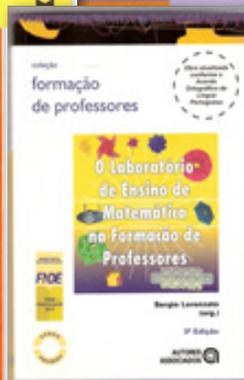
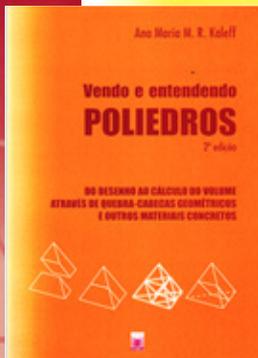
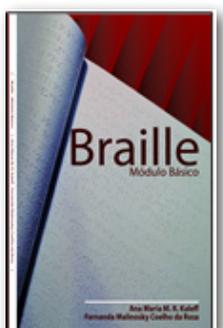
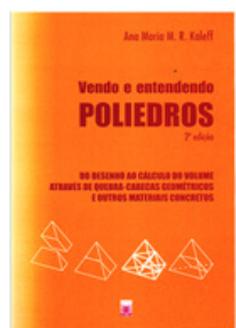


Ana Maria Martensen Roland Kaleff

# MEMÓRIAS DE UMA TRAJETÓRIA ACADÊMICA DE PERSEVERANÇA:

Vivências de uma Educadora Matemática em um  
Curso de Formação de Professores de Matemática





CEAD/UFF

**MEMÓRIAS DE UMA  
TRAJETÓRIA ACADÊMICA DE  
PERSEVERANÇA:**

**Vivências de uma Educadora Matemática em um  
Curso de Formação de Professores de Matemática**

Ana Maria Martensen Roland Kaleff

Coordenação de Ensino a Distância  
Instituto de Matemática e Estatística

Niterói

Agosto – 2016

Direitos desta edição reservados à EdUFF - Editora da Universidade Federal Fluminense  
Rua Miguel de Frias, 9 - anexo - sobreloja - Icaraí - Niterói, CEP 24220-900 - RJ - Brasil  
Tel.: (21) 2629-5287 - Fax: (21) 2629-5288 - www.editora.uff.br - e-mail: secretaria@editora.uff.br

#### **CEAD/ UFF**

É permitida a reprodução total ou parcial desta obra desde que citada a fonte.

Edição de texto e revisão: Nathália de Ornelas Nunes de Lima

Capa e editoração eletrônica: Paulo Carvalho

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

## **MEMÓRIAS DE UMA TRAJETÓRIA ACADÊMICA DE PERSEVERANÇA: Vivências de uma Educadora Matemática em um Curso de Formação de Professores de Matemática**

Rio de Janeiro/Niterói – CEAD/UFF/2016

ISBN 978-85-620-0757-6

#### **UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE**

**Reitor:** Sidney Luiz de Matos Mello

**Vice-Reitor:** Antonio Claudio Lucas da Nóbrega

**Pró-Reitor de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação:** Roberto Kant de Lima

**Diretor da EdUFF:** Aníbal Francisco Alves Bragança

**Diretora do CEAD/UFF:** Regina Célia Moreth Bragança

#### **Comissão Editorial EdUFF**

**Presidente:** Aníbal Francisco Alves Bragança (presidente)

Antônio Amaral Serra

Carlos Walter Porto-Gonçalves

Charles Freitas Pessanha

Guilherme Pereira das Neves

João Luiz Vieira

Laura Cavalcante Padilha

Luiz de Gonzaga Gawryszewski

Marlice Nazareth Soares de Azevedo

Nanci Gonçalves da Nóbrega

Roberto Kant de Lima

Túlio Batista Franco

## PALAVRAS INICIAIS

Esse volume foi originalmente escrito em forma de Memorial apresentado para avaliação como requisito parcial ao Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade Federal Fluminense (UFF), para acesso à classe de Professor Titular da Carreira do Magistério Superior. Após sua aprovação, vários amigos e colegas professores de Matemática solicitaram sua divulgação, demonstrando que seria útil como registro histórico das minhas ações realizadas no IME, durante mais de quatro décadas.

Frente a essa solicitação, coloco à disposição do público em geral o documento apresentado, com pequenas modificações que visam tornar a narrativa um pouco mais adequada ao leitor não acostumado aos trâmites acadêmicos. Assim, espero deixar registrados fatos e circunstâncias que vivenciei em busca do estabelecimento e da consolidação da área de Educação Matemática nos cursos de especialização para professores (presencial e a distância) e nos de Licenciatura em Matemática da UFF, no período de 1970 a 2014.

Cumprasse assinalar que a banca de avaliação para o acesso à classe de Professor Titular se reuniu nos dias 26 e 27 de agosto de 2015, no IME, e foi composta pelos seguintes professores: presidente - Celso José da Costa (UFF), Mário Jorge Carneiro (Universidade Federal de Minas Gerais), Fabiano Brito (Universidade Federal do ABC), Nilson José Machado (Universidade de São Paulo), José Miguel Veloso (Universidade Federal do Pará) e Carlos Antônio de Moura (Universidade Estadual do Rio de Janeiro). A homologação da aprovação para a promoção funcional foi divulgada no BOLETIM DE SERVIÇO-UFF, Ano XLV – N.º 166 13/11/2015; Seção III, pag. 051. Decisão: N.º 1.130/2015.



## METAMORFOSE DE UMA VIDA

Eram mil formas,  
mil células  
e um ser...

Eram mil formas,  
mil esperanças,  
tamanhas!

Eram mil formas,  
mil caminhos  
se tornando  
em desencantos.

Foram mil formas,  
mil esperanças  
transformadas  
em solidão.

Eram mil formas,  
mil desejos  
não impressos  
em beijos...

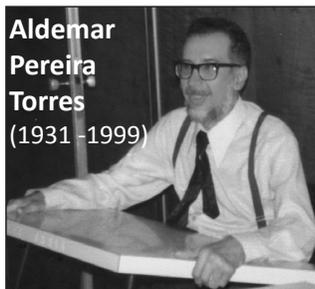
Eram mil formas,  
mil amores  
se tornando  
em dores...

Foram mil formas,  
mil pensares  
transformados  
em flores.

## In memoriam

Aos professores

**Aldemar  
Pereira  
Torres**  
(1931 - 1999)



**Constantino  
Menezes de Barros**  
(1931 - 1983)



**Maria Laura M.  
Leite Lopes**  
(1917-2013)



Mestres, mas antes de tudo, amigos.  
Há muito, *transformados em flores.*



# SUMÁRIO

<b>1 – O Prelúdio da Trajetória</b>	<b>13</b>
<b>2 – O Começo da Trajetória na Formação de Professores de Matemática da UFF</b>	<b>15</b>
<b>3 – O Primeiro Grande Desvio na Trajetória</b>	<b>17</b>
<b>4 – Novas Paisagens ao Longo do Percurso</b>	<b>21</b>
4.1 A DISCIPLINA FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA	
4.2 OUTRAS PAISAGENS	
<b>5 – Retomando o Caminho na UFF: Pouca Coisa Havia Mudado na Paisagem Acadêmica</b>	<b>23</b>
<b>6 – Mais um Parêntesis e Tempo de Observação</b>	<b>25</b>
<b>7 – Tempo de Busca de Parcerias para o Enfretamento da Caminhada: o Encontro e a Companhia de um Grande Paradigma</b>	<b>27</b>
<b>8 – Tempos Iniciais da Caminhada como Educadora Matemática na UFF</b>	<b>29</b>
<b>9 – Tomando o Caminho da Pesquisa em Educação Matemática</b>	<b>33</b>
9.1 UM MARCO TEÓRICO DETERMINANTE PARA A TRAJETÓRIA	
9.2 PESQUISAS INICIAIS E A BUSCA POR NOVOS MARCOS TEÓRICOS	

## **10 – Um Novo Desvio na Caminhada e o Apoio do CNPq** 37

---

## **11 – Opção por Projetos de Extensão para a Formação Continuada e uma Nova Pesquisa** 41

11.1 PEDRAS QUE PAVIMENTAM O CAMINHO DA PESQUISA E DA EXTENSÃO

11.2 OUTROS MARCOS TEÓRICOS BALIZADORES DO CAMINHO

---

## **12 – Parceria Frutífera em prol da Educação Matemática: o Programa PADCT e o Espaço-UFF de Ciências** 47

12.1 FUNDAÇÃO DO LABORATÓRIO DE ENSINO DE GEOMETRIA NO INSTITUTO DE MATEMÁTICA E OUTROS NÚCLEOS DE LABORATÓRIOS

12.2 DIVULGAÇÃO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E A INTERIORIZAÇÃO DOS PROJETOS DE EXTENSÃO

12.3 OUTRAS PARCERIAS NA TRAJETÓRIA PELA MELHORIA DA FORMAÇÃO CONTINUADA

---

## **13 – Deixando Pegadas pelo Caminho** 53

13.1 A COLEÇÃO CONVERSANDO COM O PROFESSOR

13.2 PEGADAS DEIXADAS NO CURSO PRESENCIAL DE ESPECIALIZAÇÃO PARA PROFESSORES

13.3 PEGADAS DEIXADAS NO CURSO DE LICENCIATURA: AS DISCIPLINAS DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

---

## **14 – Voltando ao Caminho da Pesquisa sobre o Ensino de Outras Geometrias** 61

14.1 DOUTORADO: CONSEQUÊNCIAS PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

14.2 RESULTADOS DO DOUTORADO: META ALCANÇADA DEPOIS DE QUASE 30 ANOS DE BUSCA E CONSEQUÊNCIAS PARA A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

<b>15 – Pegadas Deixadas Durante o Percurso ao Longo do Doutorado</b>	<b>67</b>
<b>16 – Novos Rumos para o Trabalho Além dos Muros da UFF e a Criação do MUSEU LEGI no IME</b>	<b>71</b>
<b>17 – Um Novo Curso de Especialização: a caminhada na Universidade Aberta do Brasil</b>	<b>75</b>
17.1 UM LIVRO PARA O ENSINO A DISTÂNCIA	
17.2 PREPARAÇÃO DE TUTORES PARA O ENSINO A DISTÂNCIA	
<b>18 – Reflexos do Doutorado: ainda o Ensino das Geometrias e o Modelo de van Hiele</b>	<b>79</b>
<b>19 – Novos Projetos: Recursos Virtuais, Iniciação à Docência e Itinerância</b>	<b>81</b>
<b>20 – Constatando a minha Identidade Profissional: sou uma Educacionista Matemática</b>	<b>85</b>
<b>21 – Mais uma Frente de Ação se Apresenta à Caminhada</b>	<b>87</b>
21.1 O DESAFIO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA INCLUSIVA DO ALUNO COM DEFICIÊNCIA VISUAL	
<b>22 – Observações sobre uma Caminhada Inacabada</b>	<b>93</b>
<b>23 – Referências Bibliográficas</b>	<b>97</b>



# 1 | O Prelúdio da Trajetória

Para se poder entender o que me levou a percorrer uma trajetória acadêmica muito peculiar no âmbito da Universidade Federal Fluminense (UFF), por mais de 45 anos, acredito ser necessário voltar ao princípio do caminho e à minha escolaridade, pois certos fatos iniciais foram determinantes para as opções acadêmicas que fiz uao longo dessa jornada e pela perseverança na continuidade de muitas ações.

No Ensino Médio, cursei a Escola Técnica de Química Industrial Padre Anchieta de Jundiaí-SP. Em 1965, iniciei o Curso de Licenciatura em Matemática na Faculdade de Filosofia da Universidade Católica de Campinas-SP, cujo 1º ano foi realizado conjuntamente com um período adicional de estudos neste curso técnico e de estágio no Instituto Agrônomo de Campinas, o que permitiu a obtenção do diploma de Técnico em Química Industrial. Portanto, muito cedo, o lidar com transformações de materiais e suas mutações vieram a fazer parte da minha experiência de vida.

No 2º ano da Licenciatura, descobri meu interesse pela Física nas aulas experimentais em laboratório, ministradas pelo professor Rodolfo Caniatto (atualmente aposentado pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro), que durante quatro semestres nos presenteou com sua experiência acadêmica, de um ponto de vista revolucionário para a época e divulgado na *Physical Science Study Series* (PSSC, 1996). Foi dele que ouvi frases do tipo: “No Brasil, há muito a ser feito pela Educação. Cuidado para não se perder em cursos estéreis de pós-graduação”. Cerca de 20 anos depois, iria encontrá-lo em eventos nacionais, em cursos de extensão e em projetos realizados no Espaço-UFF de Ciências de Niterói. Suas palavras influencia-

ram muito em minha escolha acadêmica pela busca da interiorização e democratização do conhecimento produzido na Universidade e suas aulas determinaram a minha paixão pelos procedimentos didáticos de baixo custo e observações laboratoriais também para a sala de aula.

No último ano da Licenciatura, sob orientação do professor Benedito Castrucci, realizei um estudo sobre a formalização da Geometria Euclidiana como atividade pedagógica integrante da disciplina *Fundamentos de Matemática*. Foi nesta ocasião que tomei conhecimento da existência de vários sistemas axiomáticos formais, tema que me deixou extremamente interessada, não somente pelas diferentes representações geométricas advindas das possíveis interpretações desses sistemas, como também pela própria apresentação formal de um sistema matemático e das relações com o estabelecimento das verdades em Matemática. Esse conhecimento foi, sem dúvida, o que me levou ao interesse pelo ensino e a aprendizagem dos sistemas geométricos não-euclidianos (aqueles que negam algum dos axiomas ou postulados euclidianos) e acendeu a primeira chama da fogueira que me aqueceu durante a caminhada da pesquisa para o doutorado.

Ainda no último ano da Licenciatura, em 1968, fui contratada como professora de Matemática do recém inaugurado Ginásio Estadual Cesarino Borba de Iracemópolis-SP. Uma escola em uma cidadezinha com cerca de 5000 habitantes, na qual os alunos eram, na sua maioria, filhos de trabalhadores de uma das maiores usinas de produção de açúcar de cana do estado de São Paulo.

Foi aí que, pela primeira vez, ouvi de crianças, com cerca de 10 anos de idade, declarações sobre o direito a boas condições de trabalho, das dificuldades encontradas por elas mesmas no corte da cana ou ainda pude vê-las, nessa tenra idade, faltarem às aulas e ficarem fora da escola durante os meses da safra da colheita, para irem ajudar os pais na dura lida do campo como *boias frias*.

Essa experiência, certamente, abriu os meus olhos e me sensibilizou para ver algumas das necessidades do cotidiano dos estudantes carentes, embora em uma das regiões mais ricas do interior do nosso país.

Concluí o curso de Licenciatura em 14 de dezembro de 1968. Assim, iniciei a minha vida, como licenciada, um dia após o Ato Institucional nº 5 ter sido promulgado.

## 2 | O Começo da Trajetória na Formação de Professores de Matemática da UFF

No início de 1969, fixei residência em Niterói.

Em março, já estava matriculada no Curso de Mestrado em Matemática da UFF e começava a atuar como professora em escolas do Ensino Básico.

Ainda no primeiro semestre, sob a orientação do professor coronel Jorge Emmanuel Ferreira Barbosa, chefe do Departamento de Lógica e Análise (atualmente Departamento de Análise – GAN), recebi uma bolsa de estudos da Coordenação de Pós-graduação da UFF (COMPEG). Neste período, os meus estudos foram direcionados para a Lógica Matemática. Em dezembro de 1969, com a transferência do professor Aldemar Pereira Torres da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) para o GAN, iniciei uma nova fase de estudos sob sua orientação, agora, direcionados à Análise Matemática, como pretendia desde o início do Mestrado.

Em 1970, após concurso interno para professor do GAN, no qual obtive a primeira classificação, fui contratada como professora do mesmo departamento. Durante 1971 e 1972 recebi bolsa de estudo da CAPES para realizar o Mestrado, deixando, temporariamente, o contrato de professor da UFF. Nesse período, apesar do meu interesse pela Análise Matemática, também participei de vários seminários e cursos de aperfeiçoamento e extensão, os quais enfocavam tópicos da Lógica Matemática e completavam estudos iniciados nas disciplinas cursadas no Mestrado.

Em dezembro de 1972, terminei o Mestrado com a apresentação de

uma dissertação baseada nos trabalhos de Alfsen (1959). O estudo permitiu uma generalização do conceito de Integral de Lebesgue para reticulados vetoriais por meio de dois caminhos teóricos: um pela *Teoria da Medida* e outro pela *Teoria da Aproximação de Funções* (KALEFF, 1972). No âmbito dessa dissertação, desenvolvi uma particularidade dessa generalização que leva à integral de Riemann no  $\mathbb{R}^2$  e pode ser trabalhada no nível da graduação em Matemática.

Vale mencionar que fui do primeiro grupo de mestrandos a receber bolsa da CAPES na UFF e que, durante os dois anos como bolsista, ministrei diversas disciplinas oferecidas pelo GAN para o Curso de Matemática, a título de estágio complementar de estudos sobre Análise Matemática.

Também fui instada pelo professor Carlos Aragão da UFRJ (membro da banca de exame da dissertação do mestrado) a escrever um verbete para a *Enciclopédia Mirador Internacional* (versão brasileira da *Encyclopaedia Britannica*) sobre Integração e Medida (KALEFF, 1975).

Durante os anos no GAN e até 1974, também participei de um projeto de pesquisa orientado pelo professor Aldemar Pereira Torres, do qual alguns subprodutos foram notas de aula (KALEFF, 1970; KALEFF et al., 1974). Estas foram extensamente aplicadas pelos docentes participantes do projeto nas disciplinas *Análise Matemática II e III*, *Análise Funcional II, III, IV* e *Teoria da Medida*, entre outras, ministradas para a graduação.

Em 1973, iniciei, embora de forma não oficial, a pesquisa *Partição da Unidade em Espaços de Banach* e suas aplicações à Geometria Diferencial, sob a orientação do Professor Constantino Menezes de Barros, docente do Departamento de Geometria (GGM) da UFF e diretor do Núcleo de Ensino e Pesquisas em Ciências do Rio de Janeiro (NEPEC). Esta pesquisa tinha por objetivo integrar os estudos teóricos até então realizados em Análise Matemática a aplicações da Geometria Diferencial.

### 3 | O Primeiro Grande Desvio na Trajetória

Cabe aqui abrir um parêntesis nessa narrativa e deixar anotado que, nessa época, havia, na grade dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática da UFF, o predomínio de disciplinas voltadas para a Lógica Matemática.

Lembrando que o Brasil se encontrava em pleno regime militar, iniciado em 1964, encontramos reflexos da ditadura instituída no documento relativo à grade curricular implantada, para ambos os Cursos, em 1971 (2º e 3ª Art. da Res. 01/71 do Conselho de Ensino e Pesquisa da UFF). Assim, essa grade refletia as exigências impostas pelo Ministério da Educação a respeito da implantação de um currículo mínimo para a Licenciatura em Matemática no qual deveriam ocorrer as disciplinas *Cálculo Numérico*, *Cálculo Diferencial e Integral* e *Estudos de Problemas Brasileiros*.

Para satisfazer as exigências governamentais, e lembrando que o coronel professor Jorge Barbosa era então Reitor da UFF, conteúdos de Cálculo Numérico foram oficialmente inseridos com a denominação de “Matéria” na disciplina *Teoria dos Números* (alocada no GGM) e alguns conteúdos básicos de Cálculo Diferencial e Integral nas disciplinas *Análise Matemática* e *Análise Superior* (ministradas pelo GAN). Esses fatos estão apresentados em artigo sobre uma pesquisa que realizei mais recentemente sobre os currículos dos Cursos de Matemática da UFF (KALEFF; ROSA, 2014).

No entanto, me recordo que, enquanto professora do GAN, de 1970 a 1974, pude observar que os conteúdos ministrados raramente tangeram àqueles do Cálculo, os quais eram até evitados e ficavam sempre restritos aos de Análise Matemática.

Os conteúdos tratados também tinham por base textos fundamentados na Lógica Matemática e em uma linguagem formal específica e própria àquele departamento. Esta era baseada na teoria das *Sistematizações Universais*, desenvolvida em pesquisas lideradas pelo professor Jorge Barbosa (BARBOSA, 1970; 1971). Os resultados desses estudos também eram difundidos praticamente em todas as aulas das disciplinas ligadas ao GAN, tanto na graduação como no Mestrado.

Frente a tudo isso, no entanto, posso dizer que fui a primeira professora do Curso de Matemática da UFF a ministrar conteúdos de Cálculo, pois se voltamos ao ano de 1973, como professora do GAN e com a anuência do Coordenador do Setor de Análise Matemática Professor Aldemar Pereira Torres, introduzi exercícios de Cálculo Diferencial e Integral para ilustrar alguns conteúdos teóricos nas aulas da disciplina *Análise Matemática IV* por mim ministradas. Em decorrência da minha opção por trabalhar com tais conhecimentos de maneira explícita e integrada na disciplina, e embora de acordo com as chamadas *Matérias*, explicitamente veiculadas como conteúdos das disciplinas da grade curricular vigente na época e implantada em 1971, fui veementemente “aconselhada” pela chefia departamental a pedir transferência para outro setor da UFF.

Para tanto, optei pelo Departamento de Geometria (GGM), o que veio a ocorrer ainda em 1974, com o acolhimento do chefe do departamento, Professor Constantino M. de Barros.

Essa mudança, como relatarei mais a seguir, viria mudar radicalmente a minha percepção da Matemática como Ciência e, mais ainda, a percepção do que é o aluno da escola e o licenciando. Isso viria a influenciar na minha atuação como professora.

Frente a todos esses fatos, cabe dizer ainda que, no âmbito dos currículos dos Cursos de Matemática da UFF, somente em 1976, *Cálculo Diferencial e Integral* foi finalmente explicitamente inserido na grade curricular como *Disciplina* de ambos os cursos, tanto no de Licenciatura quanto no

de Bacharelado, consolidando-se cada vez mais até os dias atuais (KALEFF; ROSA, 2014).

Enquanto *Lógica Matemática*, a partir de 1980, foi transformada em disciplina optativa...



## 4 | Novas Paisagens ao Longo do Percurso

Após a transferência para o GGM, em 1974, a primeira consequência foi que a pesquisa realizada sob a orientação do Professor Constantino M. de Barros veio a ser oficializada junto à UFF.

### 4.1 A DISCIPLINA FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA

No ano de 1975, ao ministrar pela primeira vez a disciplina *Fundamentos de Geometria*, levei os alunos a analisarem partes de dois dos mais importantes textos publicados na época sobre Fundamentos de Geometria, escritos pelos matemáticos Gustave Choquet (1964) e Jean Dieudonné (1964). Cabe lembrar que durante o movimento conhecido como *Matemática Moderna*, ocorrido nos meios acadêmicos e educacionais nas décadas de 1950 a 1980, estes textos serviram de fundamento a polêmicas acerca da formação do professor de Matemática. Nessa época, muito se discutiu sobre a importância de se levar o futuro professor a realizar uma análise sobre o desenvolvimento axiomático da Geometria Euclidiana frente ao seu desenvolvimento vetorial.

Foi por meio do comportamento dos alunos expostos aos conteúdos advindos destes textos que fui despertada para as grandes dificuldades que muitos apresentavam na elaboração formal de conceitos geométricos elementares. Comecei a me questionar se: *existiriam fatores não pertencen-*

*tes ao âmbito dos conteúdos matemáticos das teorias, mas pertencentes ao âmbito de ensino-aprendizagem, influenciando o entendimento dos conteúdos matemáticos?*

*Como desdobramento desta questão, começaram a surgir outras: existiriam fatores especiais relacionados ao ensino das teorias matemáticas dedutivas que auxiliariam o entendimento e facilitariam a aprendizagem de conteúdos matemáticos? Existiriam fatores “externos” à Matemática que influenciariam a aquisição do conhecimento matemático? Existiriam maneiras de se explicar como o conhecimento matemático se forma na mente do aluno?*

## **4.2 OUTRAS PAISAGENS**

Por problemas de saúde durante a gravidez do meu filho, no segundo semestre de 1975, fui obrigada a me afastar da UFF.

Em 1976, após solicitar licença sem vencimentos, fixei residência em Hamburgo, Alemanha, acompanhando meu esposo Peter Kaleff, professor da UFRJ, que viria a fazer doutorado naquele país.

Durante o ano de 1978, como aluna-visitante, me inscrevi em algumas disciplinas do Curso de Matemática da Universidade de Hamburgo, as quais, novamente por motivo de outra gravidez de risco, agora da minha filha, precisaria abandonar.

Durante os anos de 1979 e 1980, frequentei as reuniões pedagógicas do jardim de infância onde meu filho estava matriculado. Esta pré-escola, de orientação psico-analítica, me ensinou as primeiras reflexões sobre o papel da Psicologia e sua influência na Educação. Cumpre lembrar que minha formação nesta área se restringia às disciplinas tradicionais da licenciatura.

Foi nessa época que fui tomada pela paixão pela Psicologia Cognitiva e durante 1980, ainda na Europa, ocorreu-me desistir da carreira como docente do Curso de Matemática e ingressar em um curso de graduação em Psicologia...

## 5 | Retomando o Caminho na UFF: Pouca Coisa Havia Mudado na Paisagem Acadêmica

No final de 1980, contrariando as minhas expectativas, ao voltar ao Brasil, imediatamente assumi meu lugar como professora do GGM. Isso se deu por aconselhamento dos dois professores que há muito haviam se transformado em grandes amigos: Aldemar Pereira Torres e Constantino M. de Barros. Esses eram da opinião de que a política acadêmica dos departamentos do Instituto de Matemática (IMUFF) estava muito mudada, permitindo a abertura de novos caminhos para pesquisas interdisciplinares, o que eu, então, tanto almejava.

Em 1981, com o apoio do professor Constantino M. de Barros, iniciei a pesquisa *Fundamentos de Geometria – aspectos práticos*, buscando analisar fatos da história da Geometria relacionados a seus fundamentos, os quais, acreditava, poderiam fornecer subsídios para o tratamento dos problemas que começara a perceber no ensino. Assim, analisando as dificuldades e obstáculos epistemológicos, surgidos durante o desenvolvimento dos conceitos fundamentais da Geometria Euclidiana e das não-Euclidianas (aquelas que negam o Quinto Postulado de Euclides), buscava encontrar uma explicação para as dificuldades apresentadas pelos alunos à luz da, então emergente, Educação Matemática.

Dois fatos muito importantes na caminhada marcaram essa época de trabalho no GGM: a morte prematura do professor Constantino M. de Barros, em 1983, e o meu grande descontentamento frente à política norteadora do departamento, o qual não reconhecia a Educação Matemática como área de pesquisa e não aceitara uma proposta de um novo projeto nessa direção.

Frente aos fatos que se apresentavam, não me restou outra saída do que abandonar oficialmente as pesquisas iniciadas.

## 6 | Mais um Parêntesis e Tempo de Observação na Trajetória

No entanto, de 1984 a 1987, não deixando de observar atentamente o comportamento dos alunos, ministrei, entre outras, as disciplinas *Fundamentos de Geometria* e *Complementos de Geometria*, pertencentes ao ciclo profissional de bacharelados e licenciandos. Com esta experiência, tive a oportunidade de entrar em contato com os diversos enfoques teóricos por meio dos quais se pode representar a Geometria, isto é, como geometria sintética, analítica, vetorial e das transformações.

Particularmente, no caso da disciplina *Complementos de Geometria*, devido à ementa de conteúdos apresentar ambiguidade em relação à da disciplina *Geometria Analítica II* (pois eram as mesmas para disciplinas alocadas em semestres diferentes), tomei a decisão de introduzir aspectos teóricos decorrentes da geometria sintética e da de transformações, visando a relacioná-los com os demais enfoques supostamente dominados pelos alunos, pois eram abordados tanto na *Geometria Analítica II*, como em outras disciplinas do ciclo básico dos Cursos de Matemática, como casos particulares de aplicações da álgebra linear e álgebra vetorial.

Para minha total surpresa, constatei que os alunos, apesar de terem vivências anteriores em todas essas perspectivas de representação, não apresentavam uma rede de relações entre os seus significados, o que vinha a contrariar tanto as expectativas preconizadas pela *Matemática Moderna* (supostamente devidas a Dieudonné, sobre as vantagens da generalização dos conceitos relativos aos espaços vetoriais), quanto as que priorizavam

a geometria das transformações (devidas a Félix Klein e defendidas por Choquet). No primeiro caso, a generalização dos conceitos apresentava como consequência um exercício de memorização e a falta de conexões entre as várias representações da estrutura de espaço vetorial. No segundo caso, a geometria das transformações esbarrava na falta de integralização e na não formalização adequada dos conteúdos geométricos por parte dos alunos, embora pudesse proporcionar uma abordagem didática mais favorável para as representações, permitindo ao professor desenvolver um processo de ensino mais dinâmico, construtivo e prazeroso (o que evidentemente não era feito em sala de aula da UFF). Estas constatações, de certa forma, vinham corroborar e dar força ao meu questionamento já estabelecido em 1975, relativo ao desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos.

## 7 | **Tempo de Busca de Parcerias para o Enfretamento da Caminhada: o Encontro e a Companhia de um Grande Paradigma**

Desde o início da década de 1980, no meio acadêmico, contrariando a posição filosófica do GGM, o interesse pela Educação Matemática crescia tanto no nível internacional quanto no nacional.

A partir de 1984, participei de vários eventos e militei no processo político de criação e implantação da *Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM)*, da qual sou sócia fundadora. Para tanto, participei de reuniões do *Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática (GEPEM)* e do grupo G-RIO que visavam à elaboração dos estatutos da Sociedade e a um movimento em prol da Educação Matemática no Rio de Janeiro.

Abro aqui um parêntesis para relatar que, nessa época, conheci a professora Maria Laura Mouzinho Leite Lopes, fundadora e coordenadora do Projeto Fundação da UFRJ (até sua morte, em 2013). Este é um exemplo de projeto do qual todos nós, professores de uma universidade federal, deveríamos participar para realmente realizarmos atividades de Educação Matemática, pois reúne professores universitários, licenciandos e professores das redes de ensino. Essa professora muito me aconselhou e acompanhou minha jornada na UFF nos anos que se seguiram. Mostrou a todos, e principalmente àqueles que trabalham em universidades conservadoras, caminhos alternativos para que batalhem pela Educação Matemática e não

somente pelo Ensino da Matemática.

Sempre chamei a professora Maria Laura carinhosamente de *Meu Grande Paradigma!*

Quantas vezes, em mais de 30 anos de amizade, trocamos longos telefonemas, já que ela não usava internet! Foi ela quem me levou a participar e atuar ativamente nos eventos anuais denominados de *Encontro do Projeto Fundação*, bem como nos seus inúmeros seminários. Ainda me indicou bibliografias e manifestou opiniões sobre o que, muitas vezes, deveria ser trabalhado em uma licenciatura...

Quantos conselhos úteis me foram dados por ela e quantos *puxões de orelha!*

Quanto incentivo a iniciativas novas! Porém, sempre lembrando a nossa responsabilidade por sermos professores de uma universidade pública!

## 8 | Tempos Iniciais da Caminhada como Educadora Matemática na UFF

Em 1988, me reuni a um grupo de professores do GAN e demos início a estudos dos quais originou o primeiro projeto de extensão interdepartamental em Educação Matemática da UFF: *Um Experimento de Educação Matemática no nível de 1º segmento de 1º grau (PEEM)*.

O projeto PEEM contou com apoio da Pró-Reitoria de Extensão da UFF (PROEX) e da SESU/MEC, tendo sido coordenado, em 1988, pelos professores Arago de Carvalho Backx e Rosa Nader Rodrigues, ambos do GAN. Em 1989, em conjunto com esse professor, assumi a coordenação do projeto.

Essa ação extensionista, influenciada por uma visão piagetiana construtivista, trouxe, sem sombra de dúvida, uma grande contribuição para a então emergente pesquisa em Educação Matemática na UFF, pois tinha como referencial teórico os importantes trabalhos dos professores Luciene Felix e Georges Papy do Centro Belga de Pedagogia da Matemática de Bruxelas, bem como os de Constance Kamii e Zoltan Dienes (PAPY; PAPY, 1970; KAMII; DE CLARK, 1985; DIENES; GOLDING, 1969).

A análise dos resultados de uma pesquisa de campo levada a efeito no âmbito do projeto trouxe à luz algumas lacunas quanto ao aprimoramento didático-pedagógico da comunidade de professores de Matemática do ensino básico dos municípios de Niterói e São Gonçalo. Cabe ressaltar também que a experiência com o PEEM e as conclusões da sua pesquisa

influenciaram o estabelecimento dos objetivos e metas de vários outros projetos de pesquisa e extensão que se iniciavam no âmbito da Educação Matemática e do ensino de Geometria na UFF.

Nesse início de meu envolvimento com a Educação Matemática, ainda em 1988, sob minha coordenação, com a colaboração da PROEX, do Diretório Acadêmico do Curso de Matemática (DACM), bem como dos professores do PEEM e de outros da Faculdade de Educação da UFF, foi realizada a *I Semana de Educação Matemática da UFF*, à qual compareceram cerca de 120 professores de Matemática da comunidade. Ainda com a colaboração da PROEX e DACM, coordenei as II a IV Semanas de Educação Matemática nos anos subsequentes.

Um pouco antes da implantação do PEEM também aconteceu uma intensa reflexão sobre os currículos dos cursos de Matemática em Niterói, a qual foi liderada por um grupo de professores que desejavam revitalizar e atualizar as disciplinas tendo em vista a longa duração hegemônica daquelas advindas da Matemática Moderna. Participei intensamente dessa reformulação, como membro representante do GGM no Colegiado do Curso de Matemática (período de março de 1994 a setembro de 1998), bem como membro da Coordenação das Licenciaturas da UFF como representante do Curso de Matemática-Niterói e membro da Comissão Especial de Professores de Apoio à Licenciatura (CPAL), no período de 1994 a 1997.

A reformulação curricular aconteceu em 1988 e teve como consequência a retirada de boa parte da carga horária das disciplinas *Análise, Lógica e Fundamentos da Matemática*, sendo substituídas por *Cálculo Diferencial e Integral (I, II e III)* e *Geometria Euclidiana*. Esta, finalmente, vinha fazer parte das grades curriculares do Bacharelado e da Licenciatura!

Por sua vez, na grade da Licenciatura, além das disciplinas da Faculdade de Educação, passaram a fazer parte duas da área de Educação Matemática, ministradas por departamentos do IMUFF. No entanto, na denominação dessas novas disciplinas não constava nenhuma menção a esta área de conhecimento, pois as disciplinas vieram a ser chamadas de *Tópicos de Matemática Elementar* e *Tópicos de Matemática e Realidade* alocadas no GAN e GGM, respectivamente.

Cabe ressaltar que essa foi dessa forma com que tópicos de Educação Matemática foram aceitos e puderam ser inseridos na Licenciatura, ou seja,

sem que houvesse, na grade curricular, uma referência explícita específica à área de conhecimento. Além disso, de um total de 47 disciplinas optativas da nova grade, somente duas eram especificamente destinadas à formação do professor (KALEEF; ROSA, 2014).



## 9 | Tomando o Caminho da Pesquisa em Educação Matemática

Também em 1987, perseverando nos meus propósitos como educadora matemática, mas sem mencionar essa intenção, retomei a pesquisa *Fundamentos da Geometria - aspectos práticos*, para a qual contei com o apoio da Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-graduação (PROPP, atualmente PROPPPI), com a dotação de bolsas de Iniciação Científica para três alunos. Durante dois anos foram estudados aspectos da psicogênese, da história e dos conteúdos teóricos das Geometrias não-Euclidianas (elípticas e hiperbólicas). Estudamos dos principais obstáculos que desafiaram os geômetras desde 300 a.C. aos fatos que os levaram à descoberta das Geometrias não-Euclidianas no início do século XIX. Além disso, foram elaborados módulos instrucionais sobre a teoria de Saccheri e desenvolvemos alguns modelos elementares finitos de sistemas de incidência. Com estas ações, buscava minimizar as dificuldades que os alunos encontravam perante a abordagem formal e dedutiva dos sistemas axiomáticos não-euclidianos.

Frutos destes estudos foram publicados em um artigo sobre o Movimento Matemática Moderna, envolvendo sua origem e aspectos de seu desenvolvimento em alguns países ocidentais (KALEFF, 1989). Outros frutos foram compilados em notas de aulas apostiladas sobre sistemas axiomáticos dedutivos e uma introdução ao estudo das geometrias finitas e das não-Euclidianas (KALEFF, 1889; versão revista, 2006).

## 9.1 UM MARCO TEÓRICO DETERMINANTE PARA A TRAJETÓRIA

Em maio de 1988, participei de um Seminário sobre *Pesquisa em Ensino da Matemática*, na Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (USP), ministrado pelo professor Claude Gaulin da Universidade de Laval, Canadá.

Foi nesta ocasião que tomei conhecimento da existência de um modelo teórico para o desenvolvimento do pensamento geométrico: o *Modelo de van Hiele*. Nessa oportunidade, o professor Gaulin me aconselhou a pesquisar mais a fundo esse Modelo, pois desta forma talvez pudesse responder às questões que há muito me movimentavam.

Ainda em 1988, portanto, nos tempos da antiga máquina de escrever mecânica, fiz a tradução de quatro artigos sobre pesquisas americanas e inglesas envolvendo o Modelo de van Hiele e os levei datilografados para estudo no grupo do PEEM. No entanto, os professores do projeto manifestaram pouco interesse pela teoria apresentada, alegando ser impossível aplicar o Modelo em um país com pouca instrução escolar como o Brasil, e pelo fato também de ele ser limitado à Geometria. Essas opiniões eram totalmente equivocadas, pois os artigos apresentavam exemplos de aplicações em outros países pouco desenvolvidos (como alguns da então União Soviética) e citações de aplicações à Biologia e à Estatística.

Para total desencanto meu, tudo indicava que ninguém lera nem se interessara pelo Modelo...

Essa atitude negativa frente ao Modelo não me desanimou, pois, perseverando nos meus princípios acadêmicos, essas reações dos colegas fortaleceram a resolução de caminhar sozinha no desenvolvimento de projetos de Educação Matemática à busca das respostas aos questionamentos para a melhoria do ensino das Geometrias.

## 9.2 PESQUISAS INICIAIS E A BUSCA POR NOVOS MARCOS TEÓRICOS

Durante os anos de 1989 e 1990, iniciei outra vertente da pesquisa anterior com o projeto *Fundamentos de Geometria: aspectos práticos dos níveis*

*de pensamento de van Hiele*, para o qual também contei com o apoio da PROPP e concessão de duas bolsas de Iniciação Científica.

Nesse projeto, observei que não se podia mais negar a existência de inúmeras pesquisas sobre a aprendizagem da Geometria e que o seu ensino não podia mais ser restrito à exposição de representações de modelos de sistemas geométricos dedutivos, nem a uma aplicação da teoria das transformações, cujo fracasso didático pedagógico já havia sido constatado por muitos pesquisadores (HERSHKOWITZ et al., 1990).

Nesta época, muitos educadores matemáticos consideravam que, no processo de ensino-aprendizagem da Geometria, o grande prestígio da sistematização euclidiana havia se prestado mais a desvios ou a incompreensões do que a uma exploração consequente. Além disso, como preconizado pelo grande educador matemático Hans Freudenthal, havia a necessidade de se ter conhecimento da realidade cognitiva do aluno a qual permitisse aplicar uma metodologia de ensino que não o violentasse e não o levasse a recorrer puramente à memorização. Tudo isso já começava a ser levado em consideração em nível internacional (FREUDENTHAL, 1973).

Nessa direção, como apontavam as pesquisas da equipe de Hershkowitz, a teoria de van Hiele pretendia combinar o entendimento da Geometria como ciência da representação do espaço com a Geometria representada como estrutura lógico-dedutiva, por meio da qual se pode perceber o que é uma estrutura matemática. No Modelo de van Hiele, então considerado, os conceitos geométricos eram desenvolvidos pelos alunos em cinco níveis de entendimento, por meio de fases bem determinadas de ensino (HOFFER, 1981; 1983).

Do resultado da nossa pesquisa surgiu nosso primeiro artigo sobre os níveis de van Hiele e suas respectivas fases, apresentado no II Congresso Nacional de Iniciação Científica, realizado na UFRJ (KALEFF; FIGUEIREDO; HENRIQUES; REI, 1989). Devido à importância do tema e por ter sido um dos primeiros trabalhos em português sobre o assunto, uma revisão deste artigo foi publicada no periódico *Bolema* - UNESP (KALEFF; FIGUEIREDO; HENRIQUES; REI, 1994). Nesse artigo também apontamos para a importância, na formação do professor, da iniciação do aluno a uma pesquisa acadêmica sobre temas relevantes para o ensino da matemática.

Já nesta época, via-me inclinada a crer que o fracasso observado no curso superior à introdução das Geometrias era decorrente, não somente de dificuldades inerentes aos conceitos geométricos envolvidos, mas do desenvolvimento inadequado do pensamento geométrico do aluno (adulto), que não atingia, pelas minhas observações, o nível desejado da ordenação formal necessário (segundo van Hiele) para o bom desempenho do método dedutivo. Estas observações também eram fortalecidas pelos resultados das pesquisas de alguns pesquisadores europeus e americanos (GROWS, 1992). No entanto, comecei a perceber que tudo isso necessitava de uma comprovação objetiva relativamente ao alunado brasileiro.

## 10 | Um Novo Desvio na Caminhada e o Apoio do CNPq

Todavia, já em 1990, percebi que um estudo mais aprofundado dos níveis iniciais seria necessário para que pudesse entender a proposta de van Hiele se pretendesse entender os níveis cognitivos mais altos do Modelo: organização formal e rigor.

Com a experiência cada vez maior que vinha adquirindo com a formação (inicial e continuada de professores) e em um estudo mais crítico sobre os três primeiros níveis, tomei consciência de muitos problemas que afligiam os nossos professores brasileiros de Ensino Médio e Fundamental. Tais problemas estavam não somente relacionados com a prática pedagógica do docente, mas também eram consequência de lacunas no próprio conhecimento da Geometria devido a uma formação inicial depauperada.

Assim, durante os anos de 1991 e 1992, estudei os níveis de van Hiele, sua relação com o desenvolvimento das habilidades geométricas (visualização, linguagem, expressão gráfica e lógica) e suas características específicas, o que foi tomado como base para o desenvolvimento da pesquisa *O desenvolvimento de uma metodologia de ensino levando-se em conta a estrutura hierárquica do pensamento em Geometria - o Modelo de van Hiele*, a qual contou com o apoio do CNPq e da PROPP. Não custa lembrar que, nessa época, não havia *Plataforma Lattes*, ainda era tempo da entrega direta dos projetos ao CNPq (via correio) e os computadores pessoais estavam dando os seus primeiros passos, ainda no sistema DOS e nem se cogitava de computadores com Windows, Linux, etc.

No âmbito desta pesquisa, elaborei uma bateria de testes para investigar as possíveis concepções do conceito de *área de uma superfície plana* que os professores apresentam, já que nos documentos orientadores do ensino brasileiro este era, e o é ainda hoje, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), um dos aspectos euclidianos mais enfatizados relativamente às grandezas de medida.

Os testes foram fundamentados em pesquisas americanas e aplicados, em entrevistas individuais, a um grupo de dezoito professores dos três níveis de ensino. Uma análise dos resultados destes testes revelou uma grande variedade de respostas contraditórias e ambiguidades sobre as concepções dos conceitos considerados, tendo sido constatado que o conceito de *superfície plana* era o que apresentava maiores problemas quanto à concepção. Este conceito era confundido com o de *área de uma superfície*, com o de *um plano* ou até mesmo com o de *semiplano que contém uma superfície*. Os resultados desta pesquisa foram apresentados no II Congresso Ibero-americano de Educação Matemática em 1994 (KALEFF; GARCIA; REI, 1994).

Os mesmos resultados motivaram a elaboração de um conjunto de módulos instrucionais, alguns dos quais estão descritos em um livro sobre quebra-cabeças e formas geométricas planas (KALEFF; GARCIA; REI, 1996) e em um artigo sobre uma aplicação do conceito de simetria axial plana visando a um ensino interdisciplinar (KALEFF, 1994).

Dando continuidade aos estudos, em 1993, e novamente com o apoio do CNPq e da PROPP, elaborei o projeto de pesquisa *O desenvolvimento de uma metodologia de ensino para Geometria e Trigonometria, levando-se em conta o Modelo de van Hiele*, no qual foram exploradas as concepções de professores sobre os conceitos de *forma e volume* de sólidos geométricos e desenvolvido um programa para o ensino da Trigonometria para as séries finais do Ensino Fundamental, com ênfase na habilidade da visualização.

Entre os produtos derivados deste novo projeto estão os artigos publicados no Brasil na *Revista do Professor de Matemática* (RPM) e em Portugal, na *Educação e Matemática* da Associação Matemática de Professores (KALEFF, 1998; KALEFF; REI, 1996 a; KALEFF; REI, 1996 b; KALEFF; REI, 1995).

Posteriormente, este artigo de 1995 foi reelaborado e publicado em livro editado pela SBM/MEC (KALEFF; REI, 2004).

Além disso, coordenei a elaboração de um conjunto de módulos instrucionais para o ensino de Trigonometria, os quais foram amplamente divulgados em cursos de treinamento para professores ministrados em eventos nacionais relacionados à Educação Matemática.

Cabe adiantar que os estudos aqui desenvolvidos e que envolveram todos os módulos instrucionais relatados, anos depois, já no final da década de 2000, vieram também a fundamentar a elaboração dos experimentos educacionais concretos virtuais desenvolvidos no Projeto *Conteúdos Digitais para o Ensino e Aprendizagem da Matemática do Ensino Médio* (CDME). Projeto Condigital MEC – MCT/CAPES.

Apesar das muitas críticas e questionamentos quanto a alguns dos aspectos característicos do Modelo de van Hiele, como apontados naquela época por Rina Hershkowitz, eu estava convencida de que o Modelo poderia ser um excelente guia para a elaboração de recursos didáticos para o ensino da Geometria elementar, quando restrito aos três níveis iniciais e quando considerado independentemente da aplicação de testes de avaliação de níveis. Por outro lado, também estava atenta aos estudos de Alan Hoffer, desenvolvidos junto a professores americanos, o qual havia tentado divulgar uma proposta para o ensino de Geometria fundamentada no Modelo sem recorrer à aplicação de testes de avaliação dos níveis de van Hiele (HOFFER, 1979). Esta proposta requeria, do docente, uma mudança de postura e um preparo cultural que colocassem a ênfase em um ensino experimental mais intuitivo, em detrimento do ensino tradicional dedutivo e, segundo os professores americanos, as atividades didáticas propostas por Hoffer, se mostravam muito avançadas e de difícil assimilação (GROWS, 1992).



## 11 | Opção por Projetos de Extensão para a Formação Continuada e uma Nova Pesquisa

Frente aos fatos observados nos outros países e considerando que, no Brasil, a disciplina *Geometria Euclidiana*, na época, não fazia parte da maioria das grades curriculares dos cursos de licenciatura em Matemática, pois havia sido substituída pelas abordagens vetorial e analítica, como consequência do Movimento Matemática Moderna, encontrava-me diante do despreparo dos professores. Mesmo no caso da UFF, como já relatei anteriormente, essa disciplina só veio a fazer parte da grade da Licenciatura da Matemática a partir de 1988, enquanto que desde 1976 constavam dessa grade *Geometrias não-Euclidianas*, *Fundamentos de Geometria*, *Geometria Projetiva* e mesmo *Geometria Diferencial* (KALEFF; ROSA, 2014).

Pelas razões apresentadas, desde 1990, passei a elaborar projetos de extensão voltados para a formação continuada do professor de Matemática, nos quais tentava minimizar esse despreparo para a Geometria Euclidiana, por meio de ações extensionistas advindas destas pesquisas, tais como: aplicação em cursos de treinamento da metodologia desenvolvida nos projetos de pesquisa; prestação de assessoria na confecção de recursos didáticos, incluindo jogos, materiais manipulativos e técnicas de representação geométrica; desenvolvimento de atividades para feiras de Ciências, entre outros.

No entanto, no decorrer dos primeiros cursos ministrados, fui sistematicamente observando algumas deficiências significativas apresentadas pe-

los cursistas no modo de visualizar e de interpretar informações pictóricas, principalmente quando aplicadas na introdução de conceitos geométricos tridimensionais. Observava também um ceticismo alarmante quanto à utilidade do uso dos materiais concretos como ferramenta no processo educacional, considerados como *infantis*, por alguns dos professores, apesar das dificuldades que eles próprios apresentavam na manipulação dos materiais, na elaboração dos conceitos e, principalmente, nas deduções.

Cabe lembrar que, por influência da grande educadora matemática professora Estela Kaufman Fainguelernt (então professora da Universidade Santa Úrsula-USU e uma das fundadoras do grupo GEPEM-RJ), entre 1991 e 1994, frequentei cursos realizados naquela instituição e apoiados por esse grupo. Neles, vim a fazer contato com educadores matemáticos do Instituto Weizmann de Israel. O primeiro desses contatos foi com o professor Abraham Arcavi, que me chamou a atenção para as noções de *sentido e de significado de um conceito matemático* e me apresentou os trabalhos sobre Geometria e *visualização* de Rina Hershkowitz. A partir daí, decidi elaborar um programa de *testes de avaliação*, como alternativa aos testes de van Hiele sobre o conhecimento geométrico de adultos e relacionado a objetos tridimensionais. Com tais testes pretendia avaliar e quantificar as observações que vinha percebendo, além de me munir de argumentos que permitissem ajudar os participantes dos cursos a se tornarem mais conscientes de suas próprias deficiências, alertando-os sobre seu desempenho pouco adequado enquanto profissionais.

Entre 1991 e 1993, um dos testes escritos foi aplicado a um total de 590 pessoas de diversas clientela, com diferentes experiências de escolaridade (professores, alunos do ensino médio e licenciandos), em variados meios sociais. Os resultados foram submetidos a uma análise aonde foi levado em conta o sexo dos testados. Parte das conclusões relativas a este teste está relatada em um artigo sobre como adultos interpretam desenhos e calculam volumes de sólidos construídos por pequenos cubos, no qual são enfocadas duas questões envolvendo aspectos visuais de sólidos elementares e o conceito de medida de volume (KALEFF; GARCIA; REI, 1997). Foi constatado que os resultados do cálculo do volume de um paralelepípedo a partir do seu desenho obtido pelos homens relativamente aos resultados

obtidos pelas mulheres era compatível com os apresentados por testes internacionais com jovens de 17 anos. Ou seja, no caso dos professores, os acertos eram da ordem de 44% para as mulheres e 76% para os homens. Em outro desenho representado o mesmo paralelepípedo do qual foi retirado um cubo e desenhado em outra posição os acertos foram de 61% e 68%, respectivamente. Tais resultados eram bem desanimadores sobre a preparação dos professores, pois as figuras com empilhamento de cubos faziam (e fazem até hoje) parte dos ensinamentos escolares iniciais sobre volume para os jovens de 10-11 anos de idade.

Outros resumos das análises e conclusões desses testes estão apresentados nos anais da Reunião do XIX Internacional Group of Psychology of Mathematics Education-PME (KALEFF; GARCIA; REI, 1995 a), bem como nas atas do I Congresso Internacional de Matemática y Diseño, (KALEFF; GARCIA; REI, 1995b) do qual participamos na Argentina, e ainda nas Atas do II Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática (KALEFF; GARCIA; REI, 1994).

## **11.1 PEDRAS QUE PAVIMENTAM O CAMINHO DA PESQUISA E DA EXTENSÃO**

Por meio das respostas aos testes aplicados, obtive informações que levaram, em uma primeira etapa, à confirmação de algumas das dificuldades observadas no desempenho dos professores cursistas e, em uma segunda, à melhoria e à ampliação dos módulos instrucionais que vinha aplicando nos cursos. Estas informações forneceram subsídios para o desenvolvimento de um conjunto amplo de materiais didáticos manipulativos (com respectivas atividades para o aluno), os quais visam a não somente prover o professor com ferramentas mais adequadas à sua prática de ensino, mas também a fornecer-lhe material que o auxilie no desenvolvimento da própria habilidade visual geométrica, na formação dos conceitos matemáticos elementares em relação aos quais apresenta deficiências, seguindo os três níveis iniciais de van Hiele.

Perseverando na busca da melhoria da prática das nossas ações, a partir de 1994, após contato pessoal com a professora Rina Hershkowitz, em

curso patrocinado pelo GEPEN/USU, passei a adotar uma variação do teste escrito desenvolvido anteriormente, a qual foi utilizada como atividade introdutória nos cursos de extensão e treinamento, de média e longa duração, ministrados a professores. Sempre observei que tais cursistas se apresentam mais motivados a participar das atividades propostas após terem respondido ao teste e se defrontado com as suas próprias dificuldades.

Assim, de uma forma longitudinal, a partir de 1991 até 2012, o teste foi aplicado a mais de 1000 professores e licenciandos. Uma primeira publicação em revista sobre essa pesquisa aconteceu ainda em 1997, na *Zetetiké*, da Faculdade de Educação da UNICAMP (KALEFF; GARCIA; REI, 1997). Bem recentemente, já em 2014, comecei a divulgar alguns dos resultados obtidos e relativos à cerca de 400 graduandos da Matemática da UFF pesquisados nos anos posteriores (KALEFF; ROSA, 2013; KALEFF ; MOURÃO, 2014).

## 11.2 OUTROS MARCOS TEÓRICOS BALIZADORES DO CAMINHO

É interessante lembrar que, em 1989, sob os auspícios da associação norte-americana de professores de Matemática (NCTM - *National Council of Teachers of Mathematics*), foi publicado o livro *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (que se tornou conhecido como *Standards*), que continha uma proposta de mudança curricular para o ensino da disciplina Matemática, da educação infantil ao ensino médio, nos Estados Unidos da América. Essa publicação se constituiu em um marco fundamental no movimento de recuperação da Geometria como tema relevante da matemática escolar, sendo que sua maior importância é a de ter concentrado, em um documento de significativa representatividade acadêmica, todo um movimento de rejeição da situação em que se encontrava o ensino da Matemática depois dos anos da Matemática Moderna.

Além das alterações metodológicas que caracterizavam a visão do ensino da Matemática veiculada pelos Standards, neles eram apresentadas propostas de alteração dos programas tradicionais, no sentido de se dar maior relevo à aprendizagem da Matemática em contextos de resolução de problemas ligados às vivências cotidianas dos alunos e à interdisciplina-

ridade com outras áreas de conhecimento como Biologia, Física, Artes etc.

No âmbito do sistema escolar brasileiro, as mudanças curriculares também começavam a ser questionadas e, em meados da década de 1990, um documento começava a tomar corpo, originado dos meios governamentais: os *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)*, tanto para o Ensino Fundamental como para o Médio. A proposta brasileira, no que concerne à Matemática, teve nos *Standards* um dos seus pontos de partida, possuindo, portanto, uma filosofia muito próxima àquela do documento americano, no que diz respeito aos conhecimentos geométricos a serem implantados na escola.

O documento referente ao Ensino Fundamental, os PCN-Matemática - 5ª a 8ª series (BRASIL, 1998), aquele que tratava explicitamente dos jovens adolescentes, apresentava a Matemática aos professores. Neste documento, já era considerada como uma Ciência cujo conhecimento é constituído dinamicamente através da história do desenvolvimento humano, salientando especificamente o papel do surgimento das outras Geometrias, além da Euclidiana e da importância de suas inter-relações para o entendimento da realidade do espaço físico.

Observando os *Standards* e as primeiras publicações dos PCN, a partir de meados da década de 1990, como já citado anteriormente, busquei também balizar as atividades que vinha desenvolvendo para a sala de aula com esses novos marcos, juntamente com os trabalhos de Hershkowitz (para aprendizagem e visualização) e Alan Hoffer (na interação com o Modelo de van Hiele). Essa interação apontava ainda para mais três fontes de motivação para os nossos estudos com a ligação entre as Artes e a Geometria, o que Hoffer já admitia. Encontrei a primeira nas litografias de ilusão de ótica criadas pelo artista holandês Maurits Escher (1898-1972), enquanto que a segunda foram os desenhos de uma serie de xilogravuras do renascentista alemão Albrecht Dürer (1471-1528) realizadas por volta de 1525. Essas representam "*Ilustrações para um tratado sobre a arte da medida*" (KURTH, 1946, p. 334-340). A terceira fonte de motivação foi trazida por um autor que chamou minha atenção para uma possível ligação entre a Lógica Matemática, as Artes e a Música, pois foi a partir da obra de Douglas R. Hofstadter, intitulada *Gödel, Escher and Bach*, que realizei uma profunda refle-

xão por meio do entrelaçamento de considerações sobre sistemas lógicos, artes gráficas e grafias geométricas, a criatividade no ambiente escolar, o ensino e aprendizagem da Matemática (HOFSTÄDTER, 1979).

Percebi que os trabalhos de Dürer, por sua vez, abriam caminho para o ensino do desenho em perspectiva e apresentam diversas situações que mostram como se criar uma representação gráfica de um objeto. Dentre estas se encontram situações que mostram um artista no ato de desenhar objetos, inclusive retratos, fazendo uso da projeção de um foco de luz para apresentá-los em uma tela plana em branco, ou até mesmo de uma tela, na qual se encontra desenhada uma rede quadriculada, para obter formas semelhantes e medidas proporcionais. Segundo as palavras do próprio Dürer, tal método “é bom para todos aqueles que desejam fazer um retrato, mas que não podem confiar na sua habilidade” (KURTH, 1946, p. 41).

Nessa época, criar artefatos que representassem modelos concretos manipuláveis de sólidos e pudessem ajudar na criação e no entendimento de desenhos em perspectiva se tornou para mim em um grande desafio!

Independentemente de todas as perspectivas educacionais, a minha maior preocupação era encontrar marcos teóricos matemáticos que dessem embasamento e me permitissem transformar as propostas educacionais emergentes em recursos didáticos manipulativos na forma de artefatos e jogos, tanto planos quanto tridimensionais. Assim, foi em compêndios teóricos sobre polígonos e poliedros equivalentes que passei a embasar toda a minha ação. Por exemplo, para as considerações sobre a possibilidade de se ter quebra-cabeças planos, lancei mão da constatação de que regiões poligonais equivalentes não são, necessariamente, congruentes, pois um triângulo equilátero é equivalente a um quadrado, mas eles não têm a mesma forma e, portanto, não são congruentes (BOLTIANSKI, 1996). Para a decomposição de modelos de poliedros em quebra-cabeças tridimensionais, lancei mão da propriedade de que: *todo poliedro pode ser decomposto em pirâmides e também em tetraedros* (MORMOL; BEATO, 1945, p. 945).

Nas duas décadas seguintes, inegavelmente, foram esses marcos que vieram a fundamentar a trajetória do meu trabalho nos projetos desenvolvidos visando à melhoria do ensino da Geometria.

## 12 | **Parcerias Frutíferas em Prol da Educação Matemática: o Programa PADCT e o Espaço-UFF de Ciências**

Ainda em 1991, os projetos de extensão na área de Geometria, sob minha coordenação, passaram a integrar o Programa *Rede Regional Fluminense-Espaço-UFF* de Ciências os quais contaram com o apoio do *Sub Programa de Ensino de Ciências do Programa de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico da Capes (CAPES/ SPEC/PADCT)*. O grupo de professores em ação nesse programa era liderado por docentes do Curso de Física, que se fundamentavam nos estudos do meu antigo professor da PUC-CAMPINAS Rodolfo Caniatto. Assim, a identificação para um trabalho colaborativo foi imediata e deu muitos frutos nos anos que se seguiram.

O principal projeto desse programa foi o de *Desenvolvimento e aplicação de uma metodologia de ensino específica de tópicos fundamentais de geometria e a criação de laboratórios de geometria elementar*, desenvolvido no período de 1991 a 1996, com auxílio à pesquisa e de muitas bolsas de extensão, e que permitiu com que as ações pedagógicas desenvolvidas no GGM e no Espaço-UFF de Ciências fossem levadas à comunidade do Estado do Rio de Janeiro, além dos muros da UFF.

## 12.1 FUNDAÇÃO DO LABORATÓRIO DE ENSINO DE GEOMETRIA NO IMUFF E OUTROS NÚCLEOS DE LABORATÓRIOS

Com os recursos advindos do programa SPEC/PADCT foram criados três núcleos de laboratórios de ensino de Geometria: um no IMUFF e outro no espaço físico do Espaço-UFF de Ciências, ambos em Niterói. Outro ainda, nas instalações do Curso de Licenciatura-Interiorização em Matemática da UFF, em Santo Antônio de Pádua.

O núcleo de laboratório do IMUFF, instalado em uma pequena sala do segundo andar do prédio do Campus do Valonguinho, se transformou no Laboratório de Ensino de Geometria (LEG), integrado ao GGM. O seu regimento foi analisado e relatado ao Colegiado do Instituto pelos professores João Soares de Mello (GMA) e Cybele Tavares Maia Vinagre, sendo aprovado e oficializado, em dezembro de 1995. Além de ter sido de minha ação direta a criação e a fundação desse laboratório, desde maio de 1995, ele está sob minha responsabilidade como sua Diretora Científica.

Por outro lado, a partir de 1991, também foi objeto da minha atenção a criação de um Museu Interativo para o Ensino de Matemática e de Ciências, no Espaço-UFF de Ciências e, visando à consolidação do LEG no âmbito da UFF, coordenei os projetos *Ampliação do Acervo e da Atuação do Laboratório de Ensino de Geometria do Instituto de Matemática*, bem como *Criação de Atividades para um Museu Interativo para o Ensino de Geometria no Espaço-UFF de Ciências*, os quais davam continuidade às ações desenvolvidas nos projetos anteriores.

Como pode ser constatado, tanto o Museu Interativo que existe atualmente no atual Instituto de Matemática e Estatística (IME) quanto o próprio LEG tiveram origem em projetos elaborados fora do ambiente do Instituto, no entanto, como relato mais a seguir, desde 2005, seus acervos estão totalmente alocados na sala do LEG.

A história da fundação do LEG já foi contada em outros artigos e julgamos desnecessário reproduzi-la aqui (KALEFF, 2004 a; 2012). Quanto à denominação do LEG ser *Laboratório de Ensino de Geometria e não Laboratório de Educação Matemática*, essa foi mais uma estratégia, da qual lançamos

mão, para que fosse aceito e integrado ao GGM.

Nos três primeiros anos do programa SPEC/PADCT, entre os produtos mais marcantes e resultantes dos projetos foram a criação e desenvolvimento de materiais didáticos em um total de 30 (trinta) módulos instrucionais e de 16 (dezesseis) jogos geométricos, os quais passaram a integrar o Museu Interativo e a serem apresentados em mostras realizadas para alunos e professores de Ensino Fundamental e Médio, em muitos eventos em Niterói e em vários municípios do Estado do Rio de Janeiro.

Cabe adiantar e deixar registrado que, desde essa época, no LEG, já praticava o que se tornou na base da filosofia educacional para as ações ali realizadas: a necessidade de se elaborar recursos didáticos que envolvessem matéria-prima de baixo custo e de fácil obtenção pelo professorado brasileiro. Essa perspectiva educacional se tornaria em uma constante e uma marca de meu trabalho. Desde então, e cada vez mais, tenho certeza de que, como educadora matemática busco, por um lado, formar o futuro professor e, por outro, transformar as concepções educacionais do docente em exercício, para que eduquem pela matemática e não somente busquem educar o seu aluno para a Matemática científica.

## **12.2 DIVULGAÇÃO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E A INTERIORIZAÇÃO DOS PROJETOS DE EXTENSÃO**

No Espaço-UFF de Ciências, a partir de 1991, entre as primeiras ações extensionistas conjuntas realizadas com a equipe ali alocada (com apoio da Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro, no âmbito do Programa de Atualização de Professores da Rede Estadual - PAPRE, coordenado pelo Fórum de Reitores do Estado do Rio de Janeiro, em também convênio com MEC/CAPES-SENEB; FAPERJ e FINEP) encontram-se cursos de longa duração. Estes foram por mim coordenados, orientados e outras vezes ministrados em diversos programas de educação continuada com propostas de mudança do fazer pedagógico dos docentes de Ensino Fundamental e Médio. Esses cursos envolvendo tópicos fundamentais de geometria elementar e trigonometria visavam à interiorização da UFF na comunidade de professores do Estado do Rio de Janeiro. Versões destes cursos foram

ministradas em Santo Antônio de Pádua, Campos, Cabo Frio, Barra do Pirai e Niterói.

Cabe salientar que as ações extensionistas realizadas nessa época também buscavam democratizar aquelas desenvolvidas nos projetos do Programa CAPES/SPEC/PACDT e, desta forma, para dar consistência à formação continuada dos professores, os cursos eram ministrados com um mínimo de 40 horas/aula, sendo que alguns chegaram a ter 240 e 320 horas. Essas aulas eram geralmente ministradas de sexta-feira a domingo, ou durante as férias escolares, em turnos de 5 a 10 horas de trabalho presencial com os professores e os cursos tinham de 20% a 40% da carga horária em trabalhos individuais. Para tanto, algumas das prefeituras chegaram a subsidiar os docentes com bolsas de estudo.

Como parte da política de divulgação da Educação Matemática e incentivo à formação continuada do professor do ensino básico e buscando uma maior integração entre a UFF e a comunidade, durante o ano de 1991, organizei o *Ciclo de Palestras Mensais sobre Educação Matemática na UFF*, no IMUFF, como projeto de extensão, o qual contou com o apoio da Coordenadoria de Programas de Integração Ensino-Comunidade da PROEX.

Nesta mesma direção, no ano seguinte e também no IMUFF, organizei o primeiro *Encontro de Educação Matemática e Ensino de Ciências da UFF*, com o apoio da equipe do Espaço-UFF de Ciências, de professores da Faculdade de Educação, da direção e de professores do IMUFF. Mais três versões deste mesmo evento foram realizadas anualmente sob minha orientação, as quais, a cada ano, atingiam uma clientela maior, sendo que em 1996, participaram do evento 290 profissionais de 19 municípios do interior do Brasil.

No entanto, em 1997, a comunidade de educadores matemáticos já estava amadurecida para que viesse a se encontrar em um evento próprio e deu-se a realização do primeiro *Encontro Estadual de Educação Matemática do Rio de Janeiro* (EEMAT-RJ), o qual foi organizado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática-Seção RJ, na Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ), e do qual participamos ativamente. (KALEFF, 1997; KALEFF; GARCIA; UZÊDA, 1997; KALEFF; GARCIA; VIEIRA, 1997).

Em 1998, como decorrência das dificuldades financeiras que o sistema educacional passou a sofrer, cujas consequências se refletiram na escassa oferta de auxílio em forma de bolsas de estudos aos alunos dos cursos de

graduação, os quais sempre foram a mola propulsora para a realização de eventos, nos restringimos à organização da *Primeira Jornada de Educação Matemática do Espaço-UFF de Ciências*. Neste evento, buscávamos incentivar os professores e alunos do nosso Curso de Especialização em Matemática para Professores a divulgar alguns dos trabalhos realizados durante o curso. Desta jornada participaram 125 profissionais.

### 12.3 OUTRAS PARCERIAS NA TRAJETÓRIA PELA MELHORIA DA FORMAÇÃO CONTINUADA

No entanto, apesar do apoio da CAPES/SPEC/PADCT, necessitava de mais auxílio financeiro para a realização das ações extensionistas de longa duração. Assim, busquei junto à Fundação MUDES, que nos deu apoio durante mais de dois anos, de 1991 a 1993. O projeto *Aplicação de uma metodologia de ensino específica de tópicos fundamentais de Geometria* foi o primeiro da UFF com apoio dessa fundação, com a concessão de bolsas de estudos a três alunos. Este incentivo permitiu ações que se relacionavam totalmente com as demais que vinha empreendendo, pois foi a interação entre os recursos advindos das variadas fontes que nos permitiria viajar com um grupo de bolsistas para ministrar cursos e a elaborar os materiais didáticos.

No entanto, durante 1996 a 1997, busquei, ainda, outros recursos financeiros em vários programas da CAPES que apoiavam diretamente as Licenciaturas, como o *PROLICEN* e *Melhoria das Licenciaturas Científicas*. Para tanto, foram desenvolvidos diversos projetos objetivando a criação e ampliação dos acervos pedagógico e bibliográfico do LEG e a integração das ações ali desenvolvidas às atividades do Curso de Licenciatura em Matemática.

Como já mencionamos, os resultados desses projetos foram surgindo na forma de produtos como jogos e aparelhos modeladores de situações matemáticas, como também diversos relatos de experiência apresentados em congressos, os relatórios anuais enviados às entidades financiadoras e um relato sucinto de nossas ações à PROAC (KALEFF, 1995).



## 13 | Deixando Pegadas pelo Caminho

Além das ações de extensão já relatadas, deixei outras pegadas ao longo de todo o caminho percorrido durante a década de 1990. É o que apresento a seguir.

### 13.1 A COLEÇÃO CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Em 1996, buscando divulgar os resultados dos projetos de pesquisa e de extensão voltados para o ensino básico realizados na UFF, por nossa iniciativa, o GGM propôs à Editora da UFF (EdUFF) a criação de uma série de livros intitulada *Conversando com o Professor*.

Esta série tem por propósito proporcionar ao professor em exercício, bem como ao licenciando, uma leitura complementar à literatura habitualmente indicada, advinda da prática pedagógica dos autores em cursos de formação de professores.

As atividades relatadas nesta Série permitem ao professor levar seus alunos a vivenciarem procedimentos didáticos que privilegiam o desenvolvimento de habilidades específicas de Matemática e de Ciências, ao mesmo tempo em que também oferecem a oportunidade de o profissional revisar e vivenciar, de maneira dinâmica e objetiva, conteúdos fundamentais para sua formação e pouco explorados nos programas escolares. Por meio de jogos, redes gráficas, espelhos e outros materiais concretos, buscamos prover o professor de um referencial que o permite construir e empregar os materiais didáticos com segurança e autonomia.

Desde o início da década de 1990, vínhamos observando a publicação de diversos livros-texto escolares, os quais apresentavam atividades envolvendo os mais diferentes materiais manipulativos. Apesar desta louvável iniciativa por parte dos autores, constatava dois aspectos significativos no comportamento dos docentes do ensino fundamental que participavam dos projetos de extensão desenvolvidos na UFF. Por um lado, observava que a maioria desses docentes não se sentia à vontade para aplicar muitos destes textos por não se sentirem familiarizados com os procedimentos didáticos que envolviam materiais manipulativos. Por outro lado, alguns profissionais declaravam não possuir o conhecimento necessário para reproduzir tais materiais por meio de recursos simples e de matéria-prima de baixo custo.

O surgimento de uma série voltada para a divulgação das ações desenvolvidas nos projetos realizados na UFF, portanto, foi uma consequência natural de um processo em curso, apesar das dificuldades financeiras enfrentadas pelas universidades públicas. Além disso, a publicação dos dois primeiros volumes desta série, os quais enfocam o ensino da Geometria, deu ensejo a outras publicações, destinadas ao ensino de Ciências e Biologia.

Como percebia que o professor em exercício tinha e, ainda mesmo nos dias de hoje, tem dificuldades em como estabelecer um diálogo mais livre com o aluno que o leve a conjecturar sobre situações matemáticas, a lidar com segurança na busca de uma solução para um problema proposto ou até mesmo se sinta motivado para o estudo, nos volumes da coleção *Conversando com o Professor*, optei por redigir atividades para o aluno, por meio da apresentação explícita de exemplos de perguntas em possíveis diálogos entre professor e o estudante. Com tais exemplos de “conversas entre aluno e professor” sugeríamos que o docente adaptasse as conjecturas e questionamentos para a situação específica de sua sala de aula.

Na verdade, é importante ser salientado que, bem antes da UFF iniciar seus cursos à distância, os volumes dessa coleção, já apresentavam uma estrutura da constituição dos capítulos que permite ao professor-leitor em formação se preparar de maneira autônoma para dialogar com seus alunos.

O primeiro volume desta série, publicado em 1996 com auxílio advindo do CAPES/SPEC/PADCT, *Quebra-cabeças geométricos e formas planas*, (KALEFF, GARCIA, REI, 1996) enfoca parte do trabalho realizado sob nossa orientação no LEG e no Espaço-UFF de Ciências, tendo como colaborado-

ras duas ex-alunas e bolsistas multiplicadoras das ações de nossos projetos, Dulce Monteiro Rei e Simone dos Santos Garcia. Esta publicação já se encontra na segunda impressão da terceira edição (2005). As edições sofreram acréscimos com a apresentação de mais algumas atividades para o aluno e da descrição de três aparelhos manipulativos artesanais e de baixo custo para a modelagem e o ensino do Teorema de Pitágoras.

O segundo volume da série, *Vendo e entendendo poliedros* (KALEFF, 1998), cujo lançamento se deu durante a 15ª Bienal de São Paulo em 1998, é somente de minha autoria e foi totalmente baseado nas dificuldades apresentadas pelos professores percebidas por meio dos testes aplicados entre 1991 e 1995. Nesse volume, são enfocadas atividades que visam a proporcionar aos professores, uma forma de levar seus alunos a vivenciar procedimentos didáticos que privilegiem o desenvolvimento da visualização geométrica e também oferecem a oportunidade de revisitar e vivenciar de maneira dinâmica e objetiva, conteúdos matemáticos pouco explorados na formação do professor. Objetivei com essa experiência, ajudar o professor a tomar consciência de suas próprias dificuldades, alertando-o para os possíveis obstáculos cognitivos que o seu aluno possa vir a apresentar. Deste modo, são apresentadas sequências de atividades que tratam de aspectos relativos aos poliedros de faces retangulares ou quadradas, aos poliedros regulares de Platão e aos poliedros duais: visualização e a habilidade para visualizar; construção de modelos tridimensionais; representações gráficas; interpretação de representações gráficas em perspectiva; volumes e seções planas. Esse livro já teve duas edições (1998 e 2003), sendo que, na segunda, apresentei alterações de alguns desenhos e de várias sequências de atividades.

Cabe citar que os dois volumes da série foram ilustrados por mim e por bolsistas do LEG, com desenhos realizados no primeiro software de geometria dinâmica ao qual tivemos acesso em 1994: a primeira versão do programa *The Geometer's Sketchpad* (KEY CURRICULUM PRESS, 1993). Para esse exercício de adaptação aos recursos da informática, foi propositalmente escolhido um programa que não dispunha de recursos especiais para a representação de objetos tridimensionais, pois buscávamos vivenciar uma experiência semelhante àquela de se desenhar figuras espaciais sem maiores artifícios gráficos.

Cumpre salientar que os modelos de sólidos apresentados no segundo volume da série deram origem a vários produtos criados no âmbito dos projetos de extensão, entre eles, jogos tridimensionais e três aparelhos do tipo móbil construídos com linha e canudos plásticos (com 2 a 3 metros de altura), que representavam a desconstrução de um tetraedro regular em 27 partes equivalentes. Essas partições do sólido permitem o aluno ultrapassar obstáculos cognitivos ligados ao entendimento do cálculo do volume de um sólido geométrico.

O conjunto de móveis, quando iluminado por um feixe de luz, permite ver as suas sombras sobre uma tela plana e a percepção visual de um verdadeiro jogo entre as representações planas (sombras) e espaciais (canudos) dos poliedros. Os móveis e seus quebra-cabeças são continuamente expostos nas exposições do Museu Interativo e se tornaram verdadeiros chamarizes motivadores do interesse dos alunos da escola básica para as aulas de Matemática. Como relatarei mais a seguir, esses primeiros móveis gigantes foram sendo aperfeiçoados ao longo dos anos e deram origem a outros miniaturizados (criados com canutilhos de vidro e linha), sempre interligados às obras de Dürer e aos desenhos em perspectiva.

## **13.2 PEGADAS DEIXADAS NO CURSO PRESENCIAL DE ESPECIALIZAÇÃO PARA PROFESSORES**

Durante os anos iniciais da década de 1990, os resultados da militância nos projetos de extensão, principalmente no que se tratava dos cursos de treinamento de curta duração, me convenciam da importância de cada vez mais incentivar os professores a ingressarem em cursos de especialização de longa duração, que os permitissem completar as lacunas de formação e os levassem a refletir melhor sobre sua ação profissional. Assim, já em meados dessa década, a minha atenção estava voltada para a necessidade de divulgarmos mais e de trazeremos os docentes para o curso de especialização *lato sensu* presencial que vinha sendo realizado na UFF. Assim, essa atenção foi se tornando em intenção e se dinamizando, à medida que o Consórcio Cederj (Consórcio de Ensino à Distância do Estado do Rio de Janeiro, formado pela UFRJ, UFF, UENF, UERJ e UNIRIO, iniciado na UFF no

final da década de 1990) ia se afirmando, pois, já no começo dos anos 2000, levar uma especialização para professores do interior do Brasil, em um curso à distância começava a fazer parte do meu horizonte acadêmico.

Antes de passar a narrar sobre como vim a atuar nessa nova fase de interiorização dos cursos de especialização da UFF, cabem algumas observações sobre a minha atuação nos cursos presenciais: de especialização lato sensu e da licenciatura em Niterói.

Tendo participado do corpo docente do *Curso de Especialização em Matemática*, desde 1988, quando, por nossa sugestão, foi incorporada a disciplina *Geometria* à sua grade curricular, fui nomeada, em maio de 1995, sua coordenadora. Cabe lembrar que até o início da minha participação, o então corpo docente desse curso só era composto por professores do GAN.

A partir de 1994, o Colegiado do Curso de Especialização passou a considerar a possibilidade de empreender uma reforma estrutural de sua grade curricular, a fim de adaptá-lo à realidade educacional e poder atingir uma clientela mais específica de professores de Matemática; pois foi observado que entre 1988 e 1993, a maioria dos alunos não era de licenciados em Matemática e a média de inscritos para a realização do curso era de vinte e cinco alunos dos quais, cerca de 30% o concluíam em um ano e outros 25% em dois anos.

Em maio de 1995, tendo completado os estudos para a proposta de reformulação, e sob minha coordenação, o Colegiado do Curso de Especialização em Matemática propôs uma reformulação radical do mesmo, a qual foi aprovada pelo Conselho Universitário (Resolução 16/96), transformando o curso em *Curso de Especialização em Matemática para Professores de 1º e 2º graus*.

Todavia, em 1998, ainda sob minha coordenação, o colegiado do Curso apresentou outra proposta, com uma série de alterações e uma reformulação para melhor adequá-lo à Lei de Diretrizes e Bases e aos *Parâmetros Curriculares Nacionais*, inclusive quanto à sua denominação para *Curso de Especialização em Matemática para Professores de Ensino Fundamental e Médio*. Atualmente, este curso denomina-se *Curso de Especialização em Ensino de Matemática*.

Cabe ainda mencionar que, enquanto coordenadora desse curso de especialização, tivemos aprovados na CAPES três projetos de apoio e fomen-

to financeiro ao Curso (1996 - 1998), o que nos permitiu a realização de seminários e Semanas de Estudos com professores convidados especiais, como Nilza Bertoni da UNB e Sérgio Lorenzato da UNICAMP. Durante os anos de duração desses projetos da CAPES, orientei 15 alunos bolsistas do Curso de Especialização (nessa época, a orientação acadêmica se restringia ao acompanhamento do desenvolvimento acadêmico do bolsista durante o curso e não havia, na grade curricular, a exigência de monografia de final de curso).

A parceria com a Professora Bertoni sempre foi muito frutífera, pois, em 1996, nos convidou para escrever um artigo para o periódico *Educação Matemática em Revista* publicado pela SBEM, o qual seria divulgado em um numero especial sobre o *Ensino da Matemática para o 1º Grau*. Para tanto, com base na nossa vivência acadêmica, escrevi sobre a importância do retorno do ensino da Geometria à escola elementar e incentivei os professores a levarem os seus alunos a retomar o gosto pelos conhecimentos geométricos por meio da manipulação de materiais concretos, ou seja, a literalmente tomarem o ensino da Geometria, nas mãos... (KALEFF, 1994).

Por outro lado, o professor Lorenzato, desde 1994, esteve sempre presente como outro balizador das nossas ações no laboratório. Assim, em 2006, como apresentarei mais adiante, foi muito natural escrever um capítulo sobre nossas realizações no LEG, em um livro organizado por ele sobre o papel do laboratório de educação matemática na formação do professor (KALEFF, 2006 a). Esse livro teve tão boa aceitação nacional que, em 2010, sua terceira edição foi incluída no projeto *Biblioteca Pública Escolar do MEC/FNDE*, sendo distribuída gratuitamente a vinte mil bibliotecas escolares de todo território nacional (LORENZATO, 2010).

Cabe lembrar que a professora Bertoni ainda nos levou a criar alguns aparelhos manipulativos para o acervo do LEG. Como, por exemplo, ao apresentar um ábaco romano em uma das Semanas de Estudos (BERTONI, 2005). Em 1999, com base no ábaco apresentado pela professora, iniciamos a criação de uma coleção de ábacos artesanais (romano, chinês, japonês e árabe). Esses foram desenvolvidos com materiais de baixo custo (papelão, linha de pesca e contas plásticas) e passaram a ser o primeiro conjunto de recursos etnomatemáticos elaborados como módulos educacionais no LEG. O desenvolvimento desses ábacos seria retomado por diversas vezes

durante os últimos 15 anos, pois com a evolução dos recursos computacionais, em 2006, foram transformados em aplicativos interativos por meio do software livre *Régua e Compasso* (GROTHMANN, 2006). Mais recentemente, a partir de 2013, foram revistos e reformulados por meio do software *Geogebra* (HOHENWARTER, 2001). Nessa última revisão, foi desenvolvido um ábaco binário, sendo que este e todos os demais aparelhos concretos já foram adaptados para o ensino dos alunos com deficiência visual (KALEFF, CORDEIRO; OLIVEIRA, 2014).

Cabe aqui adiantar, e como relatarei mais a seguir, devido a essa parceria de amizade com a professora Bertoni, em 2010, fui convidada para ministrar uma palestra em evento realizado na UNB, na qual relatei sobre a influência que essa grande educadora matemática teve sobre o desenvolvimento do nosso trabalho no LEG.

Ainda voltando ao ano de 1997, com o apoio da PROEX, foi desenvolvido sob minha coordenação, por alunos do Curso da Especialização e licenciandos, o projeto *Resgatando a Matemática*, o qual além de estar voltado para a formação continuada do professor de Matemática do Ensino Fundamental, também se preocupava com a recuperação escolar dos alunos dos primeiros anos desse nível de ensino.

### **13.3 PEGADAS DEIXADAS NO CURSO DE LICENCIATURA E NO GGM: AS DISCIPLINAS DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E A COMISSÃO GESTORA**

Por outro lado, como já mencionado anteriormente, durante o período de 1994 a 1997, participei intensamente da Comissão Especial de Professores de Apoio à Licenciatura -Matemática (CPAL) e da elaboração de uma proposta curricular para os cursos de Matemática de Niterói, cujo processo culminou com a aprovação e implantação, a partir de agosto de 1997, de uma grade curricular que visava ao equilíbrio entre a formação matemática necessária ao futuro professor e uma formação pedagógica consoante com as pesquisas e movimentos advindos do desenvolvimento da Educação Matemática na época. Para tanto, foram acrescentadas ao currículo da Licenciatura, além das disciplinas obrigatórias relativas à Faculdade de

Educação, uma disciplina de História da Matemática e ainda três com conteúdos de Educação Matemática: *Educação Matemática-Análise e Álgebra*; *Educação Matemática-Geometria* e *Laboratório de Educação Matemática*.

Finalmente, a expressão *Educação Matemática* vinha oficialmente fazer parte da denominação de algumas disciplinas da Licenciatura em Matemática da UFF!

Por sua vez, cabe lembrar que, desde 1997, participei ativamente da Comissão de Avaliação do IMUFF, bem como no ano seguinte, devido a esta experiência, fui indicada para Presidente da *Comissão de Estabelecimento da Política Departamental do GGM*. A proposta elaborada pela comissão como *Projeto Acadêmico* do GGM foi aprovada em dezembro do mesmo ano, a qual instituiu no departamento uma *Comissão Gestora* cuja função principal é dar apoio e auxílio à chefia departamental em suas resoluções. A partir daí, a Política Departamental do GGM passou a ser determinada pela Comissão Gestora, cujos atos são referendados em reunião plenária com os professores. De 1999 até 2008, passei a ser membro dessa comissão indicado pela chefia.

## 14 | Voltando ao Caminho da Pesquisa sobre o Ensino de Outras Geometrias

A despeito do envolvimento com todas as atividades relatadas nos anos de 1980 até o final dos anos 90, o questionamento relativo aos aspectos cognitivos do desenvolvimento do conhecimento geométrico em direção a outras geometrias além da euclidiana, sempre se encontrava como pano de fundo de minhas preocupações, pois apesar do grande número de pesquisas internacionais relativas ao Modelo de van Hiele, um trabalho pouco divulgado de van Hiele de 1987, e somente citado em Grows, vinha me preocupando (GROWS, 1992). No referido trabalho, van Hiele apontava para uma reestruturação dos níveis (em número de três, no lugar de cinco): nível visual (abrangendo o antigo nível da visualização), nível analítico (o mesmo anteriormente chamado da análise) e nível teórico (abrangendo uma fusão dos antigos níveis da organização informal, formal e do rigor). Esta reestruturação do Modelo, no entanto, segundo Grows, carecia de refinamento, pois podia não ser suficiente para caracterizar o desenvolvimento do pensamento, especialmente considerando algumas pesquisas americanas, as quais, apesar de sustentarem a validade dos níveis teorizados, verificaram que existem estudantes que progredem em direção ao nível da organização formal, sem apresentarem nenhum sinal de organização formal preparatória ao pensamento axiomático (que, supostamente, no Modelo original de van Hiele, apareceria nos níveis mais altos).

O que vinha observando, em nossa própria prática, é que, apesar de levarmos os alunos-professores a vivenciarem atividades nos três níveis iniciais (considerado o modelo original de van Hiele) do desenvolvimento de um conceito geométrico e, aparentemente, estes docentes apresentarem uma organização informal do conceito em questão, o hipotético progresso em direção à ordenação formal, em muitos casos, não se verificava.

Por outro lado, observava que os alunos-professores participantes das disciplinas do Curso de Especialização, também apresentavam dificuldades para o estabelecimento de uma rede de significados entre os conceitos geométricos envolvidos, ainda que trabalhassem com módulos instrucionais envolvendo geometrias de incidência euclidianas e não-euclidianas baseados no Modelo e apresentados em nossas notas de aulas apostiladas sobre os sistemas axiomáticos dedutivos: uma introdução ao estudo das geometrias finitas e das geometrias não-euclidianas (KALEFF, 1995 e versão revisada, 2006). Consequentemente, os alunos-professores também apresentavam dificuldades para o estabelecimento de estruturas gerais formalizadas que representavam esses conceitos.

Como decorrência, comecei a ter dúvidas quanto à validade do Modelo de van Hiele para os níveis superiores (ordenação formal e rigor), o que a nossa prática vinha corroborar com o que era observado por outros pesquisadores e citado por Grows (1992).

Assim, um questionamento cada vez mais refinado ia se formando e começou a se impor, o qual indicou outra direção e um novo sentido para minhas pesquisas. Percebi que não mais podia me restringir ao âmbito da Educação Matemática, mas necessitava de um conjunto mais amplo de recursos teóricos, o qual iria buscar nas áreas da Educação e da Psicologia. Daí a resolução de fazer o doutorado na Faculdade de Educação da UFF, seguindo o campo de confluência *Ciências, Sociedade e Educação*, sendo orientada por uma professora com formação em Psicologia e no Ensino de Ciências.

Com tal decisão, não precisaria pedir afastamento das aulas que ministrava e continuaria com as minhas atividades acadêmicas como já vinha desenvolvendo.

## 14.1 DOUTORADO: CONSEQÜÊNCIAS PARA A FORMAÇÃO DOS PROFESSORES

Em janeiro de 1999, iniciei o doutorado sob a orientação da professora Dominique Colinvaux, no qual, em uma primeira fase da pesquisa, durante dois anos, dei ênfase ao estudo dos modelos mentais do ponto de vista da Psicologia, segundo Johnson-Laird e inúmeros outros autores dessa área (JOHNSON-LAIRD, 1996). No entanto, obtive poucas respostas, pois o estudo não visava a um enfoque específico para conteúdos matemáticos.

Aos poucos, fui revendo minhas posições e enveredando novamente para aqueles autores mais voltados para a Educação Matemática. Assim, tomei como linha mestra os trabalhos sobre representações semióticas dos objetos matemáticos e sobre a compreensão integrativa do que seria um objeto matemático, relacionada aos registros semióticos de representação, conforme entendidos por Raymond Duval (1995).

A defesa da tese intitulada *Da Rigidez do Olhar Euclidiano às (Im)Possibilidades de (Trans)Formação dos Conhecimentos Geométricos do Professor de Matemática* (KALEFF, 2004), se deu em maio de 2004, sendo que o estudo, resumidamente, tratou de aspectos específicos sobre a aquisição de conceitos geométricos no âmbito da formação de professores de Matemática no momento da transição entre os conhecimentos euclidianos e os não-euclidianos. Tomando o conhecimento de Geometria Euclidiana do professor como objeto passível de investigação, buscamos identificar categorias de obstáculos cognitivos, que comparecem no processo de resolução de problemas introdutórios aos conhecimentos não-euclidianos. Os fatos aqui mencionados ficam ressaltados nos artigos publicados em periódicos e congressos sobre a tese, como será enfatizado ainda no presente texto. No entanto, com vistas à complementação desta narrativa, a seguir, apresento um resumo do que realizei.

Para imprimir um caráter qualitativo à pesquisa, realizamos entrevistas individuais com seis professores de Matemática, alunos do Curso de Especialização em Matemática para Professores de Ensino Fundamental e Médio, e dois licenciandos da UFF. A corroboração das categorias dos objetos da pesquisa encontradas foi conduzida por meio de um questionário aplicado a 45 professores do mesmo curso.

Partindo de uma análise cognitiva da conversão entre registros semióticos de representação, verificamos a existência de 14 (quatorze) categorias de prováveis obstáculos cognitivos, os quais estão relacionados a 7 (sete) tipos de registros semióticos que, potencialmente, impedem, ou inviabilizam, a passagem do pensamento euclidiano para o não-euclidiano.

Os 5 (cinco) tipos de prováveis obstáculos cognitivos de características euclidianas encontrados apresentaram forte presença na pesquisa e, portanto, puderam ser considerados como balizadores do desempenho do indivíduo frente às atividades introdutórias às não-euclidianas. Por outro lado, pelo que observei, as imagens mentais prototípicas relacionadas aos elementos euclidianos assumem caráter incontrolável ao sujeito, intervindo de forma significativa nos procedimentos de resolução do problema mapeado. A ampla incidência de algumas destas modalidades de imagens incontroláveis, como a decorrente da densidade dos pontos da reta, presente em todos os entrevistados, sugere a importância que elas possuem.

Os resultados também indicaram que a presença, nos enunciados não-euclidianos, de termos homônimos a euclidianos, bem como dos traçados relacionados a esses, interferem nos procedimentos de resolução de problemas. Assim, a interferência desses termos e de seus traçados típicos, em atividades introdutórias não-euclidianas, pode vir a acarretar sérias consequências tanto em relação ao entendimento do significado dos conceitos não-euclidianos, quanto a procedimentos de resolução de problemas e, possivelmente, até em demonstrações.

Por outro lado, minha experiência acumulada com os estudos sobre Lógica Matemática realizados durante o Mestrado, permitiu perceber que a utilização (em sala de aula) do ferramental teórico relacionado à Lógica e à Teoria dos Conjuntos se mostrou como um grande obstáculo ao entendimento dos enunciados, principalmente no que tange às afirmações expressas na forma de regras e convenções. Os resultados apontam para a necessidade de, nos cursos de formação, se dar maior atenção à linguagem habitualmente utilizada nos livros didáticos matemáticos. Neles, é utilizada uma linguagem mista composta, tanto de termos da língua natural quanto de expressões próprias das linguagens simbólicas adotadas na Matemática. A experiência advinda de estudos semelhantes, principalmente realizados por Duval, aponta para a necessidade de se desenvolver ações

específicas para a transposição de tais obstáculos, pois somente a exposição dos enunciados na forma tradicional não se mostra suficiente para a compreensão das expressões apresentadas.

Os fatos mostraram que, mesmo sujeitos com ampla experiência profissional e escolaridade avançada (pois o universo que pesquisei era composto, em sua maioria, por adultos entre 38 e 63 anos) não se movem com naturalidade entre diferentes registros semióticos, deixando de realizar conversões entre aqueles de características diversas, principalmente entre os registros discursivos e os gráficos. Conseqüentemente, estes profissionais se apresentam pouco preparados para a implementação de práticas pedagógicas inovadoras e relacionadas a conversões de registros, as quais possibilitam a desejada compreensão integrativa dos conceitos matemáticos.

## **14.2 RESULTADOS DO DOUTORADO: METAS ALCANÇADAS DEPOIS DE QUASE 30 ANOS DE BUSCA E CONSEQUÊNCIAS PARA A FORMAÇÃO DO PROFESSOR**

Resumidamente, em seu conjunto, os resultados da minha pesquisa indicaram que a aquisição de novos conhecimentos geométricos não-euclidianos se apresenta como um significativo desafio aos meios de formação de professores de Matemática. Desafio este inserido em uma sociedade cada vez mais dependente de um aparato tecnológico, no qual as formas visuais virtuais advindas de uma ampla gama de registros semióticos são determinantes. Assim, na formação dos professores, é preciso enfrentar os possíveis obstáculos que possam impedir adultos, responsáveis pelo ensino e pelo desenvolvimento da aprendizagem de jovens e crianças, a vencerem suas limitações cognitivas frente a esta realidade.

Como consequência, os fatos por mim constatados indicam que para se formar um professor mais capacitado a acessar os novos conhecimentos geométricos e que esteja preparado para ministrá-los na escola básica, há necessidade de se processar uma grande transformação na sua formação. Pois, mesmo no nível da formação continuada, no que concerne ao ensino das Geometrias, além das características matemáticas próprias a seus sa-

beres, é necessário também se considerar os aspectos linguísticos e cognitivos relacionados aos obstáculos à apreensão desses novos conhecimentos geométricos.

Assim, após quase três décadas durante as quais me vi preocupada com as dificuldades encontradas na passagem do ensino para outras Geometrias e de perseverar na busca do entendimento dessas dificuldades, tinha respostas efetivas às minhas dúvidas e ao meu questionamento.

Muitos me perguntam a razão de só ter vindo a fazer o doutorado depois de tantos anos de trabalho nos cursos de Matemática. A resposta é simples: havia muito a ser feito no âmbito da Licenciatura da UFF e como a opção pela área da Educação Matemática sempre fora questionada pelo GGM, pois muitos professores se questionavam se essa seria uma área legítima de pesquisa em um instituto de Matemática, somente em 1998 me senti livre para seguir a minha vocação acadêmica de educadora matemática. Pois, a partir desse ano, já teria condições para a aposentadoria...

## 15 | Pegadas Deixadas Durante o Percurso ao Longo do Doutorado

Gostaria de salientar que, na época do doutorado, não me afastei da sala de aula e das atividades de ensino realizadas na UFF, ministrando aulas, inclusive no curso de pós-graduação lato sensu.

Conforme documentos apresentados, desde minha volta da Alemanha em 1980, nunca deixei de ministrar aulas na Licenciatura, pois sempre acreditei ser prioritário para o meu desenvolvimento como docente a prática constante na sala de aula e a da orientação dos alunos. O resultado dessa opção é que as realizações no âmbito do LEG não esmoreceram durante os cinco anos do doutoramento e nem a produção acadêmica ficou prejudicada. Nesses anos, continuei com as aulas e a coordenar anualmente dois projetos de extensão e um de monitoria, os quais foram bem desenvolvidos, como ilustram as premiações, os artigos publicados e a participação em eventos apresentados a seguir.

Em 1999, fui convidada a participar da elaboração de um livro em edição organizada pelo professor Carlos Moura e editado pela *Sociedade Brasileira* para o Progresso da Ciência (SBPC). O volume, para o qual escrevi dois capítulos, foi lançado com o título *Ciência Hoje na Escola, v. 8 – Matemática: Por quê e para quê?*. Em um dos capítulos, apresento procedimentos para o aluno construir modelos de estruturas das arestas dos cinco sólidos platônicos regulares e no outro, discuto alguns aspectos considerados como tesouros da Geometria, como é o caso da razão áurea (KALEFF; VIEIRA, 1999 a e b).

Durante os anos de 2001 a 2004, desenvolvemos no LEG, juntamente com os bolsistas Diogo Robaina e Rogério Nascimento, dois importantes módulos instrucionais para o ensino interdisciplinar de Geometrias não-Euclidianas. Um deles, baseado na Geometria da Esfera, visa a apresentar atividades para o aluno do Ensino Médio envolvendo a Geografia e aplicações de alguns conceitos geométricos não-euclidianos, euclidianos e da geometria analítica, tendo como pano de fundo o funcionamento do aparelho conhecido como GPS (*Global Positioning System*, em KALEFF; ROBAINA, 2009; KALEFF; ROBAINA; NASCIMENTO, 2007). Para tanto, desenvolvemos produtos especiais para este estudo com base em sucatas plásticas, tais como: régua, compassos e transferidores esféricos, que possibilitam a emulação do material didático americano conhecido como *esfera de Lénárt* (LÉNÁRT, 1996).

Com o monitor Rogério Nascimento, desenvolvemos outro módulo instrucional com vários produtos como malhas concretas e maquetes especiais que deram origem a um artigo sobre a *Geometria do Táxi*. Esta é um modelo de Geometria não-Euclidiana também destinado ao Ensino Médio, o qual é muito interessante, pois essa teoria é importante para a formação do professor, proporcionando-lhe uma poderosa ferramenta para o reconhecimento de semelhanças e diferenças entre elementos dessa nova teoria e os conhecimentos euclidianos. As atividades apresentadas são indicadas para uma ampla gama de aplicações pedagógicas incluindo jogos e desafios algébricos e estão documentadas na revista *Boletim-GEPEM* (KALEFF; NASCIMENTO, 2004).

Desenvolvemos dois módulos instrucionais sobre simetria em relação a uma reta e sólidos de revolução, nos quais apresentamos jogos e produtos. Sobre esses recursos foram publicados mais dois artigos da mesma revista (KALEFF, 1999; KALEFF; TOLEDO; SÁ, 2002).

Um relato sobre os aspectos históricos da formação de professores de Matemática do Ensino Fundamental e do Médio em relação à Educação Matemática na UFF foi apresentado no *Caderno da Licenciatura em Matemática da UFF* (KALEFF, 1999). Este artigo foi completado e posteriormente publicado pelo *Boletim-GEPEM* (KALEFF, 2001) e no Portal do Professor do MEC (<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000011917.pdf>).

Cabe lembrar que, ainda em 2002, durante o doutoramento, participei da *International Conference on Science and Mathematics Education*, promovida pelo Comitê de Capacitação Científica do *International Council for Science*, na Academia Brasileira de Ciências, no Rio de Janeiro. Neste evento, apresentei as minhas preocupações com o ensino das Geometrias em um pôster *The Teaching-Learning Challenge in Geometry: Two Decades of Research at Universidade Federal Fluminense*.

Em 2004, ainda escrevi para o Caderno da Licenciatura em Matemática da UFF artigo sobre a implantação do LEG e das disciplinas de Educação Matemática no currículo da Licenciatura estabelecido em 1997 (KALEFF, 2004).

Nessa mesma época, em 2002, recebi *Menção Honrosa* concedida pela PROAC/UFF pela orientação do trabalho de Monitoria *Problemas geométricos motivadores: uma abordagem pedagógica para o desenvolvimento de relações entre volumes de sólidos*, apresentado na V Semana de Monitoria da UFF, pela aluna Ana Paula Gonçalves.

Ainda em 2002, na minha terra natal, recebi da Prefeitura Municipal de Limeira-SP o Troféu Fumagalli, na área de Ciência e Tecnologia. Esse prêmio é concedido aos limeirenses que se destacam em âmbito nacional e, para tanto, foi levado em conta o meu trabalho na UFF, principalmente com a criação do LEG.

Em 2004, recebi o *1º Prêmio na Área de Educação*, ou seja, o *2º Premio Josué de Castro* como coordenadora do trabalho da bolsista de extensão Simone Andrade Galdino, com a apresentação de produtos em *Atividades para Museu Interativo com vistas à melhoria do ensino e da Aprendizagem da Geometria Escolar*, na Agenda Acadêmico-Científica, na IX Semana de Extensão da UFF. Nessa exposição, apresentamos pela primeira vez a atividade *Modelando Poliedros de mesmo Volume: brincando com Luzes e Sombras*, sob a perspectiva da interdisciplinaridade, a qual permite realizar uma conexão didática entre os desenhos de Dürer, com a utilização dos móveis gigantes (representantes da decomposição do tetraedro regular em 27 partes equivalentes à do seu dual) iluminados por um feixe de luz. Essa modelação dos poliedros foi retomada mais tarde, a partir de 2007, no âmbito do projeto CDME e se transformou em dois experimentos educacionais virtuais.



## 16 | **Novos Rumos para o Trabalho Além dos Muros da UFF e a Criação do MUSEU LEGI no IME**

Nesta narrativa, não posso deixar de mencionar que, ainda em 2004, reuni um grupo de professores do IMUFF com vistas a montarmos um curso de Mestrado em Ensino de Matemática. No entanto, constatamos que não teríamos a mínima condição de realizar tal empreitada, pois a produção acadêmica anual do grupo ficava muito longe daquela exigida pela CAPES, para o corpo docente de um mestrado acadêmico (na época, o único aceito pelos interessados no novo curso). Frente a esta situação, convidamos professores da Faculdade de Educação, do Curso de Biologia, de Física e de Geociências, na maioria integrantes dos projetos alocados no Espaço -UFF de Ciências, para cogitarmos sobre a formação do corpo docente de um Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Após quase um ano de encontros e desencontros, concluímos ser impossível levar a empreitada à frente, devido à incompatibilidade do grupo quanto ao estabelecimento das disciplinas a serem ministradas.

A partir de 2005, novos ventos sopraram no IMUFF (que se tornou em Instituto de Matemática e Estatística - IME) em relação ao ensino à distância com a abertura do *Curso de Especialização lato sensu a Distância em Matemática*, ligado ao Núcleo de Educação Assistida por Meios Interativos (NE-AMI-UFF).

Ainda nesse ano, recebi o convite para fazer parte do corpo docente do novo curso, no qual atuo desde então, assumindo a coordenação da

disciplina *Tópicos em Ensino de Geometria*. Assim, uma nova preparação profissional foi necessária para a adaptação às mídias ligadas à Educação a Distância. Isso nos levou, em 2007, a cursar o Curso de Especialização do Programa Interinstitucional em EAD para o Sistema UAB ministrado pela Universidade Federal de Minas Gerais.

Com essa nova preparação, escrevi 10 textos na forma de *Notas de Aulas* sobre temas que envolveram a nossa prática no LEG e que embasaram todas as ações da disciplina na plataforma virtual do NEAMI (KALEFF, 2006 b).

No entanto, nessa mesma época, o Coordenador da UAB em Niterói, professor Celso Costa, traria mais um desafio, pois me incentivou a uma nova iniciativa: a criação de um museu itinerante, com objetivo de levar o Museu Interativo de Matemática do LEG para além dos limites de Niterói. Foi daí que surgiu o LEGI, o *Museu Interativo Itinerante de Educação Matemática do LEG*, e dei início, no ano seguinte, aos projetos anuais *Criando o LEGI*, também vinculados à PROEX. Estes projetos, na realidade, davam continuidade àqueles que já realizava no Espaço-UFF de Ciências desde 1991, sobre a criação de um museu para o ensino de Matemática e Ciências.

Nos novos projetos, busquei melhorar e ampliar as condições do museu interativo para a itinerância, visando a abranger e incluir recursos advindos da informática, e não somente os limitar às Geometrias, mas voltados para a Matemática como um todo.

Frente a mais esse desafio, trouxemos o acervo didático do núcleo de Geometria do Museu Interativo de Matemática e Ciências, que se encontrava alocado no espaço físico do Espaço-UFF de Ciências, para integrar o acervo do LEG no IME, no campus do Valonguinho. Foi dessa forma que, a salinha do LEG, a qual já funcionava como sala de aula para algumas disciplinas e guardava todo o material dos diversos projetos sob minha coordenação, ficou ainda mais repleta. Os materiais, literalmente, começaram a subir empilhados pelas paredes...

Cabe acrescentar que, desde então, os projetos de extensão realizados no IME sob minha coordenação, foram ampliados e deles participam professores do GGM, GAN e GMA, simpatizantes da Educação Matemática.

A partir de então, iniciamos a adaptação do acervo existente do museu para a itinerância, a qual é um grande desafio às equipes dos projetos sob minha coordenação, pois temos cerca de setenta recursos, entre aparelhos,

jogos e outros recursos manipulativos. Além disso, essa adaptação exige que tudo seja, por um lado, leve, portátil e adequado ao transporte e, por outro, muito robusto e resistente à manipulação. Essa dicotomia entre portabilidade e robustez manipulativa exige uma grande criatividade da equipe e uma busca constante por matéria prima mais adequada à construção e confecção das miniaturas desses recursos.

Foi nessa época que iniciamos os bolsistas do LEG no uso dos primeiros softwares livres para a modelagem virtual dos jogos educacionais que vínhamos criando no LEG. Em um primeiro momento e no âmbito dos projetos de extensão, lançamos mão de recursos livres da geometria dinâmica, visando ao ensino de vários conteúdos da geometria escolar permeados nesses jogos. Foram utilizados, principalmente, os programas Régua e Compasso - *C.a.R* e *Geogebra*. Esses são excelentes ambientes para os iniciantes na computação dinâmica, pois permitem a construção de pontos, segmentos, retas, planos, polígonos, curvas e muito mais. A sua maior vantagem é terem sido traduzidos para o português e divulgados pelo colega Humberto Bortolossi, professor do GMA e, então, participante dos projetos do LEG.



## 17 | Um Novo Curso de Especialização: a Caminhada na Universidade Aberta do Brasil

Em 2008, o curso de especialização do NEAMI foi totalmente reformulado e tomou um novo impulso no âmbito da Universidade Aberta do Brasil (UAB), se transformando em Curso de Especialização lato sensu *Novas Tecnologias no Ensino de Matemática* (NTEM) do Laboratório de Novas Tecnologias do Ensino da Matemática (LANTE). Neste, a disciplina *Tópicos em Ensino de Geometria* (TEG) também está sob minha coordenação. Além dessa coordenação, entre 2010 e 2011, dividi com o professor Carlos E. M. Motta (GMA) a coordenação da disciplina *Tópicos em Educação Matemática*.

### 17.1 UM LIVRO PARA O ENSINO A DISTÂNCIA

Cabe lembrar que, entre 2006 e 2007, o tão conhecido livro de Hofstadter (sobre Gödel, Escher e Bach) voltou a me instigar, principalmente no que tratava das figuras de *ilusão de ótica* de Escher. Busquei entrelaçar as considerações do autor com o que observara no doutorado sobre os diferentes registros semióticos gráficos no ensino das Geometrias, relacionando tudo isso ao uso didático dos desenhos de ilusão de ótica para o desenvolvimento da principal habilidade necessária para o estudo da geometria escolar: a habilidade da visualização (KALEFF, 2007).

Ainda em 2008, envolvendo o tema da ilusão de ótica, o ensino das Geometrias e técnicas laboratoriais, bem como aproveitando toda a vivência adquirida no doutorado e nos anos de caminhada com o LEG e NEAMI, publiquei um livro texto para ser utilizado na disciplina TEG no curso a distância: *Tópicos em Ensino de Geometria: A Sala de Aula Frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria*, que foi publicado pelo Consórcio Cederj (KALEFF, 2008).

Esse livro reúne resultados das experiências laboratoriais a temas da história da Matemática, apresentando ao professor como relacionar, na sala de aula, os recursos (de baixo custo) de um laboratório de ensino com a história das Geometrias (Euclidiana e não-Euclidianas), ou seja, são apresentadas formas do professor colocar ideias em práticas para a sala de aula de Geometria, adaptadas às novas tecnologias, mas com diálogos para a sala de aula, semelhantes àqueles apresentados na antiga coleção *Conversando com o Professor* e que até os dias de hoje são úteis tanto para o docente quanto para o aluno. Cumpre salientar que esse volume tem sido aplicado anualmente a cerca de 200 a 400 alunos do NTEM.

A importância desse volume para a formação continuada do professor é grande, pois algumas secretarias estaduais já propõem a introdução de outras Geometrias no Ensino Básico.

Por outro lado, se observarmos os dados advindos da turma da TEG de 2013 em que o livro foi utilizado, vemos que 57% dos participantes da disciplina afirmaram ter vindo conhecer as Geometrias não-euclidianas no curso NTEM, enquanto somente 33% afirmaram tê-las conhecido em seu curso de graduação e 17% ainda afirmam ter conhecido a própria Geometria Euclidiana somente no NTEM.

Embora os resultados apresentados sejam bem preocupantes quanto à qualidade da formação do professor brasileiro para o ensino das Geometrias, há cerca de uma década a situação era ainda pior, como mostrou a nossa pesquisa de doutorado. Nela percebemos que cerca de 45% dos professores apresentaram desconhecimento de aspectos elementares da Geometria Euclidiana. Naquela época, 7% dos professores afirmavam não saber o que é o plano euclidiano, cerca de 18% admitiam desconhecer os axiomas relativos a este plano, enquanto 20% afirmavam ignorar o que seja o Quinto Axioma de Euclides (KALEFF, 2007).

## 17.2 PREPARAÇÃO DE TUTORES PARA O ENSINO A DISTÂNCIA

Cabe aqui mencionar como as ações realizadas por ex-bolsistas e monitores com atuação no LEG vieram a influenciar o curso NTEM.

Em 2009, ministramos um curso de extensão com 90 horas de duração, a 22 ex-bolsistas dos nossos projetos (agora já mestrandos, mestres e até doutores). Este curso visava a preparar professores-tutores a distância para interagir com o material impresso especialmente desenvolvido para a disciplina TEG, bem como para trabalhar com recursos computacionais que emulam artefatos e materiais didáticos concretos e, ainda, para construir e avaliar um conjunto de materiais concretos (denominado MEU LEG) modeladores de conceitos e relações geométricas. Tais materiais constituem um pequeno laboratório de ensino de geometria para uso individual do professor na escola. Com os cursistas construímos 35 conjuntos MEU LEG, que foram enviados aos polos da UAB nos quais a disciplina TEG tinha aluno inscrito. Cada conjunto é formado por 25 recursos manipulativos diversos de baixo custo.

Dessa forma, os ex-bolsistas foram treinados a atuarem nas disciplinas ligadas à Geometria e à Educação Matemática ministradas pela equipe do LEG no LANTE. Essas nossas ações estão descritas em um artigo apresentado em evento da EAD patrocinado pelo MERCOSUL ocorrido no Chile (KALEFF; DORNAS; ESQUINCALHA; ROBAINA; VENEU, 2009).

De 2010 a 2012, realizamos uma preparação semelhante para tutores a distância, porém de curta duração (30 horas) com novos grupos de 7 a 15 tutores. Até hoje, parte desses se encontram na equipe do LANTE, tendo alguns se destacado e vieram a ocupar a coordenações de monitoria e de outras disciplinas, bem como elaboram recursos e textos didáticos para a UAB.



## 18 | Reflexos do Doutorado: ainda o Ensino das Geometrias e o Modelo de van Hiele

Após o doutorado, publiquei três artigos em revistas especializadas sobre a pesquisa realizada e alguns de seus desdobramentos (KALEFF, 2007a; 2007b; 2006; 2005a; 2005b; 2005c; 2005d). O principal desses artigos foi publicado no periódico *Bolema-UNESP*, considerado a revista de maior qualidade acadêmica no âmbito da Educação Matemática (CAPES: Qualis A1).

Como não poderia deixar de ser, considerando que o doutorado foi realizado na área de Educação, em 2005 e 2006, apresentei comunicações e artigos no principal evento brasileiro realizado anualmente na área de Educação, a saber, no 28º e no 29º Encontro Nacional da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (Anped). (KALEFF, 2006b; 2005c).

Com o auxílio da FAPERJ, levei os resultados da pesquisa a um congresso internacional em Portugal (V CBEM em KALEFF, 2005d) e fomos convidados para apresentá-los na Argentina (IX SEM-EDUMAT, em KALEFF, 2007b). Neste país, publiquei dois capítulos de um livro da editora Edumat. Em um deles, relatei sobre a nossa atuação no LEG e teci reflexões sobre como percebo o caminho cognitivo percorrido pelo aluno a partir da manipulação de materiais concretos até a formação da definição abstrata, no ensino da Geometria (KALEFF, 2007a). No outro capítulo, escrito em conjunto com o Professor Jorge Sagula da Universidade de Lujan (Chivilcoy-Argentina), versamos sobre resultados da minha tese aplicados à Educação Matemática.

ca, em uma conjunção entre cognição e linguística à luz da Educação Matemática (KALEFF; SAGULA, 2007).

Como a inserção de temas relacionados à introdução de outras Geometrias no Ensino Básico tem sido objeto de discussão levantada pelas secretarias de educação de alguns estados brasileiros (São Paulo e Paraná, por exemplo), fui convidada para dar palestras sobre o tema da pesquisa na PUC-SP e na PUC-Rio, UERJ e UFRJ, bem como no X Encontro Nacional de Educação Matemática, realizado em 2010, na PUC-Ba, em Salvador. Nesse evento, apresentei a palestra: *Geometrias Não-Euclidianas no Ensino Básico: Utopia ou Possibilidade?* (KALEFF, 2010).

Dando continuidade ao tema do doutorado, orientei monografias como trabalho final de curso de dois alunos dos Cursos de Especialização lato senso da UFF, presencial e NTEM, que versaram sobre a ocorrência de temas não-euclidianos nos principais livros indicados pelo Plano Nacional do Livro Didático em 2006 e 2008. (KALEFF; FRANCA, 2006; KALEFF; MORETH, 2009). Ainda em 2009, orientei mais 3 monografias do NTEM envolvendo o tema do livro didático, o ensino da Geometria e van Hiele. Em 2012, orientei oito monografias de final de curso na especialização NTEM, cujos temas envolveram novas iniciativas relacionadas a recursos computacionais e virtuais, como relato a seguir.

## 19 | **Novos Projetos: Recursos Virtuais; Iniciação à Docência e Itinerância**

Cabe ressaltar que a ida a Portugal em 2005, trouxe benefícios palpáveis para o nosso museu interativo LEGI, pois, na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, conheci um conjunto de aparelhos manipulativos construídos em mogno, fios e latão que permitem a emulação de modelos de superfícies regradas e de alguns sólidos de revolução (diversos tipos de cones, cilindros, hiperboloides, paraboloides, etc.). No LEGI, inicialmente, construímos dois protótipos desses aparelhos portugueses com sucata de madeira, fios e pequenas peças de chumbo usadas em pescaria. Em uma segunda etapa, obtivemos quatro protótipos menores e muito leves fazendo uso de canudos de plástico rígido, fios e as mesmas peças de chumbo.

Observamos que alguns desses protótipos podem também ser utilizados para levar o aluno a observar o surgimento de curvas cônicas por meio da projeção de um feixe de luz sobre os cones de fios. Para tanto, depois de muitas experiências realizadas com diversas fontes de luz, utilizamos uma lanterna que emite um feixe linear de raio laser (portanto, não pontual) sobre os modelos de cones e cilindros construídos com fios de linha. Esse material didático também foi a base de três experimentos educacionais criados em ambiente virtual no âmbito do projeto que relato a seguir (KALEFF, 2011a, b, c).

Ainda em 2007, o envolvimento com a inovação dos recursos didáticos produzidos no LEG se tornou maior, pois passei a Coordenar a seção de Experimentos Educacionais do Projeto *Conteúdos Digitais para o Ensino e*

*Aprendizagem da Matemática do Ensino Médio (CDME). Projeto Condigital MEC – MCT/CAPES do Departamento de Matemática Aplicada, o que o fiz até o final do projeto, em 2010. Esse projeto permitiu que grande parte dos aparelhos e jogos manipulativos concretos criados no LEG e já virtualizados com recursos da geometria dinâmica, fossem transformados em jogos virtuais e experimentos aplicativos interativos organizados na forma de experimentos educacionais em uma intensa produção de recursos multimídia. Foram buscados meios da computação gráfica mais adequados (à época) à dinâmica virtual, como *Adobe Flash e Java*.*

Com a participação de dois professores e alunos dos cursos de graduação e doutorado em Computação da UFF, criamos onze “experimentos educacionais”, com mais de trinta pequenos jogos virtuais e aplicativos interativos, e três softwares que tiveram como base teórica o Modelo de van Hiele. Tais experimentos e softwares permitem uma intensa relação de interdisciplinaridade entre Geometria e Trigonometria com áreas das Artes, Português, Física e Biologia. Esses experimentos educacionais foram aceitos pelo *Banco Internacional de Objetos Educacionais e estão publicados no Portal do Professor do MEC*.

A nossa atuação no projeto CDME teve repercussão no Curso de Computação, na medida em que a maioria dos jogos virtuais foi baseada nos jogos geométricos planos publicados no nosso livro (KALEFF; GARCIA; REI, 2002). Tal interação permitiu a elaboração de um novo algoritmo para a verificação virtual da solução de jogos do tipo quebra-cabeça plano e a publicação de vários artigos pela equipe da Computação (SIQUEIRA et al., 2008; 2009).

O projeto CDME também teve um bom desdobramento dentro do IME, pois deu origem ao projeto de pesquisa *Conteúdos Digitais para o Ensino e Aprendizagem da Matemática do Ensino Médio*, alocado no Departamento de Matemática Aplicada, sob a coordenação do professor Humberto Bortolossi, do qual participei como membro enquanto durou o projeto CDME, de 2007 a 2010.

Por outro lado, de 2008 a 2014, orientei cinco bolsistas do *Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID)*, ligado ao subprojeto Matemática/Niterói/UFF, financiado pela CAPES e no qual tive a função de co-orientadora voluntária. Esta orientação deu vários frutos em ter-

mos de artigos apresentados em eventos, experimentos educacionais e materiais para o Museu Interativo LEGI, bem como aplicações em escolas de ensino básico de Niterói. Um relato sobre essa interação e sua importância para a formação do licenciando da UFF foi também publicado (KALEFF; DYSMAN, 2013).

O projeto PIBID-Matemática, a partir de 2011, levou ao desenvolvimento de outro projeto de pesquisa do Departamento de Análise, do qual participo até hoje: o projeto *Desenvolvimento e Análise de Atividades e Recursos para o Ensino da Matemática* (DAREM), sob a coordenação da professora Anne Michelle Dysman Gomes.

Voltando a 2010, como já mencionei anteriormente, fui convidada para ministrar uma palestra no 1º *Seminário Brasiliense de História e Educação Matemática Nilza Eigenheer Bertoni*, organizado pela SBEM-DF, em Brasília. Nessa ocasião, dissertei sobre o papel da amizade e parceria acadêmica com a professora Bertoni e sua influência para o desenvolvimento da área de Educação Matemática na UFF. Essa palestra se seguiu de outra, também ministrada na Universidade de Brasília versando sobre a nossa atuação no programa PIBID/Matemática-Niterói-UFF.

Devido à boa receptividade das apresentações na UNB, no ano seguinte, fui convidada para ministrar a palestra de abertura do V EBREM (V Encontro Brasiliense de Educação Matemática) sobre o tema *Criatividade, Educação Matemática e Laboratórios de Ensino*. Para essa apresentação, retornei ao tema criatividade, enfocando a figura do escritor Hofstadter, o seu sempre presente livro *Gödel, Escher and Bach*, e ainda a litogravura *Répteis* (1935) de Escher. Entrelaçando tudo isso, enfoquei o ensino de polígonos equivalentes por meio de quebra-cabeças desenvolvidos no LEG, envolvendo tal litogravura. Essa abordagem da criatividade se mostrou muito oportuna, pois no projeto CDME havia desenvolvido um experimento educacional com três aplicativos virtuais interativos com jogos do tipo quebra-cabeças que permitem emular um mosaico plano parecido com o representado na referida litogravura.

Ainda sobre o tema criatividade, em evento na Universidade Federal da Paraíba, em 2012, ministrei outra palestra envolvendo conceitos de Geometria e Artes gráficas, a qual foi transformada em artigo (KALEFF, 2013). Os trabalhos e a sensibilidade da artista plástica Fayga Ostrower inspiraram

essa relação de interdisciplinaridade. Esse tipo de inter-relação, tão cara aos PCN, é cada vez mais valorizada para o ensino de Matemática.

Neste mesmo ano, ainda orientei oito monografias de final de curso na especialização NTEM que envolveram o Modelo de van Hiele, o ensino de Geometria e novas tecnologias das quais, duas trataram de temas ligados a aplicações em sala de aula de materiais desenvolvidos no projeto CDME.

As ações realizadas nos projetos durante os últimos anos foram intensamente divulgadas em congressos com a apresentação de palestras, comunicações e mostras do LEGI em muitos eventos na região de Niterói, bem como em várias cidades dos estados de São Paulo, Paraná, Espírito Santo, Bahia, Distrito Federal, Minas Gerais e Paraíba. Somente entre os anos de 2011 e 2012, por solicitação do professor Celso Costa, no âmbito da cooperação UFF/UAB, organizamos quatro eventos de divulgação das ações realizadas no NTEM, LEG e *Projeto Dá Licença*. Os eventos tiveram o apoio das prefeituras municipais locais, nas quais existem polos da UAB e se deram em Macaé-RJ, Araras-SP, Cubatão-SP e Lagoa Santa-MG. Em todos eles, além de palestras e mesas-redondas sobre o ensino da Matemática, gestão de polos, ensino a distância, etc., foi apresentada uma mostra do Museu LEGI. Esses eventos foram muito concorridos, pois além dos professores de Matemática dos municípios envolvidos, compareceram, tutores e coordenadores dos polos da UFF/UAB, e também alunos das escolas básicas da região.

## 20 | Constatando a Minha Identidade Profissional: sou uma Educacionista Matemática

Em outubro de 2010, ao refletir sobre a minha caminhada ao longo da formação de professores, tive a atenção voltada para um artigo publicado pelo educador Cristovam Buarque, no *Jornal O Globo*. Nesse, era apresentada uma nova modalidade de educador que o escritor denominava *educacionista*, a qual era apresentada como: “... mediador na luta pela melhoria da sociedade brasileira por meio da educação” (BUARQUE, 2010). Poucos dias depois, Irina Bokova, diretora-geral da UNESCO, na *Conferência Mundial sobre Cuidados e Educação Infantil*, em Moscou, colocou que: “A educação é a melhor maneira de combater a pobreza” (BOKOVA, 2010).

À luz dessas duas colocações, analisando as minhas pegadas deixadas ao longo do caminho acadêmico percorrido, percebi que as ações realizadas durante tantos anos de trabalho com o LEG na formação do professor, não eram propriamente de uma educadora matemática, mas de um tipo singular de atuação profissional na luta pela melhoria da sociedade por meio da educação. Pelo constatado, estou convicta de que posso me caracterizar como uma educadora matemática que atua em duas frentes de ações bem determinadas. Em uma delas, busco formar o futuro professor e transformar as concepções educacionais do docente em exercício para que ambos eduquem os seus alunos **pela** matemática e não somente que busquem prepará-los **para** o exercício profissional da Matemática científica. Na outra frente, optei pela melhoria da formação do professor, me dedi-

cando principalmente à pesquisa e à elaboração de recursos didáticos de baixo custo, os quais favorecem mais de perto o alunado e o profissional brasileiro, ou seja, a escola brasileira carente de recursos materiais.

Pelo aqui apresentado, considero-me uma **educacionista matemática**, ou seja, **uma mediadora na luta contra a pobreza pela melhoria da sociedade brasileira por meio da educação matemática**. A consciência dessa maneira de atuar no meio educacional me leva a uma caminhada cada vez mais própria a um andarilho que carrega uma mochila extremamente pesada, pouco compartilhada academicamente por matemáticos, educadores e até por educadores matemáticos. No entanto, considero essa mochila muito importante para o futuro da formação do professor de Matemática, pois nosso país apresenta desafios educacionais de dimensões continentais, com grandes bolsões de pobreza, cuja maioria dos professores pertence a classes sociais menos favorecidas e carentes de recursos financeiros.

## 21 | Mais uma Frente de Ação se Apresenta à Caminhada

À busca de compartilhamento da caminhada acadêmica, cabe ainda lembrar como, nos últimos tempos, as minhas ações têm sido influenciadas pela interação com os diversos grupos dos projetos de pesquisa e por professores do IME.

Devido a várias interações com as equipes dos projetos CDME e DAREM, surgiram questões relacionadas ao desenvolvimento da habilidade da visualização no ensino de Matemática e sobre a necessidade da priorização didática da utilização de materiais virtuais frente aos manipulativos concretos, tanto no caso de crianças como de adultos. No bojo desse questionamento, se destacaram as diferenças e peculiaridades na formação das imagens mentais das pessoas com visão normal e daquelas com deficiência visual. Do mesmo modo, surgiram perguntas sobre *a real necessidade (nos dias de hoje) de materiais manipulativos concretos para o entendimento do significado dos conceitos matemáticos, principalmente dos geométricos.*

Foi a partir desse novo questionamento que outra frente de ação se apresentou em nosso caminho: a da educação matemática inclusiva do aluno com deficiência visual.

## 21.1 O DESAFIO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA INCLUSIVA DO ALUNO COM DEFICIÊNCIA VISUAL

Uma vez que, há tanto tempo, já vinha me preocupando com o tema da formação de imagens e modelos mentais nas pessoas com visão normal, nada mais coerente do que pensar em uma vertente de pesquisa que envolvesse indivíduos com deficiência visual (cegos ou com baixa visão). Além do que, geralmente, tais pessoas pertencem às classes sociais menos favorecidas...

Por outro lado, no Brasil, desde o final do século passado, já existem documentos oficiais que, além de prever a matrícula compulsória do deficiente em escolas regulares e a formação de professores aptos a trabalhar com sua inclusão, também recomendam aos sistemas de ensino constituir e fazer funcionar um setor responsável pela educação especial. Setor dotado de recursos humanos, materiais e financeiros que viabilizem e deem sustentação ao processo de construção da inclusão na educação (BRASIL, 1996, 2001a e 2001b). No entanto, durante as duas últimas décadas, tem sido apontado que ainda faltam projetos, políticas e recursos humanos com capacitação adequada para que a inclusão seja efetivamente praticada, como pretende o atual Plano Nacional de Educação-PNE (2011-2020) recentemente promulgado em julho do ano passado (BRASIL, 2014). Corroborando com isso, Glat e Nogueira há muito afirmavam que:

(...) não basta que uma proposta se torne lei para que a mesma seja imediatamente aplicada. Inúmeras são as barreiras que impedem que a política de inclusão se torne realidade na prática cotidiana de nossas escolas. Entre estas, a principal, sem dúvida, é o despreparo dos professores do ensino regular para receber em suas salas de aula, geralmente repletas de alunos com problemas de disciplina e aprendizagem. (GLAT; NOGUEIRA, 2002, p.22).

Frente a tudo isso, a partir de 2008, lancei-me em estudos sobre como melhor realizar a adaptação dos materiais manipulativos concretos e virtuais, existentes no LEG, para serem utilizados na educação matemática

inclusiva dos alunos com tal deficiência. Foi nessa direção que, dentro dos projetos de extensão anuais *Desenvolvimento de atividades para ampliação do acervo didático do laboratório de ensino de geometria do Instituto de Matemática*, foi inserido o núcleo Vendo com as Mãos.

Ações desse novo núcleo foram realizadas entre 2009 e 2010 com crianças do Ensino Fundamental da escola especializada em deficiência visual do Instituto Benjamin Constant (IBC) e, a partir de 2011, estamos trabalhando com alunos do Ensino Médio do Colégio Pedro II, campus São Cristóvão. Essa é uma escola inclusiva que recebe alunos cegos ou com baixa visão, principalmente aqueles oriundos do IBC. Em ambas as escolas, testamos tanto os materiais adaptados quanto os novos, especialmente criados no LEG para alunos com tal deficiência.

Além desse projeto de extensão, também criei e passei a orientar o de monitoria *Iniciação à Docência por meio do Desenvolvimento e da Aplicação de Atividades Didáticas para a Melhoria do Ensino de Geometria em uma Perspectiva da Educação Matemática*.

Os novos projetos envolvem anualmente quatro alunos bolsistas e um professor da instituição parceira. Cabe aqui salientar que esses bolsistas têm tido grande sucesso desde o primeiro ano de vigência dos projetos, pois, em 2009, a aluna-monitora Fernanda Malinosky C. da Rosa recebeu o *1º Prêmio de Monitoria referente às áreas de Matemática, Estatística, Geografia e Geociências*, com o trabalho *O ensino de geometria para deficientes visuais*. Em 2013, o trabalho *Dois recursos didáticos comerciais adaptados ao ensino de matemática elementar de alunos com deficiência visual*, relatado pela bolsista de extensão Ana Eliza da Silva Cordeiro, recebeu o *1º Prêmio de Extensão Josué de Castro* na área de Educação, oferecido durante a 18ª Semana de Extensão.

Por outro lado, como os bolsistas que atuam nos projetos vinculados ao LEG, não dominam o sistema Braille, todos precisam ser treinados nessa linguagem, pois as atividades ligadas aos recursos manipulativos também estão sendo adaptadas para serem apresentadas nesse sistema. Portanto, constatamos a necessidade de prepararmos profissionais capacitados para ler e escrever no sistema Braille.

Com o objetivo de possibilitar essa preparação para Braille, em 2010, conjuntamente com a então bolsista Fernanda Malinosky C. da Rosa, criamos

o curso *Braille – Módulo Básico*, semipresencial, com 45 horas de duração, a ser oferecido *online*, via plataforma *Moodle*, no ambiente da Coordenação de Educação à Distância (CEAD - <http://www.neami2.uff.br/moodle>). Em 2011, oferecemos uma versão desse curso no ambiente virtual do antigo NEAMI, da qual participaram professores em exercício na rede de ensino e alunos licenciandos da UFF. Cabe enfatizar que a procura por este curso foi bastante grande, com cerca de quinhentos inscritos, mas devido à falta de tutores (a distância) especializados para orientarem os participantes, o seu número foi limitado a cem. Na plataforma, foi disponibilizado o texto do livro que escrevemos especialmente para esse curso (KALEFF; ROSA, 2011), bem como material complementar (vídeos, artigos, entre outros).

Vale registrar que uma nova versão desse curso Braille já foi planejada com 60 horas/aula e pretendo que seja oferecida pelo CEAD como disciplina optativa para todas as licenciaturas da UFF. No momento, o que falta são recursos monetários para preparar e aumentar o número de tutores para tal empreitada.

Uma análise da participação dos alunos desse curso ministrado em 2011 foi tema da dissertação de mestrado da Fernanda M. C. da Rosa, em dezembro de 2013, na Universidade Estadual Paulista (UNESP), no Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro. Com o título *Professores de matemática e a educação inclusiva: análises de memoriais de formação* e sob a orientação da professora Dra. Ivete Maria Baraldi, a pesquisa teve por objetivo compreender como professores de Matemática, ainda na formação inicial da licenciatura, se aproximam da educação inclusiva de alunos com deficiência visual e de como percebem a inclusão. Nesse estudo, além de divulgar ações realizadas na UFF, a autora une nossa universidade à UNESP, pois fornece novos elementos para um projeto muito amplo denominado *Mapeamento da Formação e Atuação de Professores de Matemática no Brasil*, desenvolvido pelo Grupo História Oral e Educação Matemática (GHOEM) daquela universidade. Esse projeto visa a realizar um entendimento da formação de professores de Matemática das distintas regiões que compõem o Brasil.

Por meio da análise dos dados efetuada para a dissertação realizada na UNESP, é possível se perceber um movimento gradativo, mas ainda lento, dentro da nossa própria universidade na tentativa de se adequar às leis

vigentes sobre a inclusão, bem como notamos o surgimento de práticas adaptadas ao ensino do aluno com deficiência visual e a preocupação com a vivência dos professores para o ensino de Matemática em classes inclusivas. Algumas instâncias da licenciatura da UFF ficaram bem destacadas, pois o papel do LEG na formação dos licenciados pesquisados se mostrou muito importante, igualmente o de duas disciplinas obrigatórias à licenciatura e por mim ministradas no curso noturno da Licenciatura do IME: *Educação Matemática-Geometria e Laboratório de Educação Matemática*.

Cabe assinalar que, desde 2008, na disciplina obrigatória da Licenciatura *Laboratório de Educação Matemática*, foram incluídos tópicos que orientam o licenciando sobre a Educação Inclusiva. Nessa disciplina, quando ministrada por mim, é dada ênfase à divulgação de recursos educacionais destinados ao aluno com deficiência visual.

Embora ultimamente não tenha oficializado nenhum projeto de pesquisa, tenho levado a cabo várias análises dos dados obtidos com testagens em diferentes clientelas de professores. Essas tanto envolvem a introdução de conceitos elementares das Geometrias não-Euclidianas no Ensino Médio quanto a Educação Inclusiva na formação do professor de Matemática brasileiro. Com tais análises, em conjunto com Fernanda M. C. da Rosa e Rosângela F. Dornas, buscamos obter subsídios com vistas a avançar em uma reflexão mais profunda sobre as políticas públicas relacionadas à formação do professor de Matemática e ao PNE. Nessa direção, já publicamos artigos em revistas e congressos sobre as ações desenvolvidas e os resultados obtidos (KALEFF; ROSA; DORNAS, 2014; KALEFF; ROSA, 2013a; 2013b; 2012; KALEFF; DORNAS; ROSA; VOTTO, 2010).

Ainda nessa direção, somente para exemplificar o quanto é importante o tipo de ação que temos desenvolvido na formação continuada de professores, podemos observar alguns dados obtidos a partir de um questionário recente respondido por 136 professores de três estados brasileiros alunos da disciplina *Tópicos em Ensino de Geometria* do curso NTEM. Constatamos uma realidade preocupante: menos de 45% dos docentes tiveram alguma disciplina específica sobre o tema Educação Inclusiva na sua formação de graduação ou pós-graduação, bem como somente cerca de 20% do total tiveram uma capacitação em uma disciplina extra sobre Braille, Libras, etc., realizada fora da sua formação regular (KALEFF; ROSA; DORNAS, 2014).

Especificamente e dando continuidade aos vários artigos já publicados sobre a história da implantação das diversas e variadas disciplinas que ocorreram na Licenciatura da UFF, cabe assinalar que, recentemente, apresentamos um relato sobre as primeiras conclusões advindas de um estudo sobre o desenvolvimento histórico e a evolução das mudanças curriculares do curso de Licenciatura em Matemática frente ao de Bacharelado, desde a sua fundação em 1949 até a implantação do currículo de 2008. Esse relato visa mostrar a trajetória da inclusão, na grade curricular desses cursos, de disciplinas relacionadas à Lógica Matemática, ao Cálculo Diferencial e Integral, à Educação Matemática, às Geometrias não-Euclidianas e à Educação Inclusiva (KALEFF; ROSA, 2014).

## 21.2 UM NOVO LIVRO VISANDO À EDUCAÇÃO INCLUSIVA

Frente à necessidade de uma melhor formação do professor em direção à Educação Inclusiva, arregaçamos as mangas e escrevemos um novo livro visando tanto ao aluno com visão normal quanto ao com deficiência visual. Esse volume, produzido em conjunto com vários alunos e ex-bolsistas, foi editorado pela CEAD, sob a chancela do IME. Esse novo livro tem como título: *Vendo com as mãos, olhos e mente: um laboratório e um museu de Educação Matemática para o aluno com deficiência visual*. De maneira análoga aos demais que escrevemos anteriormente, nesse livro buscamos trazer para o professor em formação (continuada ou graduação) a nossa experiência vivenciada no LEG, não somente com a nossa visão de formadora de professores e educadora matemática, mas também levando em conta a perspectiva do licenciando em formação.

## 22 | Observações sobre uma Caminhada Inacabada

Apesar de todas as realizações aqui relatadas, acredito que o meu trabalho frente à formação de professores se encontra muito longe do seu final. Tal conclusão decorre de uma reflexão mais apurada da Meta 4 proposta à Escola brasileira pelo PNE, que prioriza a inclusão em classes regulares, de alunos com alguma deficiência ou superdotação (BRASIL, 2014). Assim, por essa meta, além da preocupação com a educação do aluno com deficiência visual, há necessidade de nos voltarmos para outros a serem incluídos nas classes regulares da escola, ou seja, nos dedicarmos ao estudo das necessidades escolares das pessoas surdas ou com outras deficiências, para que realmente tenhamos uma ampla Educação Matemática Inclusiva.

Cabe adiantar que também já penso em como realizar novas parcerias com professores do Curso de Computação da UFF e em como adaptar todo o material criado no âmbito do projeto CDME, para poder ser rodado em *smartphones*, *tablets* e outros aparelhos mais recentes, além dos computadores desktop. Bem como a adaptar o material virtual mais adequadamente para a educação inclusiva do aluno com deficiência visual.

Frente ao que foi aqui apresentado, acredito ser necessário que continue a persistir na formação do professor, em mais essa frente de ação: a da Educação Matemática Inclusiva. É nessa direção que pretendo caminhar nos próximos anos.

É preciso continuar!

Olhando a narrativa sobre a trajetória percorrida observo que as con-

seqüências das minhas primeiras experiências como docente do Departamento de Análise e Lógica quase anularam minha energia e autonomia profissionais como professora e aparentemente me fizeram aceitar muitas situações acadêmicas que foram se apresentando, e até mesmo se impondo, em grande parte da minha caminhada na UFF.

No entanto, a ânsia pela transformação da formação profissional do professor de Matemática esteve sempre latente em minha mente, na busca de uma preparação mais adequada ao alunado brasileiro e a serviço de uma sociedade mais humana e justa.

Acreditando sempre que a Matemática é uma ciência criada **para** ser humano e **para** o ser humano, ou seja, em benefício de uma sociedade mais igualitária, nunca pude aceitar que seu ensino fosse instrumento de opressão, estabelecimento de poder e dominação na formação de professores e, muito menos, na Escola, como, muitas vezes, essa ciência tem sido apresentada nos últimos cinquenta anos. Embora, infelizmente, para muitos acadêmicos, a ação do professor de Matemática, ainda nos dias de hoje, continue sendo considerada politicamente neutra! (ERNEST, 1998).

Com o passar dos anos e com o restabelecimento da autonomia do professor universitário, adquiri novas forças para lutar, através do **fazer em ação**, e não somente pelo **fazer na teoria** por uma formação do professor de Matemática mais adequada às necessidades científicas, tecnológicas, sociais e escolares do tempo presente e também por aquelas prováveis e necessárias para o século XXI. Da mesma forma, mesmo podendo me aposentar há mais de 15 anos, encontrei forças na pesquisa voltada para as ações de extensão, na interiorização e no ensino a distância, para levar e democratizar o conhecimento construído em uma universidade pública àqueles que não o podem usufruir presencialmente por estarem em rincões fora de um grande centro acadêmico. Com certeza, a perseverança nessas duas frentes de luta, nem sempre valorizadas academicamente, é a pegada mais profunda que meus passos deixam impressos nessa caminhada.

Vou levando em frente as minhas ações, apesar de todos aqueles que acham que o corpo docente de uma universidade é composto por peças que devam ser substituídas devido ao desgaste do tempo e não por seres

humanos! Seres, cuja experiência e contribuição fazem a história de uma instituição, apontando tanto os erros como os sucessos do passado, e que podem ajudar a preparar o futuro das novas gerações de docentes mais conscientes do que seja a realidade da formação do professor de Matemática para o alunado brasileiro.

Deixo, nas palavras do poeta, a descrição do meu sentimento maior nessa caminhada inacabada...

## NÃO SEI QUANTAS ALMAS TENHO

Fernando Pessoa

Não sei quantas almas tenho.  
Cada momento mudei.  
Continuamente me estranho.  
Nunca me vi nem acabei.  
De tanto ser, só tenho alma.  
Quem tem alma não tem calma.  
Quem vê é só o que vê,  
Quem sente não é quem é,  
Atento ao que sou e vejo,  
Torno-me eles e não eu.  
Cada meu sonho ou desejo  
É do que nasce e não meu.  
Sou minha própria paisagem;  
Assisto à minha passagem,  
Diverso, móbil e só,  
Não sei sentir-me onde estou.  
Por isso, alheio, vou lendo  
Como páginas, meu ser.  
O que segue não prevendo,  
O que passou a esquecer.  
Noto à margem do que li  
O que julguei que senti.  
Releio e digo: "Fui eu?"  
Deus sabe, porque o escreveu.

## 23 | Referências Bibliográficas

ALFSEN, E. M. On a general theory of integration based on order. *Mathematica Scandinavia*, 6, 1958, p. 67-79.

BARBOSA, J. E. F. Sobre as sistematizações universais. Niterói: Instituto de Matemática-UFF, 1970.

BARBOSA, J. E. F. Sobre uma hierarquia transfinita de caliortografias e morfologias universais. Niterói: Instituto de Matemática-UFF, 1971.

BERTONI, N. E. Número fracionário: primórdios esclarecedores. Rio Claro, SP: SBHMat, 2005, 55p.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria da Educação Fundamental. Lei de Diretrizes e Bases da Educação. Brasília, DF: MEC/SEF, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática (5ª a 8ª séries). Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnologia. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 1999.

BRASIL Conselho Nacional de Educação. Resolução nº 2/2011. Brasília, DF: CNE/CEB, 2001a.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Parecer nº 17/2001. Brasília, DF: CNE/CEB, 2001b.

BRASIL Casa Civil. Lei nº 13.005, de 25 de julho de 2014. Aprova o Plano Nacional de Educação e dá outras providências. Brasília, DF: MEC/ SEB, 2014.

BOKOVA, I. Conferência Mundial sobre Cuidados e Educação Infantil. Moscou: UNESCO, 2010.

BOLTIANSKI, V. G. Figuras Equivalentes e Equidecomponíveis. Trad. do original russo por Hariki, S. São Paulo: Atual, 1996.

BUARQUE, C. Você, educacionista. Rio de Janeiro: Jornal O Globo. 16/02/2008.

CHOQUET, G. L'enseignement de la géométrie. Paris: Hermann, 1964.

DIENES, Z. P.; GOLDING, E. W. Coleção os primeiros passos da Matemática. São Paulo: Herder, 1969. (v. 1-3).

DIEUDONNÉ, J. Algèbre linéaire et géométrie élémentaire. Paris: Hermann, 1964.

DUVAL, R. Semiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berna: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: ALCÂNTARA MACHAO, S. (Ed.) Aprendizagem Matemática. São Paulo: Papirus, 2003, p. 1-34.

ERNEST, P. The Philosophy of Mathematics Education. Londres: Palmer Press, 1998.

FREUDENTAL, H. Mathematics as an Educational Task. Dordrecht: Reidel, 1973.

GROTHMANN, R. Z. u. L. - Zirkel und Lineal. 2006. Disponível em: < <http://www.rene-grothmann>>. Acesso em: 23 de junho de 2008.

GROWS, D. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Nova York: NTCM, 1992.

HERSHKOWITZ, R. et al. Psychological aspects of learning geometry. In: NESSHER, P.; KILPÁTRICK, J. (Eds.) Mathematics and cognition. Cambridge: University Press, 1990, p. 70-95.

HOFFER, A. Geometry: a Model of the Universe. Nova York: Addison-Wesley, 1979.

HOFFER, A. Geometry is More than Proof. Mathematics Teacher, 74, p. 11-18, 1981.

HOFFER, A. Van Hiele - Based Research. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed). Acquisition of Mathematical Concepts and Processes. Nova York: Academic Press, 1983, p. 45-64.

HOFSTADTER, D. R. Gödel, Escher and Bach: An Eternal Golden Braid. New York: Basic Books; 1979.

HOHENWARTER, M. Geogebra. 2001. Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Geogebra>>. Acesso em: 23 de junho de 2008.

Geogebra. Disponível em: <<http://www.geogebra.org/cms/>>. Acesso em: 23 de junho de 2008.

GROWS, D. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Nova York: NCTM, 1992.

JOHNSON-LAIRD, P. N. Images, Models and Propositional Representations. In: VEGA, M. (Org.) Models of Visuospatial Cognition. Nova York: Oxford University Press, 1996.

KALEFF, A. M. M. R. Coletânea de Exercícios de Análise Matemática: (Estudo do  $R^n$  - Espaços Métricos - Sucessões e Séries. Notas de aulas apostiladas. Niterói: Instituto de Matemática – UFF, 1970.

KALEFF, A. M. M. R. Valorizações de Lebesgue em Reticulados. Monografia de Mestrado (Mestrado em Matemática). 1972 - Instituto de Matemática. UFF. Niterói, 1972.

KALEFF, A. M. M. R. Introdução Axiomática à Teoria dos Corpos Numéricos. Notas de aulas apostiladas. Niterói: Instituto de Matemática – UFF, 1974.

KALEFF, A. M. M. R. Integração e Medida. In: Enciclopédia Mirador Internacional. Rio de Janeiro: Editora Mirador, 1975. p. 6156 - 6160

KALEFF, A. M. M. R. O desenvolvimento da Geometria: resumo histórico. Notas de aulas apostiladas. Niterói: GGM/UFF, 1989.

KALEFF, A. M. M. R. Matemática Moderna: sua origem e aspectos de seu desenvolvimento em alguns países ocidentais. Boletim-Gepem. Rio de Janeiro, 25, 2º semestre, 1990, p. 3-9.

KALEFF, A. M. M. R. A importância da Geometria Euclidiana na formação do educador matemático. Boletim- Gepem. Rio de Janeiro, nº 31, 1993, p. 35 - 40

KALEFF, A. M. M. R. Deficiências na formação do professor de Geometria, II Congresso Ibero Americano de Educação Matemática In: Livro de Resumos... Blumenau: SBEM/CAPES, 1994, p. 40-41.

KALEFF, A. M. M. R. Tomando o Ensino da Geometria em Nossas Mãos... Educação Matemática em Revista. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Blumenau, nº 2, ano 2, 1994, p. 19 - 25.

KALEFF, A. M. M. R. A formação do professor de Matemática x formação do aluno. I Encontro de Educação Matemática do Rio de Janeiro. In: Livro de Resumos... Rio de Janeiro: SBEM/UERJ. 1997, p. 25-26.

KALEFF, A. M. M. R. Facilitando o ensino de volume através de quebra-cabeças geométricos. Educação e Matemática. A.P.M. Lisboa, nº 47, 1998, p.15-20.

KALEFF, A. M. M. R. Os cursos de formação de professores de Matemática de Ensino Fundamental e Médio e a Educação Matemática na UFF: aspectos históricos, Caderno de Licenciatura em Matemática. Niterói: IMUFF/CEG/PROEX/UFF, nº 2, ano 2, 1999, p. 57-68.

KALEFF, A. M. M. R. Construindo o Conceito de Simetria em Relação a uma Reta: do Jardim de Infância ao 3º grau, Boletim – Gepem. Rio de Janeiro, nº 35, 1999, p. 42-56.

KALEFF, A. M. M. R. A Educação Matemática na Universidade Federal Fluminense: Um Relato do Desenvolvimento Histórico dos Cursos de Formação de Professores de Matemática. Boletim – Rio de Janeiro, nº 38, Fevereiro 2001, p. 9-33.

KALEFF, A. M. M. R. Vendo e Entendendo Poliedros. Série Conversando com o Professor. V. 2: Sobre Geometria. 2ª Ed. Niterói: EdUFF, 2003, 215p.

KALEFF, A. M. M. R. Uma Salinha quase escondida do Instituto de Matemática: o Laboratório de Ensino de Geometria da Universidade Federal Fluminense. Caderno de Licenciatura em Matemática. Niterói: IMUFF/PROEX/UFF, nº 6, ano 4, 2004, p. 45-54.

KALEFF, A. M. M. R. Da Rigidez do Olhar Euclidiano às (Im)Possibilidades de (Trans)Formação dos Conhecimentos Geométricos do Professor de Matemática. 2004. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação. UFF. Niterói, 2004.

KALEFF, A. M. M. R. Sobre o Poder de Algumas Palavras e Imagens Quando se Busca Avançar Além das Noções Euclidianas Mais Comuns. Boletim – Gepem. Rio de Janeiro, nº 45. 2005a. p. 25-46.

KALEFF, A. M. M. R.. A Influência dos Registros Semióticos sobre os Obstáculos Cognitivos na Resolução de Problemas Introdutórios Às Geometrias Não-Euclidianas. In: CD do V SPEM-RJ. V Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro. Anais... Itaocara: SBEM-RJ/FAPERJ, 2005b.

KALEFF, A. M. M. R.. Registros Semióticos e sua Importância para a Compreensão de Conceitos matemáticos: O estudo de caso de uma Professora frente à Resolução de um Problema Introdutório às Geometrias Não-Euclidianas. 28º Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e de Pesquisa em Educação-ANPED. In: 1 CD Anais... Caxambu: ANPED/CAPES, 2005 c.

KALEFF, A. M. M. R. Registros Semióticos e sua Relação com Obstáculos Cognitivos Apresentados por Professores na Resolução de Problemas Introdutórios às Geometrias Não-Euclidianas. 5º Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática In: 1 CD Atas... Porto-Portugal: Associação de Professores de Matemática, 2005 d.

KALEFF, A. M. M. R. Considerações sobre os sistemas axiomáticos dedutivos: uma introdução ao estudo das geometrias finitas e das geometrias não-euclidianas. Niterói: GGM/UFF. Notas de aulas apostiladas. 1989. Edição revisada: 2006.

KALEFF, A. M. M. R. Do fazer concreto ao desenho em geometria: ações e atividades desenvolvidas no Laboratório de Ensino de Geometria da Universidade Federal Fluminense. In: LORENZATO, S. (Org.). O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Coleção Formação de Professores. Campinas - SP: Autores Associados Dezembro 2006 a. p. 113-134.

KALEFF, A. M. M. R.. Capturando Registros Semióticos e suas Conversões: Um Instrumento para a Investigação de Atividades Matemáticas que Envolvem Registros Gráficos 29º Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e de Pesquisa em Educação-ANPED, Caxambu. In: Anais... Caxambu: ANPED/CAPES, Outubro 2006 b. Disponível em: <<http://29reuniao.anped.org.br/trabalhos/trabalho/GT19-1996--Int.pdf>>.

KALEFF, A. M. M. R Tópicos em Ensino de Geometria. Niterói: NEAMI/UFF. Notas de aulas apostiladas, 2006 c.

KALEFF, A. M. M. R Registros Semióticos e Obstáculos Cognitivos na Resolução de Problemas Introdutórios às Geometrias não-Euclidianas no Âmbito da Formação de Professores de Matemática. Bolema-UNESP. Rio Claro-SP. n. 28. Novembro, 2007 a. p. 69-94. Disponível em: <<http://www2.rc.unesp.br/bolema/?q=node/91>>.

KALEFF, A. M. M. R. Reflexões sobre o caminho desde o concreto ao abstrato no ensino da Geometria: vivências no Laboratório de Ensino de Geometria da Universidade Federal Fluminense. In: SAGULA, J. E. et al, Memórias del 9no Simposio de Educación Matemática. Buenos Aires: Edumat. v.1. Maio, 2007 b. p. 48 - 59. CD-ROM.

KALEFF, A. M. M. R. O Uso Didático de Desenhos de Ilusão de Ótica no Desenvolvimento da Habilidade de Visualização. Pesquisas e Práticas em Educação Matemática. Volume 1 nº 1 Vassouras- RJ. Julho/dezembro, 2007d.

KALEFF, A. M. M. R. Tópicos em Ensino de Geometria: A Sala de Aula Frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria. Rio de Janeiro: UFF/ UAB/CEDERJ. 2008. 223p.

KALEFF. A. M. M. R. Criatividade, Educação Matemática e Laboratórios de Ensino. V Encontro Brasiliense de Educação Matemática. In: 1 CD Anais... Brasília: SBEM-DF/SEEDF/CAPES. Setembro, 2011. Disponível em: <<http://www.sbemdf.com/images/ebrem/vebrem/palestrasVebrem.pdf>>.

KALEFF, A. M. M. R. Ver com Olhos, Mãos e Mente: Ferramentas para o Ensino de Matemática e para a Inclusão de Deficientes Visuais. VII Encontro Paraibano de Educação Matemática, 2012, João Pessoa- PB: CNPq/SBEM-PB. In: Anais ... João Pessoa-PB: SBEM-PB/Editora Realize, 2012. v.1. p.1 – 19. Disponível em: <<http://www.editorarealize.com.br/revistas/epbem/anais.php>>.

KALEFF, A. M. M. R. Dois desafios para o ensino de geometria e para a inclusão do deficiente visual na escola: visualização e interpretação de figuras geométricas. Educação Matemática em Foco. SBEM-PB-UEPB, v.1, 2012. p.34 – 55. ISSN: 1981.6979. Disponível em: <[http://pos-graduacao.uepb.edu.br/ppgecm/?page\\_id=53](http://pos-graduacao.uepb.edu.br/ppgecm/?page_id=53)>.

KALEFF, A. M. M. R. (org) Vendo com as mãos, olhos e mente: um laboratório e um museu de Educação Matemática para o aluno com deficiência visual. Niterói: CEAD, 2015 (em editoração).

KALEFF, A. M. M. R.; DYSMAN. A. M. Um Museu Interativo Itinerante de Educação Matemática na Formação do Professor de Matemática. In: Educação Matemática em Foco. SBEM-PB-UEPB, 2013. (v. 2).

KALEFF, A. M. M. R., ROSA, F. M. C. Vendo com as mãos: em busca da inclusão do aluno com deficiência visual nas aulas de Matemática. Caderno Dá licença, vol. 8, Ano 11, p. 205-225, dez. 2013. Disponível em: <[http://www.uff.br/dalicensa/index.php?option=com\\_content&view=article&id=73&Itemid=12](http://www.uff.br/dalicensa/index.php?option=com_content&view=article&id=73&Itemid=12)>.

KALEFF, A. M. M. R; FRANCA, J. C. Uma análise da apresentação de retas paralelas em livros didáticos do ensino médio. Caderno Dá licença, vol. 7, 2008. pp. 9-36. <[www.uff.br/var/www/htdocs/dalicensa/images/artigo1.pdf](http://www.uff.br/var/www/htdocs/dalicensa/images/artigo1.pdf)>.

KALEFF, A. M. M. R.; MOURÃO. O. S. Licenciandos de matemática sabem interpretar desenhos e calcular volumes de sólidos elementares construídos

por pequenos cubos? VI EEMAT- VI Encontro de Educação Matemática do Rio de Janeiro. Niterói: SBEM-RJ. In: Anais..., setembro, 2014.

KALEFF, A. M. M. R.; NASCIMENTO; R. S. Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi. Boletim - Gepem, Rio de Janeiro, nº 44, dezembro 2004, p. 11 - 42.

KALEFF, A. M. M. R; REI, D. M Vareta, canudos, arestas...sólidos geométricos, Revista do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, nº 28, 1995, p. 29 – 36.

KALEFF, A. M. M. R; REI, D. M Incentivando a visualização espacial através de propriedades geométricas de tetraedros duais. Educação e Matemática. APM. Lisboa, nº 31, 1996 a, p. 6 - 11.

KALEFF, A. M. M. R; REI, D. M. Jogos geométricos e formas espaciais, Revista do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, nº 31, 1996 b, p. 25-31 .

KALEFF, A. M. M. R.; REI, D. M.. Varetas, canudos, arestas e sólidos geométricos. In: HELLMEISTER, A. C.; DRUCK, S.. (Orgs.). Explorando o Ensino da Matemática-Atividades. Brasília: MEC-Secretaria da Educação Básica. 2004. v. 2, p. 122-126. <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me000545.pdf>

KALEFF, A. M. M. R., ROBAINA, D. T. Geometrias não-Euclidianas: do caminhar nas cidades ao funcionamento do GPS. IX Encontro Nacional de Educação Matemática. Atas... Belo Horizonte: CAPES/SBEM /UFMG. Julho, 2007.

KALEFF, A. M. M. R., ROBAINA, D. T. A Democratização da Matemática na Universidade Federal Fluminense: o Museu Interativo do Laboratório de Ensino de Geometria. VI Congresso Ibero Americano de Educacion Matematica, Puerto Montt. Chile In: Anais.... Puerto Montt: Universidad de Los Lagos/Sociedade Chilena de Educacion Matematica., 2009. v.1. p.646 – 651.

KALEFF, A. M. M. R.; ROSA, F. M. C. Braille: Módulo Básico. Niterói: UFF-NEAMI, 2011. p. 88.

KALEFF, A. M. M. R., ROSA, F. M. C. Buscando a Educação Inclusiva em Geometria. Benjamin Constant, Rio de Janeiro, 51, v.1, 2012, p. 22 – 33.

KALEFF, A. M. M. R.; ROSA, F. M. C. Ações à busca de recursos para a educação especial do deficiente visual em geometria. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C., v. 26, 2013 a. p.115 – 120.

KALEFF, A. M. M. R; ROSA, F. M. C. Modelos concretos e virtuais, móveis, luzes e sombras de poliedros de Platão e seus duais como uma proposta pedagógica interdisciplinar e de inclusão. In: VI Seminário Nacional de História e Investigações de/em Aulas de Matemática. CAMPINAS. Anais ... CAMPINAS: SBEM-SP-UNICAMP, 2013 b. v.1. p. 1 – 10.

KALEFF, A. M. M. R; ROSA, F. M. C. Observações preliminares sobre o percurso histórico da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Fluminense: da lógica matemática ao cálculo e à educação matemática inclusiva. II ENAPHEM. Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática. UNESP: Bauru/SP. Anais ... BAURU: UNESP, 2014.

KALEFF, A. M. M. R.; SAGULA, J. E. Cognición y Lingüística, conjunción necesaria como un enfoque en Educación Matemática. In: SAGULA, J. E. et al, Memorias del 9no Simposio de Educación Matemática. Buenos Aires: Edumat, 2007. v.1, p. 227 – 238. CD-ROM.

KALEFF, A. M. M. R.; VIEIRA, L. B. Tesouros da Geometria. In: Moura, C. (Org) Ciência Hoje na Escola, v. 8. Matemática. Por quê e para quê ? Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, 1999 a. p. 47 - 51.

KALEFF, A. M. M. R.; VIEIRA, L. B. Razão áurea, outros polígonos e poliedros de Platão. In: Moura, C. (Org.) Ciência Hoje na Escola, v. 8. Matemática. Por quê e para quê? Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, 1999 b. p. 52 - 55.

KALEFF, A. M. M. R.; CORDEIRO, A. E. S., OLIVEIRA, M. F. Dois recursos didáticos para a introdução ao ensino de sistemas numéricos para o aluno

com deficiência visual. VI EEMAT-VI Encontro de Educação Matemática do Rio de Janeiro. Niterói: SBEM-RJ. In: Anais..., setembro, 2014.

KALEFF, A. M. M R; GARCIA, S. S.; REI, D. M. Are Teachers Prepared to Introduce the Concept of Volume Measure? XIX International Group for the Psychology of Mathematics Education. In: Anais ... Recife: PME/SBEM/CAPES, julho, 1995 a, 1, p. 206.

KALEFF, A. M.M R; GARCIA, S. S.; REI, D. M.; Sabemos calcular o volume de sólidos geométricos a partir de seus desenhos? I Congresso Internacional de Matemática y Diseño. In: Atas... Buenos Aires: MayD, 1995 b, p. 109-114

KALEFF, A. M. M. R; GARCIA, S.S.; REI, D. M. Como adultos interpretam desenhos e calculam volumes de sólidos construídos por pequenos cubos. Zetetiké, Faculdade de Educação - UNICAMP, Campinas, nº 4, ano 6, 1997, p. 137-152.

KALEFF, A. M. M. R; GARCIA, S. S; REI, D. M. Quebra-cabeças Geométricos e Formas Planas. Série Conversando com o Professor. Vol.1: sobre Geometria. 3ª Ed. 1ª Reimpressão. Niterói: EdUFF, 2005. 87p.

KALEFF, A. M. M. R; GARCIA, S.S; UZÊDA A. P. Ensinando volumes de sólidos através de quebra-cabeças. I Encontro de Educação Matemática do Rio de Janeiro. In: Livro de Resumos... Rio de Janeiro: SBEM/UERJ, 1997. p. 61-62

KALEFF, A. M.M R; GARCIA, S.S; VIEIRA, L. B.- Introduzindo o conceito de áreas através de quebra-cabeças, I Encontro de Educação Matemática do Rio de Janeiro. In: Livro de Resumos... Rio de Janeiro:SBEM/UERJ, 1997. p. 40-41.

KALEFF, A. M. M. R., ROBAINA, D. T; NASCIMENTO; R. S. GPS e o seu Funcionamento Frente à Geografia, Geometria Euclidiana e à Geometria da Esfera. IV Encontro de Educação Matemática do Rio de Janeiro (IV EEMAT -RJ). In: Livro de Resumos ... Macaé: SBEM-RJ. Setembro, 2006.

KALEFF, A. M. M. R.; ROSA, F. M. C.; DORNAS, R. F. A inclusão do aluno com alguma deficiência na sala de aula de matemática: os professores em

exercício estão preparados para atuarem? VI EEMAT-VI Encontro de Educação Matemática do Rio de Janeiro. Niterói: SBEM-RJ. In: Anais..., Setembro, 2014.

KALEFF, A. M. M. R.; ROSA, F. M. C.; DORNAS, R. F. Uma colaboração às políticas públicas visando à melhoria da formação do professor de matemática: duas inclusões na sala de aula. XII Encontro Paulista de Educação Matemática: XII EPDM. In: Anais... Birigui: SBEM/SBEM-SP. In: Anais..., junho, 2014, p.1-14.

KALEFF, A. M. M. R.; TOLEDO, M. I; SÁ, L. Criando, Vendo e Entendendo Sólidos de Revolução. Boletim - Gepem, Rio de Janeiro, nº 40, fevereiro 2002, p. 34-55.

KALEFF, A. M. M. R.; REI, D. M.; HENRIQUES; FIGUEIREDO, L.G. Desenvolvimento do pensamento geométrico: Modelo de van Hiele. II Congresso Nacional de Iniciação Científica em Matemática. Trabalhos Apresentados. Rio de Janeiro: UFRJ. 1989. p. 09-15.

KALEFF, A. M. M. R.; REI, D. M.; HENRIQUES; FIGUEIREDO, L. G. Desenvolvimento do pensamento geométrico: Modelo de van Hiele. Bolema – UNESP. Rio Claro- SP: UNESP. 10. 1994. p. 21-30.

KALEFF, A. M. M. R.; DORNAS, R. F.; ROSA, F.M.C; VOTTO, B. G.. O museu interativo de matemática como uma ferramenta para a democratização da matemática com vistas à educação inclusiva. Educação Matemática em Revista - RS, EMR-RS. SBEM. Ano 11. 2010. Nº 11. v.1 e v.2. p. 83-91.

KALEFF, A. M. M. R.; DORNAS, R; ESQUINCALHA, A.; ROBAINA, D. T.; VENEU, A. Uma experiência sobre a capacitação e desempenho de professores-tutores para o ensino a distância: o desafio da construção de materiais didáticos para o ensino de geometria. XIII Congreso Internacional de Educacion a Distancia CREAD - UDEC/ MERCOSUR / SUL, Universidad de Concepción. In: Anais ... . Concepción – Chile: MERCOSUR. Dezembro, 2009. Disponível em: <<http://repositoral.cuaed.unam.mx:8080/jspui/simple-search?query=KALEFF&submit.x=9&submit.y=14&submit=Ir>>.

KALEFF, A. M. M. R. et al. Apresentação Axiomática dos Números Reais. Notas de aulas apostiladas. Niterói: GAN/UFF, 1974.

KALEFF, A. M. M. R. et al. Sólidos e superfícies de revolução. Portal do Professor/MEC. Banco Internacional de Objetos Educacionais. Experimento Educacional. Projeto Condigital MEC - MCT. Projeto CDME - UFF – Matemática. 2011a.

Disponível em: <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=31789> e <http://www.uff.br/cdme>>.

KALEFF, A. M. M. R. et al. Cônicas como curvas luminosas. Portal do Professor/MEC . Banco Internacional de Objetos Educacionais. Experimento Educacional . Projeto Condigital MEC - MCT. Projeto CDME – UFF – Matemática, 2011b.

Disponível em: <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=31785> e <http://www.uff.br/cdme/>>.

KALEFF, A. M. M. R. et al. Visualizando e modelando poliedros de mesmo volume: brincando com luzes e sombras. Portal do Professor/MEC. Experimento Educacional Banco Internacional de Objetos Educacionais. Projeto Condigital MEC - MCT. Projeto CDME - UFF – Matemática, 2011c.

Disponível em: <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=31809> e <http://www.uff.br/cdme/>>.

KAMII, C.; DE CLARK, G. Reinventando a aritmética: Implicações da Teoria de Piaget. Rio de Janeiro: Papirus, 1985.

KURTH, W. (Ed) The Complete WoodCuts of Albrecht Dürer. Nova York: Crown, 1946.

LÉNÁRT, I. Non-Euclidean Adventures on the Lénárt sphere: activities comparing planar and spherical geometry. Berkeley: Key Curriculum, 1996.

LORENZATO, S. (Org.). O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. 2. ed. Campinas, SP: Autores Associados/FNDE, 2010. (Coleção Formação de Professores).

MORMOL, S. S.; BEATO, M. P. Geometria: Metrica, Proyetiva y Sistemas de Representacion. 2. ed. Madri: SAETA, 1947. (Tomo II).

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. Normas Profissionais para o Ensino da Matemática. Trad. Associação de Professores de Matemática. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 1994.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar. Trad. do inglês. Associação de Professores de Matemática. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 1991.

PAPY, G.; PAPY, F. *Mathématique Moderne*, vol.1-6. Paris: Marcel Didier, 1970.

PSSC - Physical Science Study Series. Física. Tradução do inglês: MORAES, A. e outros. Parte 1 a 3. Edição Preliminar. Brasília: Editora da UNB, 1966.

SIQUEIRA JÚNIOR, M. M ET AL. A Novel Algorithm to Verify the Solution of Geometric Puzzle Games. In: Brazilian Symposium on Games and Digital Entertainment. 2009. Rio de Janeiro. Proceedings of the VIII Brazilian Symposium on Games and Digital Entertainment, 2009.

SIQUEIRA JÚNIOR, M. M. et al. Algoritmo para Verificação da Solução de Quebra-cabeças Geométricos. In: SBGames. 2008. Belo Horizonte. Anais do Simpósio Brasileiro de Games e Entretenimento Digital, 2008.

VAN HIELE, P. M. *Structure and Insight: a Theory of Mathematics Education*. Orlando: Academic Press, 1986.