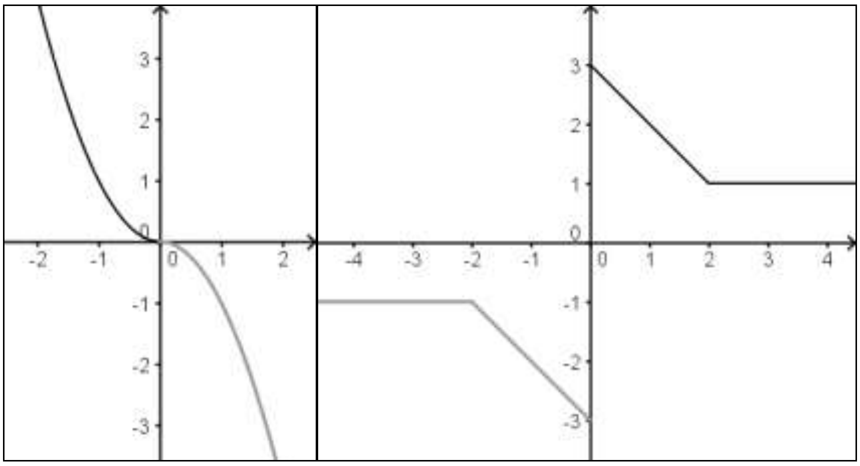


Figura 4 – Atividade: Complete os gráficos para que as funções sejam ímpares.

Pela observação dos professores deste grupo de pesquisa que dão aula de Cálculo, as dificuldades dos alunos estão localizadas no trato com funções, principalmente quando estas são definidas por mais de uma sentença, e no traçado de gráficos, até mesmo de retas e parábolas. Por outro lado, a professora do grupo que leciona no CAp-UFRJ descreve como positivo o enfoque diferenciado adotado para o ensino de funções nessa instituição, que indica ideias que podem ser facilitadoras no processo de ensino e de aprendizagem no curso de Cálculo.

Umas das abordagens que podem ajudar no ensino de Cálculo é a análise de gráficos por meio de translações. Uma das professoras pesquisadoras do grupo trabalha essa estratégia com seus alunos desde o Cálculo I e teve a oportunidade de constatar o raciocínio de um aluno de Cálculo II, que utilizou a translação de gráficos para resolver a seguinte questão:

Determine todos os pontos de interseção das cardióides:
$R = 1 + \cos\theta \quad \text{e} \quad R = 1 - \text{sen}\,\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

O objetivo era que os alunos igualassem as duas equações polares, percebendo que os pontos de interseção se referem ao ângulo θ que satisfaz à igualdade $\cos\theta = -\text{sen}\,\theta$, ou seja, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{7\pi}{4}$. No entanto, um aluno apresentou a solução a seguir, aplicando a translação de gráficos, enfatizada pela professora em outro contexto.

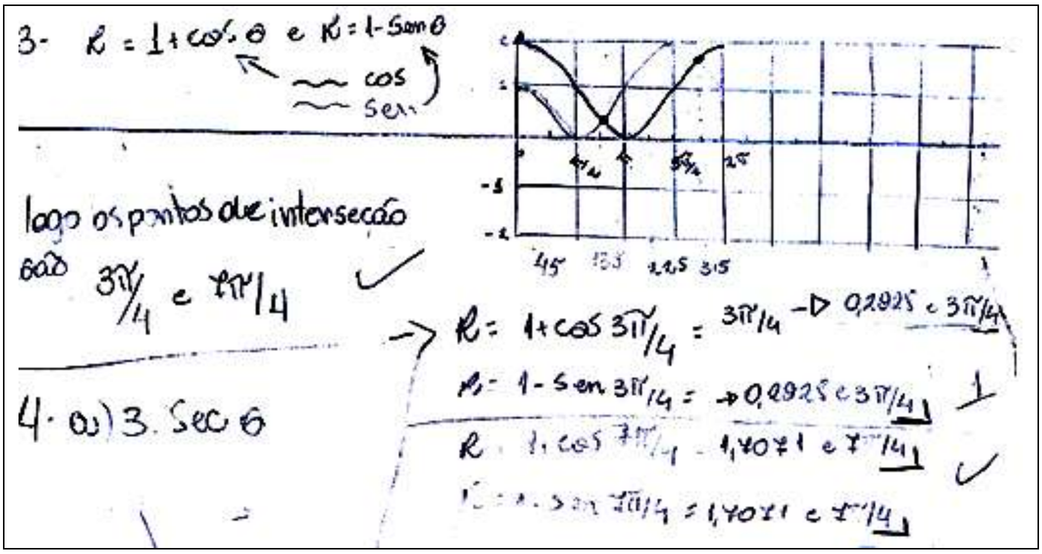


Figura 5 - Solução de um aluno de Cálculo II.

Os primeiros resultados desta investigação apontam para a possibilidade de diminuição das dificuldades em Cálculo I por meio de uma abordagem apropriada no Ensino Médio.

5 Prontidão para o Cálculo

Em sua pesquisa, Balomenos, Ferrini-Mundy e Dick (1994) apresentam diversos exemplos de problemas do Cálculo que poderiam ser facilitados, por uma abordagem adequada da geometria ensinada no Ensino Médio, desenvolvendo a prontidão para o Cálculo.

Por exemplo, para resolver o problema de Cálculo:

Uma esfera de raio 4 é inscrita num cone circular reto. Determinar as dimensões do cone de volume mínimo.

é preciso exprimir o volume do cone como uma função de uma variável para depois aplicar a derivada. Essa etapa do problema pode ser explorada na geometria do Ensino Médio, por meio da seguinte tarefa:

Uma esfera de raio 4 está inscrita num cone circular reto. Expressar o volume do cone como função de sua altura *h*.

A representação gráfica desse problema requer a identificação de triângulos semelhantes na seção transversal de uma esfera inscrita num cone (p. 245).

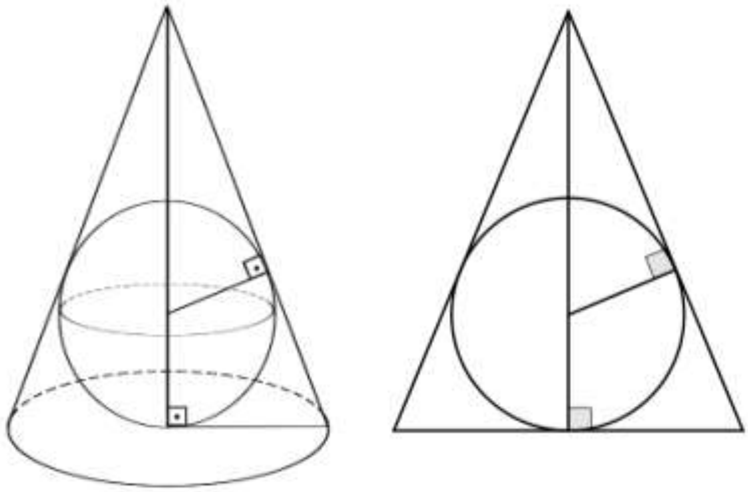


Figura 6: Seção transversal de uma esfera inscrita em um cone.

Na sequência, os autores apresentam um erro muito comum nessa representação, na qual os alunos traçam o raio da circunferência na seção do cone paralelo à base do triângulo.

A representação gráfica também é fundamental no cálculo de área entre duas curvas. Consideremos, por exemplo, o problema:

Determine a área compreendida pelos gráficos de $y = x^3$ e $y = x$, entre $x = -1$ e $x = 1$.

Os alunos normalmente utilizam a integral definida $\int_{-1}^{1} (x^3 - x)dx$ ou $\int_{-1}^{1} (x - x^3)dx$ para resolver este problema, não percebendo que essa fórmula só é válida no caso em que é possível comparar as funções do integrando em todo o intervalo de integração. Neste caso, como a função é ímpar, há simetria em relação à origem, e essa integral tem zero como resultado, que certamente não pode ser o valor da área requerida.

O aluno que faz os gráficos das funções envolvidas atenta para a necessidade de calcular $\int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)dx$ para obter dessa expressão o resultado correto. Sem fazer o gráfico, é duvidoso que o aluno tivesse condições de reconhecer que a simetria também poderia ser explorada para perceber que $2\int_{0}^{1} (x - x^3)dx$ é uma expressão para o cálculo dessa área.

Alguns problemas de máximos e mínimos podem ser resolvidos no Ensino Médio usando as coordenadas do vértice de uma parábola, como no exemplo:

Prove que de todos os retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é o que tem área máxima.

Tomando *a* e *b* como medidas dos lados do retângulo, *A* como a área e *2P* como perímetro, tem-se: $A = a \cdot b$ e $2P = 2a + 2b$. Substituindo, obtém-se a área como função de um dos lados: $A = Pb - b^2$. O gráfico dessa função é uma parábola, cujo valor máximo ocorre no vértice $b_v = \frac{P}{2}$. Substituindo na expressão do perímetro, obtém-se $a = \frac{P}{2}$, o que prova que o retângulo de área máxima é um quadrado.

Utilizando cálculo, basta derivar a função $A(b) = Pb - b^2$, chegando a $\frac{dA}{db} = P - 2b$. Igualando a zero e resolvendo, obtém-se $b = \frac{P}{2}$ e, consequentemente, $a = \frac{P}{2}$.

Problemas sobre taxas relacionadas também podem ser trabalhados no Ensino Médio, como o exemplo a seguir.

Um tanque tem a forma de um cone invertido, com altura *H* e raio do topo circular igual a *R*. Inicialmente vazio, o tanque começa a encher de água a uma vazão constante de *k* litros por minuto. Exprima a velocidade com que sobe o nível da água $\left(\frac{dh}{dt}\right)$, em função da profundidade *h*.

Nessa situação, é esperado que alunos do Ensino Superior percebam que o volume da água, dado em função da profundidade *h*, é expresso por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, sendo *r* o raio da superfície (circular) da água. Observe a figura.

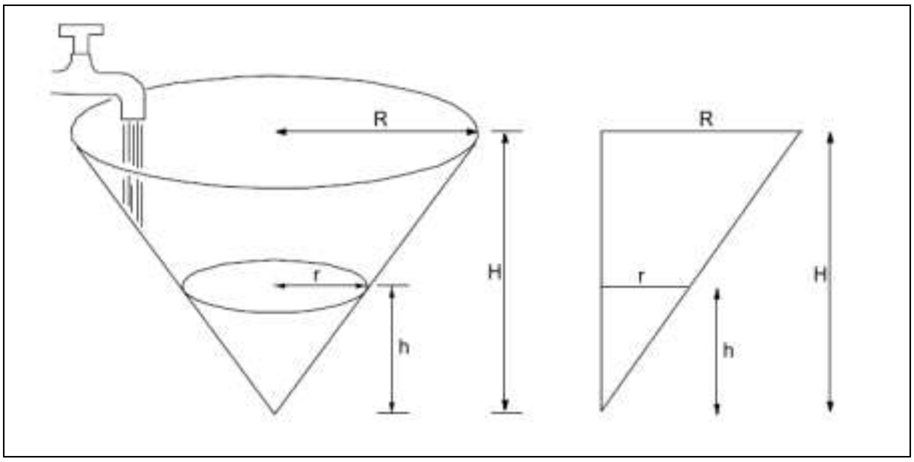


Figura 7: Seção transversal do tanque.

Sendo R o raio do topo do tanque e H sua altura, por semelhança de triângulos, tem-se $\frac{r}{R}=\frac{h}{H}$, logo $r=\frac{Rh}{H}$. Assim sendo, obtém-se $V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{Rh}{H}\right)^2 h \Rightarrow V=\frac{\pi R^2}{3H^2}h^3$.

A taxa de variação do volume de água no tempo é constante. Ou seja, $\frac{dV}{dt}=k$ (litros por minuto). Derivando V em função de t, obtemos:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi R^2}{H^2}h^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow k=\frac{\pi R^2}{H^2}h^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{kH^2}{\pi R^2}\cdot\frac{1}{h^2}$$

Prova-se, assim, que a velocidade de subida do nível da água é inversamente proporcional ao quadrado de sua profundidade.

Na Escola Básica, o problema poderia pedir apenas para determinar o volume do tanque em função da altura h da água, em cada instante. Para tanto, além de fazer a representação da seção do cone, é preciso identificar os triângulos retângulos semelhantes para exprimir o raio da superfície da água em função da altura h correspondente, da altura H do tanque e do raio R do topo do tanque.

6 A Experiência do CAp

Conforme dito anteriormente, é possível que as dificuldades enfrentadas, pelos alunos ingressantes nas universidades, na primeira disciplina de Cálculo sejam fruto da forma como os conhecimentos pertinentes ao Ensino Médio são ensinados e assimilados. Por esse motivo, avalia-se a possibilidade de destacar sugestões alternativas no currículo do Ensino Médio com intenção de amenizar os obstáculos presentes na transição do Ensino Médio para o Ensino Superior.

Rezende (2003) versa sobre algumas questões que devem ser consideradas.

> Onde reside tanta dificuldade? No processo de aprendizagem? No aluno? (...) Ou estaria esta dificuldade no próprio professor, ou na metodologia de ensino, ou ainda, na estrutura curricular do ensino de matemática que não dá o suporte que esta disciplina mereceria? (p. 314)

Cabe ressaltar que os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 1999) destacam a dissociação existente entre vários conteúdos nesse nível de ensino, o que enfatiza a necessidade de uma proposta curricular diferente da praticada atualmente.

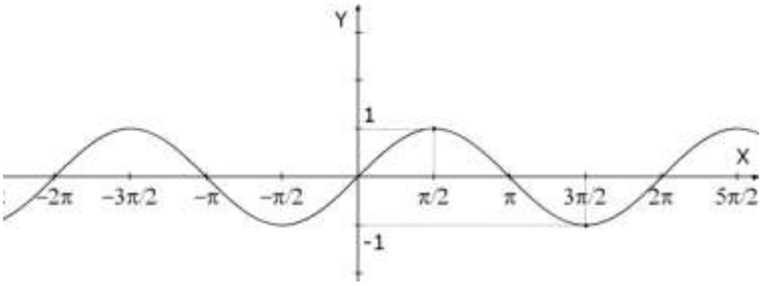
> Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As sequências, em especial progressões aritméticas e geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente. (BRASIL,1999, p. 225)

Em 2006, uma proposta de reestruturação curricular foi implementada no CAp-UFRJ a partir do 1º ano do Ensino Médio. Essa proposta se baseia no ensino de Vetores no início do 1º ano do EM, uma vez que se acredita que esse conteúdo seja o precursor para o processo de ensino e de aprendizagem de outros conteúdos, tais como: Funções, Gráficos de Equações Algébricas, Trigonometria, Geometria Espacial, Retas no R^2 e no R^3 e Planos.

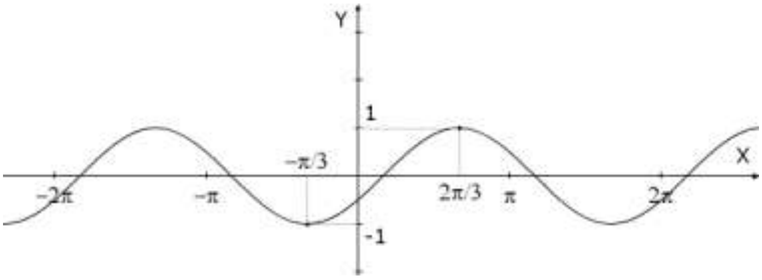
Dessa forma, a partir do estudo de vetores (ASSEMANY et al, 2012a), apresentam-se as Transformações no Plano que possibilitam abordagens distintas no ensino de Trigonometria (por meio de Rotação de Vetores) e no ensino de Funções Afim e Quadrática (por meio de Translações de Gráficos). Além disso, ainda no 1º ano do EM, outros aspectos podem ser destacados, tal como o estudo de Progressões Aritméticas enquanto Funções Afim de domínio restrito ao conjunto dos números naturais.

Como consequência dessa reestruturação curricular no 1º ano do EM, o 2º ano e o 3º ano do EM também sofreram modificações. O estudo das Funções Exponenciais, Logarítmicas e Trigonométricas é baseado também em Translações de Gráficos. A Geometria Espacial pode ser trabalhada a partir da localização de vértices, ao invés de se trabalhar com dados métricos. Outros exemplos de utilização da abordagem vetorial podem ser encontrados no estudo de Números Complexos e de Matrizes, por exemplo.

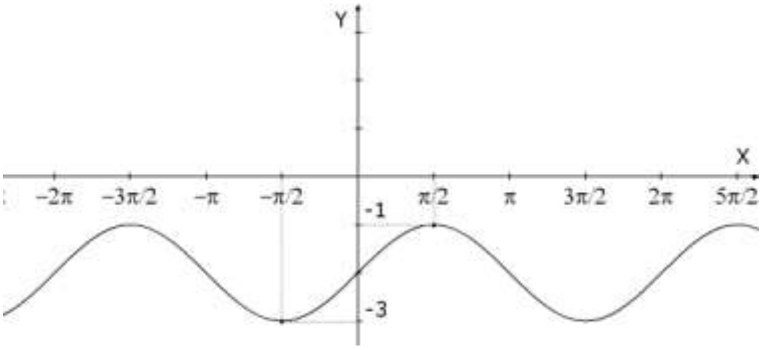
O exemplo abaixo (Figura 8) ilustra a análise de gráficos de Funções Trigonométricas com enfoque nas translações verticais e horizontais (ASSEMANY et al, 2012b). A partir do primeiro gráfico, os alunos são convidados a descrever as alterações apresentadas nos dois outros gráficos, assim como a identificar os parâmetros que foram modificados na lei da função.



$$f(x) = \text{sen } x$$



$$f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$



$$f(x) = \text{sen } x - 2$$

Figura 8 – Exemplo de análise gráfica baseada em translações.

Dentre as vantagens dessa proposta curricular, podemos citar a possibilidade de um currículo em espiral, no qual os conteúdos são constantemente revisitados. Além disso, a abordagem gráfica e as possíveis estratégias para a construção de gráficos podem ser facilitadores na aprendizagem de Cálculo.

Em particular, essa mesma estratégia de usar transformações de gráficos pode ser muito eficaz no esboço de superfícies, como mostra Nasser (2009).

7 Recomendações

As considerações e os resultados desta pesquisa recomendam dois desdobramentos. O primeiro é desenvolver uma proposta alternativa para as aulas de Matemática no Ensino Médio, que antecipe situações e problemas do Cálculo, gerando o que chamamos de prontidão para o estudo de Cálculo. Tal proposta deve incluir um estudo mais aprofundado de domínio e imagem de funções, traçado de gráficos, inclusive com recursos tecnológicos, funções pares e ímpares, funções definidas por várias sentenças e translação de gráficos. Em relação à Geometria, a proposta deve contemplar representações gráficas de figuras bi e tridimensionais, típicas de problemas de taxas relacionadas e de máximos e mínimos, como os exemplos mostrados neste trabalho. Essa proposta não pretende introduzir mudanças no currículo de Matemática no Ensino Médio, mas apenas sugerir um outro enfoque.

O segundo desdobramento é incentivar atividades de Matemática básica com os calouros das Universidades, visando preencher lacunas de aprendizagem e auxiliando na abstração necessária para o domínio do pensamento matemático avançado.

Referências

ASSEMANY, D.; AKIO, L.; DIAS, P.; DIAS, U.;NETO, C.;RANGEL, L.; SPÍLLER, L. & VILLAR, F. *Módulo de Vetores e Geometria Analítica.* Universidade Federal do Rio de Janeiro, 144 p., 2012a.

ASSEMANY, D.; AKIO, L.; DIAS, P.; DIAS, U.;NETO, C.;RANGEL, L.; SPÍLLER, L. & VILLAR, F *Módulo de Trigonometria e Funções Trigonométricas.* Universidade Federal do Rio de Janeiro, 100 p., 2012b.

BALOMENOS, R., FERRINI-MUNDY, J. e DICK, T. *Geometria: prontidão para o Cálculo*. In: M. Lindquist e A. Shulte (org.). Aprendendo e Ensinando Geometria. Atual Editora, São Paulo, 1994.

EVEN, R. Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, 21, p. 521-544, 1990.

LIMA, E. L. (Ed.) *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio*, Rio de Janeiro: SBM, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Brasília, 2006.

NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: Frota, M.C.R. e Nasser, L (org.). Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates, p. 43-58. SBEM, 2009.

PALIS, G. A transição do Ensino Médio para o Ensino Superior. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática* (em CD). Salvador, BA, 2010.

PONTE, J. P. *Pesquisar para compreender e transformar a nossa própria prática*. Educar, Curitiba, n. 24, p. 37-66, Editora UFPR, 2004.

REZENDE, W. *O ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*. In: Machado, N.J. e Cunha, M.O: Linguagem, Conhecimento, Ação – Ensaios de Epistemologia e Didática, pp. 313-336. Escrituras Editora, São Paulo, 2003.

ROBERT, A. e SCHWARZENBERGER, R. *Resarch in teaching and learning Mathematics at an advanced level*. In: David Tall (Ed.): Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1991.

SIERPINSKA, A. *On understanding the notion of function*. In: DUBINSKY, E; HAREL, G (Ed.) The Concept of Function: aspects of epistemology and Pedagogy. MAA Notes, 1992, p.25-58.