MIGUEL CHAQUIAM

ENSAIOS TEMÁTICOS

HISTÓRIA e MATEMÁTICA

em sala de aula

MIGUELCHAQUIAM

ENSAIOS TEMÁTICOS
HISTÓRIA E MATEMÁTICA
EM SALA DE AULA

BELÉM – PARÁ
2017

1ª. Edição

Revisão de Texto: Os autores

Revisão Bibliográfica: Os autores

Texto da 4ª Capa: Natanael Freitas Cabral

Capa e **Projeto Gráfico**: Miguel Chaquiam

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Belém – Pará – Brasil

Chaquiam, Miguel
Ensaios temáticos: história e matemática em sala de aula /
Miguel Chaquiam.
Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

241 p.

Bibliografia
ISBN 978-85-98092-34-8

1. Matemática. 2. Matemática – História. 3. Matemática – Ensino.
I. Chaquiam, Miguel. II. SBEM /SBEM-PA. III. Título.

CDD 510.7

Prefácio

Recebi o convite do professor Miguel Chaquiam para escrever o prefácio deste livro com imensa satisfação. Uma satisfação revestida de grande responsabilidade tanto pelo respeito que tenho por ele como profissional habilidoso e competente que é, sobretudo, como pessoa humana, companheiro de trabalho e amigo. Uma amizade que se consolidou desde os idos anos de 1980, ainda como alunos da graduação em Matemática pelo então Centro de Estudos Superiores do Estado do Pará (CESEP). Posteriormente nos encontramos já como professores de Matemática na Escola de Ensino Médio e Fundamental Tenente Rêgo Barros (ETRB), onde desenvolvemos grande parte de nossa experiência profissional.

O professor Miguel tem doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) e uma sólida formação em Matemática pela Universidade Federal do Pará (UFPA), incluindo vasta experiência de ensino com ênfase em álgebra linear, estruturas algébricas, análise real, matemática computacional, história da matemática e história da educação matemática. Além da experiência com o ensino, nos últimos anos tem consolidado gradativamente seu espaço como pesquisador preocupado com as relações entre História da Matemática e o ensino de Matemática.

Uma das maiores preocupações que todos os pesquisadores têm ao publicar na área da Educação Matemática, em geral, é que essas produções possam ser de fato utilizadas por professores e alunos escolares. A ideia não é fazer pesquisa pela pesquisa, mas de disponibilizar materiais utilizáveis, acessíveis, viáveis que possam realmente "chegar às salas de aula" e, com isso, possibilitar interações mais interessantes entre professores e alunos no sentido de aprender os conteúdos de Matemática.

A obra fundamentalmente estrutura-se em torno de dois eixos. No primeiro discute o uso da história no ensino onde apresenta ampla argumentação com aporte em diversos autores consagrados enfatizando o contexto da História da Matemática e descreve a estruturação de um modelo que traduz seu olhar como pesquisador sobre a possibilidade da História da Matemática ser utilizada com ênfase didática para o ensino de Matemática. No segundo eixo o autor materializa o uso do seu Modelo - *Diagrama Metodológico* - exemplificando com a apresentação de textos didáticos que abordam temas da Matemática para sala de aula.

Estamos diante de um fruto do comprometimento que nasce da necessidade de se organizar didaticamente a disciplina de História da Matemática nos cursos de graduação e pós-graduação da Universidade do Estado do Pará (UEPA) e se debruça sobre o desafio de se construir um modelo estrutural que explicita uma visão histórica e crítica da Matemática ao longo da sua evolução e visualiza uma ponte com o seu ensino.

O modelo, por um lado, enfatiza a contextualização do saber matemático numa dinâmica multifacetada que pode estabelecer conexão entre a amplitude histórica da humanidade a partir da construção de um cenário mundial e as construções próprias da sala de aula norteadas por um contexto didático-pedagógico. Por outro lado, explora os conteúdos a partir da produção de um personagem matemático em destaque, sem perder a conexão, desse personagem, com seus contemporâneos sempre adotando como referencia a tríade contextualizada nos aspectos sociocultural, pluridisciplinar e técnico-cientifico.

A obra é fruto do labor de um investigador comprometido com a mudança e aprimoramento de sua prática profissional; traz uma construção inédita que passou por várias adaptações e submissão ás criticas de seus pares; pela *versatilidade de abrangência tanto prática quanto teórica* e pela visão integrada do modelo que associa a temporalidade das ações humanas nas figuras dos personagens matemáticos e seus contemporâneos, as influencias dos seus múltiplos contextos de vida e a construção/ evolução do pensamento matemático, além das preocupações metodológicas com o ensino de Matemática.

Minha expectativa, por um lado, é que a obra tenha grande aceitação no ambiente acadêmico, pois tenho certeza que o professor Miguel Chaquiam, como bem o conheço, estará sempre disposto a ouvir as críticas inerentes que todo construto humano inspira. Por outro lado, também guardo a esperança de que os professores de Matemática de carreira que se preocupam com o processo de formação continuada tenham nessa obra uma fonte viável para a produção de atividades estruturadas por esse interessante construto.

Natanael Freitas Cabral[1]

[1] Licenciado em Matemática e Doutor Ciências Humanas - Educação Brasileira - Docente da Universidade do Estado do Pará (UEPA) - Departamento de Matemática, Estatística e Informática (DMEI) - Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.

ENSAIOS TEMÁTICOS
HISTÓRIA E MATEMÁTICA
EM SALA DE AULA

MIGUEL CHAQUIAM

Ensaios Temáticos - História e Matemática em sala de aula

SUMÁRIO

PARTE I

PARTE II

Ensaios Temáticos - História e Matemática em sala de aula

PARTE I

Apresentação

Neste livro apresento resultados que considero profícuos, decorrentes da utilização do diagrama metodológico, exposto em livro inicialmente em 2015 e reestruturado em 2016, após diversas experimentações realizadas num curso de Licenciatura em Matemática e num Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.

Este livro está dividido em duas partes, sendo a primeira destinada às discussões em torno do uso da história da matemática no ensino de matemática e reapresentação do diagrama com detalhamento das partes que o constituem, acompanhada de exemplos que esclarecem o leitor quanto sua constituição. Na segunda parte são apresentados os resultados de sete experimentos, sendo dois na graduação e cinco na pós-graduação.

O texto inerente ao uso da história no ensino foi revisado e ampliado em relação ao texto publicado em 2016, visando agregar novas visões e maiores detalhes a respeito do uso da história da matemática em sala de aula. Surgem também como novidade os exemplos que acompanham os esclarecimentos de cada uma das partes do diagrama metodológico e tem por objetivo nortear o trabalho daqueles que desejarem elaborar textos envolvendo história e matemática tomando por base o modelo proposto. Os exemplos apresentados na Parte I estão diretamente relacionados com os textos apresentados na Parte II.

Os textos apresentados na Parte II, escritos em coautoria com os alunos no primeiro semestre deste ano, versam sobre números primos, equação quadrática, conjuntos, grandezas comensuráveis e incomensuráveis, análise combinatória, trigonometria e geometrias euclidiana e não-euclidiana. Visando facilitar o entendimento do diagrama metodológico, indico ao longo da primeira parte as páginas subsequentes onde é possível localizar nos textos os recortes tomados como exemplo.

As experimentações apontam que o diagrama metodológico pode ser um importante elemento balizador para os alunos escreverem um texto que relaciona história e matemática a partir da eleição de tema/conteúdo matemático e da constituição dos elementos que o compõe.

O diagrama, uma vez constituído, pode contribuir para um melhor entendimento do desenvolvimento do tema/conteúdo matemático selecionado, bem como, possibilitar melhor localização em tempo e espaço a partir da integração dos elementos que compõem os contextos, técnico-científico, pluridisciplinar e sociocultural e avivar as correlações entre história e matemática, que de um modo geral são tratadas separadamente.

A composição do diagrama tem se configurado inicialmente como um esplêndido exercício de pesquisa por parte dos alunos, uma vez que são instruídos a coletar as informações necessárias em diversos contextos, visto que a maior parte da bibliografia existente não aborda a história da matemática por tema/conteúdo ou associa fatos da história geral.

Por outro lado, as dificuldades enfrentadas pelos alunos para compor os diversos elementos do diagrama tem contribuído no sentido de valorizar a disciplina História da Matemática, um tanto quanto relegada a um segundo plano face outras disciplinas que tratam de conteúdos matemáticos específicos. Além disso, é possível observar no decorrer das pesquisas que os alunos passam a dar maior importância à História da Matemática, bem como às possibilidades de sua utilização em sala de aula.

Por fim, a composição de um texto que envolve história e matemática a partir do diagrama num contexto didático-pedagógico, com possibilidades de utilização em sala de aula, tem se tornado um admirável exercício de composição textual, visto que há necessidade de articular e amoldar diferentes conjunturas e conteúdos num mesmo texto, frente aversão à escrita manifestada pela maioria dos participantes.

Ressalto que resultados oriundos de discussões no Grupo de Pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (GHEMAZ), implantado em 2016, contribuíram à consolidação do modelo sugerido.

O uso da história no ensino de Matemática

A base dos escritos a seguir foi publicada inicialmente no livro *História nas aulas de Matemática*: *fundamentos e sugestões didáticas para professores* (2016), entretanto, foram inseridos outras visões a respeito do uso da história no ensino, em particular, no ensino de Matemática, com vistas a proporcionar ao leitor um conjunto mais amplo de opiniões quanto as possibilidades de uso da história no ensino.

Os exemplos incorporados ao longo desta primeira parte têm por objetivo esclarecer o leitor quanto a constituição dos diversos contextos e elementos que compõem o diagrama. Os destaques exemplificados podem ser observados na segunda parte, ao longo dos textos, antes da leitura destes, em função da indicação das páginas que se encontram.

É bem verdade que nos encontramos num mundo em que grande parte dele é resultante de forças naturais desde tempo muito remoto, entretanto, somente a partir de alguns poucos milhares de anos que aceitamos o fato de que a raça humana passou a ser capaz de modificar em profundidade a realidade ambiental, social, cultural e científica, ou seja, "fazer história" e, mais recentemente, procurar entender o sentido de tais ações e refletir sobre a realidade instável na qual estamos imersos.

Nas últimas cinco décadas observa-se um crescente desenvolvimento de pesquisas relacionadas à História das Ciências e, em particular, a História da Matemática, que estão se constituindo um valioso elemento para a melhoria do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, nas diferentes áreas e nos diversos níveis, o que permite compreender as origens das ideias que deram forma à nossa cultura, observar os diversos aspectos de seu desenvolvimento e perceber que as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes resultaram de desafios enfrentados com grandes esforços e, em grande parte, numa ordem bem diferente daquela apresentada após todo o processo de formalização.

Pesquisas atuais indicam que a inserção de fatos do passado pode ser uma dinâmica bastante interessante para introduzir um determinado conteúdo matemático em sala de aula, tendo em vista que o aluno pode reconhecer a Matemática como uma criação humana que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano, conhecer as preocupações dos vários povos em diferentes momentos e estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente.

Concordamos com Weinberg (2015) quando afirma que a pesquisa hoje é amparada e alumiada pelo conhecimento de seu passado é pode contribuir para o sucesso no desenvolvimento do trabalho no presente ou infortúnios pelo seu desconhecimento.

Neste sentido, os estudos apontam que a história da matemática, combinada com outros recursos didáticos e metodológicos, pode contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática, emerge como uma possibilidade de buscar uma nova forma de ver e entender a Matemática, tornando-a mais contextualizada, mais integrada às outras disciplinas, mais agradável, mais criativa, mais humanizada.

De acordo com Lopes & Ferreira (2013), a História da Matemática vem se consolidando como área de conhecimento e investigação em Educação Matemática ao longo dos últimos trinta e cinco anos. As pesquisas desenvolvidas nessa área apontam um maior interesse por parte de professores e alunos e nos mostram que a aprendizagem matemática está intimamente ligada à motivação e interesse dos alunos por essa ciência.

Lopes & Ferreira (2013), apontam que a história da matemática pode tornar as aulas mais dinâmicas e interessantes, que é possível mostrar o porquê de estudar determinados conteúdos e que o professor pode construir um olhar crítico sobre o assunto em pauta.

Por outro lado, é muito comum ouvir de alunos e professores que a História da Matemática pouco contribui para a compreensão da própria

Matemática, de um modo geral, é um desperdício de tempo e esforço. Em Vianna (1998) encontramos a lista de objeções levantadas por diversos autores contra a utilização da história da matemática como recurso didático, estas sintetizam de certa forma as demais:

> i. O passado da matemática não é significativo para a compreensão da matemática atual;
> ii. Não há literatura disponível para uso dos professores de Primeiro e Segundo Graus;
> iii. Os poucos textos existentes destacam os resultados, mas nada revelam sobre a forma como se chegou a esses resultados;
> iv. O caminho histórico é mais árduo para os estudantes que o caminho lógico e
> v. O tempo dispendido no estudo da História da Matemática deveria ser utilizado para aprender mais matemática.
>
> (VIANNA, 1998, p. 3)

Além disso, quando Miguel (1997) discute as potencialidades pedagógicas da história da matemática e apresenta como argumentos questionadores a ausência de literatura adequada e a natureza imprópria da literatura disponível sobre história da matemática, argumentos esses que podem se tornar entraves tanto na utilização da história da matemática de forma didática ou quanto a elaboração de um texto baseado no modelo ora proposto.

Embora esses argumentos tenham sido apresentados acerca de duas décadas e também considerando os esforços empreendidos pela comunidade acadêmica no sentido de apresentar resultados de novas investigações, observa-se que os argumentos acima ainda se mantêm de certa forma como obstáculos às iniciativas pedagógicas do uso da história da matemática em sala de aula.

Para contrapor as objeções acima, Vianna (1998) apresenta a favor do uso didático da história da matemática parte da conferência proferida por André Weil (1906 – 1998) no Congresso de Matemáticos de Helsinki, em 1978, e Dirk Jan Struik (1894 – 2000) que, em resumo, defendem que o estudo da História da Matemática pode contribuir para:

> i. Satisfazer nosso desejo de saber como os conceitos da matemática se originaram e desenvolveram;
> ii. O ensino e a pesquisa mediante o estudo dos autores clássicos, o que vem a ser uma satisfação em si mesmo;
> iii. Entendermos nossa herança cultural através das relações da matemática com as outras ciências, em particular a física e a astronomia; e também com as artes, a religião, a filosofia e as técnicas artesanais;
> iv. O encontro entre o especialista em Matemática e profissionais de outras áreas científicas;
> v. Oferecer um pano de fundo para a compreensão das tendências da educação matemática no passado e no presente e
> vi. Ilustrar e tornar mais interessantes o ensino da matemática.
>
> (VIANNA, 1998, p. 8)

Para corroborar com o uso da história da matemática em sala de aula, reconhecer a Matemática como uma criação humana e conectar a Matemática as atividades humanas, citamos D'Ambrosio (1999):

> As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber.
>
> (D'AMBROSIO, 1999, p. 97)

Sobre a formação do licenciado, concordamos com Ponte (2000) quando afirma que a formação inicial deve ser pautada por uma sólida formação ética, cultural, pessoal e social, além deste ter:

> [...] de trabalhar segundo metodologias de ensino e de aprendizagem diversificadas, de modo a desenvolver uma variedade de conhecimentos, de capacidades, de atitudes e de

> valores. Esta exposição a diferentes métodos também funciona como um mecanismo de aprendizagem.
>
> (PONTE, 2000, p. 15)

Para Miguel e Brito (1996) a história pode possibilitar que o futuro professor perceba que a matemática modifica-se através dos tempos devido interferência de outros setores do conhecimento humano, da cultura e da técnica, e também que:

> A história poderia auxiliar os futuros professores a perceber que o movimento de abstração e generalização crescentes por que passam muitos conceitos e teorias em matemática não se deve, exclusivamente, a razões de ordem lógica, mas à interferência de outros discursos na constituição e no desenvolvimento do discurso matemático.
>
> (MIGUEL e BRITO, 1996, p.4)

Sobre o uso da história da matemática em sala de aula, Schubring (1997, p. 157) aponta que na introdução de elementos históricos na sala de aula por meio dos textos originais ou de biografias de matemáticos ilustres estamos fazendo uma abordagem direta da história da matemática em sala de aula. Nesse tipo de abordagem a descoberta dos conceitos é apresentada em toda a sua extensão e a legitimação para seu uso é baseada nas possibilidades de aumentar o interesse dos alunos e motivá-los para o estudo da Matemática. Por outro lado, a abordagem indireta envolve a apresentação de uma análise da gênese dos problemas, dos fatos e das demonstrações envolvidos no momento decisivo dessa gênese.

Ainda de acordo com Schubring (1997, p. 58), a abordagem indireta na formação de professores favorece a constituição de um meta-saber capaz de contribuir para uma melhor orientação dos processos pedagógicos. Além disso, pode servir como base para a compreensão do desenvolvimento da matemática não como uma concepção continuísta e cumulativa, mas com fases alternadas de continuidade e rupturas.

Concordamos com Mendes (2013, p. 68) quando afirma que o uso da história da matemática em sala de aula transcende o uso de narrativas que retratam nomes, datas e locais, e que em grande parte se encontram desvinculadas dos conteúdos matemáticos abordados em sala de aula ou das ideias produzidas para explicar determinados contextos, sejam sociais, culturais ou internos a própria Matemática.

Tendo-se em vista a formação didática e conceitual do professor, Mendes (2013) salienta que a história da matemática:

> Serve para dar suporte para a disciplina de formação conceitual e epistemológica na licenciatura em matemática e tem como característica a sua organização sob três enfoques: história dos tópicos matemáticos; história da Matemática e história da Educação Matemática.
>
> (MENDES, 2013, p. 70)

Refletindo sobre os debates que argumentam favoravelmente ou contra o uso da história da matemática no ensino de matemática, sobre qual matemática deve ser ensinada ou constar nos livros textos e também sobre as diferentes concepções sobre como a história pode servir ao ensino, concordamos com Roque (2014) quando afirma que:

> A história da matemática ajudaria os estudantes a adquirirem um sentido de diversidade, sendo o reconhecimento de diferentes contextos e necessidades um importante componente na elaboração do corpo de conhecimentos que chamamos matemática.
>
> (ROQUE, 2014, p. 169)

Diversos historiadores, matemáticos e educadores apontam vantagens na inserção de conteúdos históricos no ensino tendo em vista a melhoria do aprendizado de conceitos e ideias, além de contribuir para a formação geral do indivíduo. Por outro lado, Moura e Silva (2014, p. 337) nos mostram uma contradição por parte dos professores, ou seja, embora estes reconheçam a importância de conteúdos históricos para o ensino de conteúdos científicos, tratam a história como um apêndice ao ensino e não estão dispostos a sair do conforto das abordagens tradicionais do conteúdo específico e enveredar por novos caminhos.

Uma abordagem bastante interessante apresentada por Moura e Silva (2014, pp. 337-338), resultado da tese de doutoramento de Moura em 2012, envolve uma Abordagem Multicontextual da História da Ciência (AMHIC) para o ensino de conteúdos históricos na formação de professores, proposta baseada na contextualização de conteúdos históricos, sob o viés teórico de uma formação crítico-transformadora de professores, aonde os episódios históricos são estudados a partir da contextualização e por meio dos contextos científico, metacientífico e pedagógico.

Segundos os proponentes da AMHIC, os resultados da aplicação de uma abordagem constituída pelos episódios históricos trabalhados a partir de um viés problematizador e os contextos de análise acendeu soluções admissíveis para o problema de *como fazer* e minimizar a lacuna entre o conteúdo histórico ensinado durante a formação do professor e o que ele de fato ensina e mobiliza no cotidiano escolar.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, no contexto da educação brasileira, apontam que as abordagens devem incluir aspectos sociais, culturais e históricos no ensino, observado as respectivas habilidades e competências desejáveis no desenvolvimento da formação dos estudantes, em particular, no ensino de matemática.

Neste sentido, os PCN's apontam que a História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem, estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, criar condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento.

Os argumentos favoráveis apresentados nos estimulam à continuidade das investigações, bem como, o desenvolvimento de novas ações na busca de preencher as lacunas existentes, esclarecer fatos históricos, como dosar a abordagem geométrica, mais utilizada na resolução de problemas no passado, e a algébrica, mais atual, e dá sentido à sua utilização em tempos tecnológicos, principalmente às pessoas que trazem uma visão constituída da Matemática impregnada de crenças e convicções.

Nesses diversos cenários encontramos razões para fazer uso da história da matemática como um recurso didático no ensino de conteúdos matemáticos e, mais, propor um diagrama metodológico para subsidiar a elaboração de um texto que envolve história e conteúdos da matemática para uso em sala de aula e na formação de professores.

Alternativas iniciais no ensino de história da matemática

Quando concordei com a designação do Departamento de Matemática para ministrar História da Matemática no curso de Licenciatura em Matemática, decidi que deveria aprofundar os estudos e instruir mais sobre a História da Matemática e pesquisa em História, embora o curso fosse voltado para alunos da graduação que pouco ou quase nenhum embasamento sobre história matemática, ciências ou pesquisa em história. Além disso, como fazê-los enfrentar leituras que nos revelam uma realidade bem diferente daquela com que estão acostumados a lidar nos livros didáticos de matemática.

Entendo que até a metade do curso de licenciatura os alunos ainda não possuem cabedal de conhecimentos matemáticos que possam dar suporte ao entendimento do desenvolvimento de certos conteúdos matemáticos, portanto, neste sentido, concordo que a disciplina História da Matemática deve ser ministrada nos últimos três semestres do curso, pois, caso contrário, pode ter seu desenvolvimento prejudicado pelo não entendimento da evolução dos conteúdos matemáticos por parte dos alunos. Neste sentido, a disciplina História da Matemática ministrada ao final do curso pode, além de viabilizar a retomada e consolidação dos conteúdos matemáticos, propiciar reflexão sobre a importância do seu uso como recurso didático.

Os questionamentos iniciais surgiram quanto ao desenvolvimento da disciplina História da Matemática depois de uma tentativa de desenvolvê-la por meio de seminários que contemplassem tópicos da matemática, com ênfase aos séculos XVII, XVIII e XIX, e temas que pudessem promover discussões em torno de personagens ou a respeito do desenvolvimento dos conteúdos matemáticos.

As apresentações dos seminários, de um modo geral, constituíram-se basicamente nas leituras de textos obtidos em livros ou artigos e, principalmente, informações obtidas na internet. Além disso, ficou bem demarcado que a maioria dos alunos procurou destacar os conteúdos matemáticos, principalmente às demonstrações, nomes e datas. Uma avaliação um pouco mais criteriosa nos aponta que a disciplina não foi desenvolvida de forma satisfatória de modo a fomentar o surgimento de debates em torno das origens, evolução e formalização dos conteúdos matemáticos, mesmo assim, considero os resultados finais satisfatórios para um primeiro curso de História da Matemática baseado em seminários.

No ano seguinte mudei a metodologia e iniciei a disciplina com debates sobre como a História de Matemática pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos, seguido da análise de livros didáticos do ensino fundamental e médio quanto ao uso da história da matemática como estratégia facilitadora no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Na sequência, houve um primeiro esboço do uso da história da matemática como recurso didático por parte dos alunos durante a apresentação de aulas envolvendo história e conteúdos matemáticos e, por fim, novos seminários envolvendo personagens pré-selecionados que contribuíram para o desenvolvimento da matemática ao longo do tempo, na perspectiva da construção de uma visão histórica e crítica da matemática ao longo das várias fases de sua evolução.

A princípio, para balizar a elaboração dos textos dos seminários sobre os personagens pré-selecionados, foi estabelecido que os trabalhos escritos devessem conter: a) Nome completo do personagem/matemático e sua árvore genealógica, quando fosse possível identificar sua genealogia; b) Pseudônimo, quando fosse o caso; c) Traços biográficos e trajetória acadêmica; d) Trabalhos produzidos, com ênfase aos mais relevantes e/ou soluções de problemas relacionados ao cotidiano, internos à própria matemática ou áreas afins; e) Relação dos personagens pré-estabelecidos com outros personagens da sua época; f) Frases célebres vinculadas aos personagens pré-estabelecidos; g) Fotografias vinculadas aos personagens em tela, ou seja, fotografias de cunho pessoal, trabalhos, com outros personagens, livros, etc.; h) Curiosidades sobre os personagens ou que os envolvessem; i) Fatos históricos da humanidade referente ao período de vida dos personagens pré-estabelecidos e j) Bibliografia utilizada na pesquisa.

O texto produzido por D'Ambrosio (2000) subsidiou muitas das discussões a respeito das interfaces entre História e Matemática, principalmente em relação às seguintes questões:

> i. Para quem e para que serve a História da Matemática?
> ii. A matemática é produzida individualmente ou socialmente?
> iii. A partir de que problemas esse tema se desenvolveu?
> iv. Quais eram as forças que o impulsionavam?
> v. Por que foi essa descoberta tão importante?
> vi. O que se pode fazer de História da Matemática em sala de aula?
>
> (D'AMBROSIO, 2000)

Naquele ano não foi possível realizar a apresentação dos seminários pelos alunos por questões temporais, mas todos entregaram os textos relativos aos personagens pré-selecionados e seguiram, em boa parte, as recomendações propostas quanto ao que deveria constar nestes. Visando o aproveitamento desses textos foram produzidos vinte quadros, expostos inicialmente na Galeria de Artes Graça Landeira, na Universidade da Amazônia, no período de 01 a 07 de dezembro de 2006. Em função da boa repercussão frente aos alunos e professores que visitaram a exposição, foram confeccionados mais dezesseis quadros e, assim, criada a coleção *Trilhos da Matemática*, exposta no IX Encontro Nacional de Educação Matemática – IX ENEM, realizado em Belo Horizonte (MG), em 2007.

Essa experiência fez com que ressaltasse a possibilidade de se ministrar temas relativos a história da matemática, envolvendo conteúdos matemáticos, a princípio da educação básica, e proporcionar uma visão geral da história da matemática a partir da apresentação de personagens ou conteúdos pré-selecionados.

Após a exposição passei a desenvolver pesquisas relacionadas ao ensino e uso da história da matemática como recurso didático, tendo em vista a possibilidade de ministrar a disciplina História da Matemática a partir da apresentação de personagens pré-selecionados, tomando por base a coleção *Trilhos da Matemática*, e correlacionar conteúdos matemáticos de diversos níveis de ensino à história da matemática.

Os estudos relacionados ao uso da história da matemática como recurso didático foram intensificados a partir da aproximação com a Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), em 2007, realização do VIII Seminário Nacional de História da Matemática (VIII SNHM), em Belém do Pará, em 2009, e a coordenação dos Encontros Paraenses de Educação Matemática (EPAEM), em 2010 e 2011, este último sob a temática *Faces da História da Matemática e da Educação Matemática na Amazônia*.

Por fim, quando Lopes & Ferreira (2013) afirmam que há certa resistência quanto ao uso da história e que esta é proveniente de uma falta de experiência dos opositores nesse campo, associada à carência de um referencial para aplicação pedagógica da história em sala de aula, nos dá a sensação de que algo deve ser construído em relação a essa situação, bem como, em relação às práticas pedagógicas.

Da constituição do diagrama-modelo as primeiras derivações

Vale ressaltar que não é objetivo apresentar e discutir de forma detalhada e aprofundada indagações acerca de determinado tema ou conteúdo matemático ou sobre a história da matemática, mas, subsidiar o leitor com caminhos que possibilitem a construção de uma história, articulada ao desenvolvimento histórico dos conteúdos matemáticos, bem como a demarcação de tempo e espaço na história da humanidade para extrapolar a visão internalista à matemática, tendo em vista sua utilização em sala de aula durante o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos, principalmente na Educação Básica, e formação de professores.

Uma das preocupações durante a construção do diagrama foi de evitar que a história da matemática fosse constituída apenas como ilustração, presa a fatos isolados, nomes célebres, datas ou fatos pitorescos, além disso, evitar também histórias fantasiosas que vinculam o conhecimento matemático a um grupo de pessoas consideradas por uma grande maioria como "iluminadas".

Baseado em Freudenthal, D'Ambrosio (2013) nos alerta para o perigo de se fazer uma história anedotária, entretanto, afirma que "é possível fazer uma história da matemática contextualizada, interessante e atrativa, evitando todas essas distorções".

Antes de tudo, devemos ter em mente que escrever história é gerar um passado, circunscrevê-lo, organizar material heterogêneo dos fatos para construir no presente uma razão. Neste sentido, deve-se observar com muita atenção qual o espaço que será "recomposto", tendo em vista o ocorrido e os perigos do imaginado, que as articulações em torno dos recortes cronológicos podem gerar distorções, além da preocupação com a linguagem no sentido de retratar o passado na modernidade de forma contextualizada e significativa. O difícil é encontrar respostas para a seguinte pergunta: Como proporcionar uma visão histórica e crítica da Matemática ao longo das várias fases de sua evolução?

A partir de 2012, tomando por base as pesquisas efetuadas e a experiência decorrente do desenvolvimento das aulas da disciplina História da Matemática no curso de licenciatura em Matemática, decidi ministrar parte dos conteúdos relacionados a essa disciplina a partir de personagens/matemáticos pré-selecionados, correlacionando traços biográficos, seus contemporâneos, trabalhos produzidos e as principais contribuições à Matemática ou à Ciência.

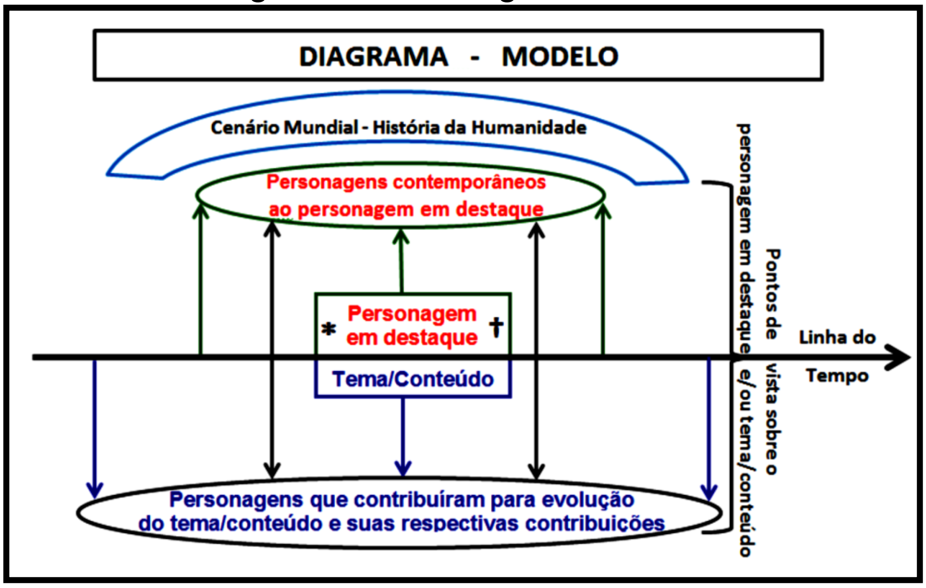
No XI ENEM de 2013 apresento durante a participação na mesa *Propostas práticas de uso didático da História da Matemática na Educação Básica*, junto com os professores Iran Abreu Mendes (Coordenador) e Ligia Arantes Sad (expositora), a primeira versão do diagrama e proponho o ensino de conteúdos matemáticos e de história da matemática a partir de personagens/matemáticos. Destaco a importância de se efetuar a priori estudo detalhado a respeito do personagem/matemático eleito com objetivo de identificar as interações, tanto do ponto de vista dos conteúdos matemáticos quando as relações com outros personagens/matemáticos, bem como, a construção de um esquema primário para identificar inicialmente quais aspectos serão abordados/aprofundados para evitar uma abordagem superficial dos conteúdos matemáticos ou da história da matemática, além do cuidado em não exagerar na quantidade de correlações para não desvirtuar do foco principal.

O diagrama apresentado no referido evento trazia como personagem principal Leonhard Euler, associado ao problema das Pontes de Königsberg, alguns matemáticos contemporâneos a Euler de forma não muito explícita, como tema/conteúdo matemático "a evolução do conceito de função" e, para complementar tudo isso, os pontos de vista de Guilherme de La Penha (1942 - 1996) e José Maria Filardo Bassalo (1935).

Essa proposta foi experimentada e modificada visando clarificar elementos que tornavam a pesquisa mais abstrusa para os alunos e a inserção de um tema/conteúdo previsto para ser ministrado em sala de aula. Após a incorporação das modificações e novas experimentações com alunos do curso de licenciatura em Matemática, pretende-se elaborar um texto envolvendo tópicos da história da matemática correlacionados a evolução de conteúdos matemáticos a partir da escolha de um conteúdo/tema e eleição de um personagem associado a esse conteúdo/tema, tendo base um diagrama metodológico para orientar a escrita do texto.

Após novas experimentações e recomposições do diagrama, apresento a seguir o modelo base do diagrama metodológico que poderá orientar a elaboração de um texto envolvendo tópicos de história da matemática associada a personagens/matemáticos e tema/conteúdos ministrados em salsa de aula, apresentado inicialmente em 2015 durante o XI Seminário Nacional de História da Matemática (XI SNHM) no livro *História da Matemática em sala de aula: proposta para integração aos conteúdos matemáticos*.

Diagrama-Metodológico I – Modelo



Fonte: Elaborado pelo autor

Torna-se necessário esclarecer as ações de recolha dos elementos a partir da eleição do tema/conteúdo matemático e a de composição do texto para utilização em sala de aula. A primeira parte para a montagem do diagrama é a constituição da evolução do desenvolvimento histórico do tema/conteúdo matemático que se deseja abordar em sala de aula e personagem a destacar, a segunda, pode ser vista como uma peça de teatro composta por vários atos, que se inicia com a localização em tempo e espaço e finaliza com uma visão geral sobre o tema/conteúdo matemático e/ou sobre o personagem em destaque. Por fim, as inserções de outros pontos de vista mais atual visam estabelecer uma relação entre o presente o passado e ressaltar uma visão sobre o tema/assunto matemático eleito ou personagem em destaque.

Ressalto que, de acordo com Bicudo & Garnica (2003), o conhecimento da história da criação e evolução de um conceito são importantes para dar significado ao texto especializado e podem contribuir para a constituição de um discurso didático-pedagógico.

É evidente que o exercício para a constituição do diagrama e a elaboração do texto baseados nesse modelo irá requerer tempo e disposição para efetuar as pesquisas necessárias de modo que, ao final, o diagrama possibilite o entendimento dos elementos abordados, tanto ao que se refere aos conteúdos matemáticos quanto aos relacionados a história da matemática e da humanidade.

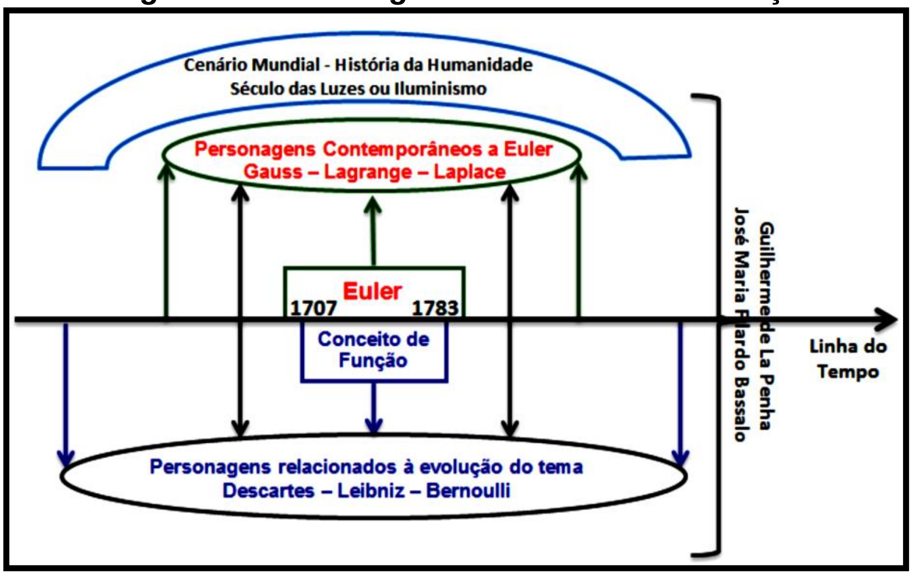
De certa forma, o texto elaborado com base no modelo apresentado pode levar o sujeito a reconstruir algumas das operações cognitivas que marcaram a construção histórica dos objetos matemáticos. Assim, esse recurso se apresenta como uma opção para superação das desordens cognitivas que possibilitam a passagem de uma etapa da construção do conhecimento para outra de nível superior.

Ressalto que nível de conhecimento histórico e matemático de quem vai adotar o diagrama-modelo, além das possibilidades de acesso à bibliografia especializada e sua visão sobre história da matemática, pode influenciar, ou até mesmo desvirtuar, da finalidade didático-pedagógico a qual se destina.

Por fim, um problema que deve ser evitado durante a composição do texto é a sobreposição do discurso técnico ao discurso didático-pedagógico, deve-se ter em vista que o texto não é especializado matematicamente e, sim, um texto no qual deve prevalecer o discurso didático-pedagógico, numa linguagem simples e clara, rico em formas de apresentação, para a comunicação do conhecimento posto, disponível e reproduzido, observado o formalismo e o rigor matemático para esclarecer terminologias, o uso correto das nomenclaturas e impedir a ocorrência de eventuais induções ao erro ou equívocos conceituais e históricos.

O modelo apresentado no XI ENEM, em 2013, foi recomposto, adequado a nova proposta, e tornou-se um exemplo de diagrama orientador, base para discussão em sala de aula e consolidação da estrutura apresentada no Diagrama-Metodológico I.

Diagrama-Metodológico II – Conceito de Função

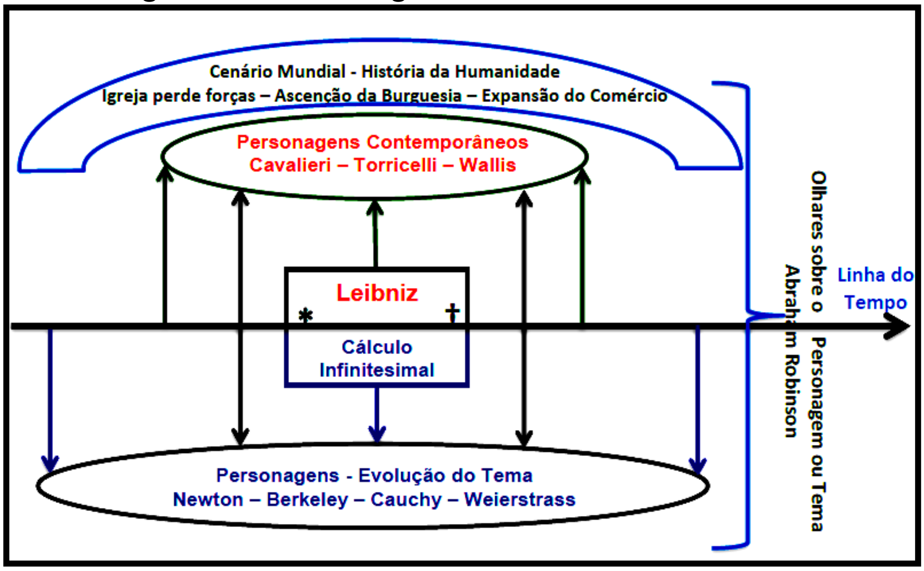


Fonte: Elaborado pelo autor

O diagrama pode ser modificado de acordo com o enfoque desejado ou em decorrência das dificuldades de se obter informações para constituição dos componentes do diagrama, por exemplo, dificuldades em obter informações que revelem pontos de vista recentes sobre o personagem em destaque ou tema/conteúdo.

O diagrama a seguir foi elaborado por uma concluinte do curso de licenciatura em Matemática em 2014, a partir do diagrama orientador I, e subsidiou a produção do texto constante no livro *História da Matemática em sala de aula: proposta para integração aos conteúdos matemáticos*. O texto dessa concluinte, dentre outros, comprovam a funcionalidade do modelo proposto, evidentemente que também devemos associar os méritos de cada aluno.

Diagrama-Metodológico III – Cálculo Infinitesimal

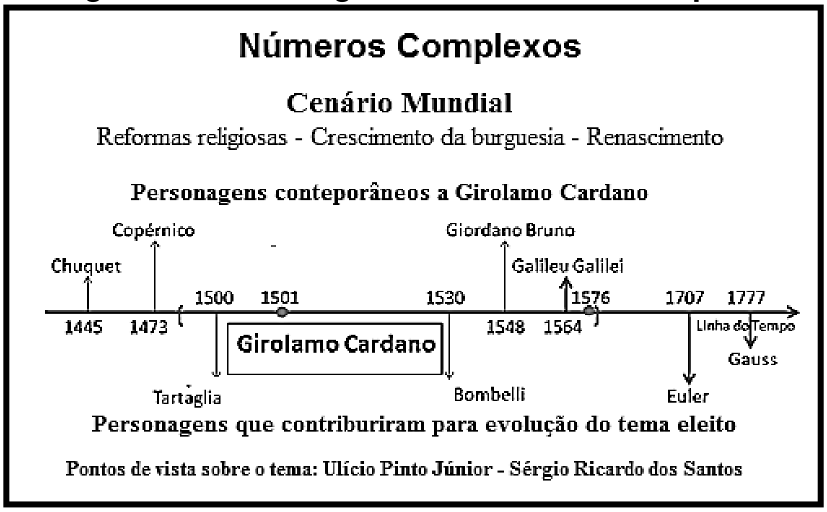


Fonte: Elaborado em coautoria com Gabriela Coêlho Rodrigues

Para corroborar com a proposta, ainda em 2015, a concluinte Cláudia G. Balbino produziu um texto minha orientação e coautoria, baseado no diagrama-metodológico inicial, inserido no livro de 2016.

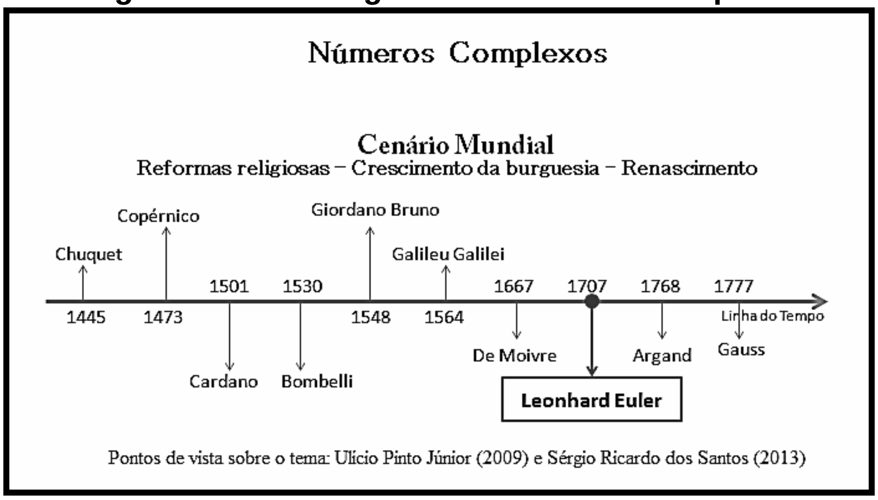
Os dois diagramas a seguir nos revelam a possibilidade de elaborar textos distintos a partir da mudança do personagem que se deseja destacar, ou seja, no primeiro diagrama é considerando Girolano Cardano e, no segundo, Leonhard Euler.

Diagrama-Metodológico IV – Números Complexos



Fonte: Elaborado em coautoria com Cláudia G. Balbino

Diagrama-Metodológico V – Números Complexos



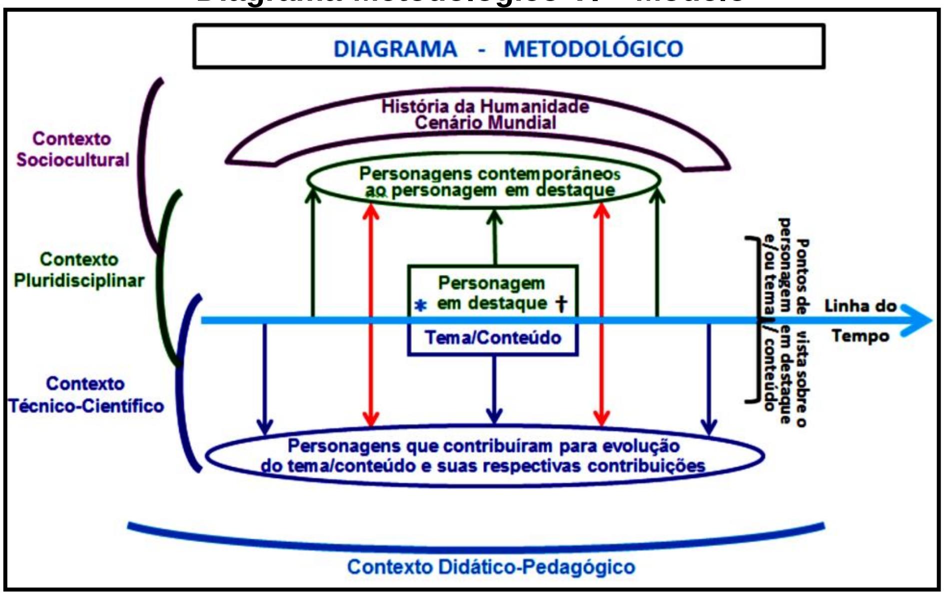
Fonte: Elaborado em coautoria com Cláudia G. Balbino

Do primeiro diagrama resultou o texto intitulado *Números "sofísticos" de Cardano*, integrado ao livro de 2016 e, do segundo, o trabalho intitulado *Uma história dos números complexos: de Nicolas Chuquet a Carl Friedrich Gauss*, apresentado no XII Seminário Nacional de História da Matemática (XII SNHM), realizado em Itajubá (MG), em 2017.

Em 2016, após apresentação e discussões a respeito do diagrama-metodológico e diagramas decorrentes deste no II Seminário Cearense de História da Matemática (II SCHM), no curso de mestrado profissional em Ensino de Matemática e no grupo de pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (GHEMAZ), adicionado minhas reflexões a respeito dos debates ocorridos, apresento a versão atualizada do diagrama-metodológico, inseridos os elementos que caracterizam os contextos: técnico-científico, pluridisciplinar, sociocultural e didático-pedagógico.

As discussões teóricas e práticas em torno de cada um dos contextos serão apresentadas oportunamente, bem como, o modelo teórico matemático associado ao proposto.

Diagrama-Metodológico VI – Modelo



Fonte: Elaborado pelo autor

Da estrutura do diagrama-metodológico a elaboração texto

Para enveredar por esse caminho torna-se necessário que se recolha, numa visão unitária do diagrama, os vários componentes que devem ser agrupados de forma a configurar àquilo que se pretende apresentar, sejam acontecimentos, personagens e/ou conteúdos matemáticos que, de certa forma, devem ser apresentados de acordo com a ordem de sucessão e linha da cronológica, sendo reservado o primeiro plano ao desenvolvimento histórico dos conteúdos e aos personagens que contribuíram para o desenvolvimento deste.

Os esclarecimentos a seguir visam elucidar o que comporta cada um dos componentes que compõem o diagrama-metodológico de modo a facilitar a obtenção dos dados, a composição do diagrama que servirá de base para elaboração do texto didático-pedagógico e o ordenamento destes no texto.

A ordem posta a seguir está em consonância com a ordem de prioridades que deve ser seguida ao longo do desenvolvimento da pesquisa, isto é, inicia-se com a escolha de um tema/conteúdo matemático; segue-se com a composição da evolução do tema/conteúdo e identificação dos personagens que contribuíram para o tema/conteúdo; eleja um dos personagens para dar destaque no texto; identifique os contemporâneos do personagem evidenciado; faça um recorte da história da humanidade para descrever o cenário mundial e, por fim, identifique historiadores/pesquisadores que emitiram pontos de vista sobre o personagem destacado ou tema/conteúdo.

Ressalto que a ordem estabelecida para obtenção dos dados para constituição do diagrama no decorrer da pesquisa não é a ordem sugerida para elaboração do texto didático-pedagógico, embora, esta seja uma decisão pessoal. As sugestões de ordenamento podem ser modificadas por diversos motivos, dentre eles, surgimento de obstáculos ao longo da pesquisa ou obtenção antecipada de elementos previstos a posteriori.

Tema/conteúdo: Eleja um tema/conteúdo matemático previsto para um dos níveis de ensino, preferencialmente Educação Básica, ao qual se pretende apresentar paralelamente ao desenvolvimento e formalização uma abordagem histórica do mesmo, seja com o intuito de introduzi-lo, para incentivar os alunos ou apresenta-lo segundo sua evolução histórica, dentre outros motivos.

Evolução do tema/conteúdo: Em função das experiências realizadas, acredito que seja parte mais complexa do processo, isto é, identificar os elementos necessários para compor a evolução do tema/conteúdo elencado inicialmente. Na grande maioria dos casos não existe uma única bibliografia que contenha o procura na ordem sequencial desejada. De um modo geral, os dados serão garimpados nas diversas bibliografias que abordam história da matemática ou, mais especificamente, história dos conteúdos matemáticos. Neste momento, é importante identificar o(s) problema(s) gerador(es), as forças que o impulsionaram ou os obstáculos que impediram sua evolução.

Ressalto novamente que na constituição deste componente se deve observar o formalismo e o rigor matemático, o uso correto das nomenclaturas e impedir a ocorrência de eventuais induções ao erro ou equívocos conceituais e históricos, no entanto, sem perder de vista que se trata de um texto didático-pedagógico num contexto técnico-científico.

Personagens que contribuíram para evolução do tema/conteúdo: É muito provável que durante o processo de constituição da evolução do tema/conteúdo matemático se consiga identificar os personagens/matemáticos que contribuíram para evolução e/ou formalização deste, enfatizando sua contribuição.

Escolha do personagem/matemático que será evidenciado: Dentre os personagens/matemáticos que contribuíram para a evolução e/ou formalização do tema, eleja um para ser evidenciado/destacado em relação aos demais. Durante a realização das experiências observou-se que foram estabelecidos os mais diversos critérios de escolha, neste sentido, decidiu-se inicialmente que os critérios para eleição do personagem ficam ao encargo de cada um.

Eleito o personagem/matemático, construa um perfil deste de modo a contemplar minimamente os seguintes itens: a) Nome completo e pseudônimo, quando for o caso; b) Constituição da árvore genealógica, quando for possível identificar os familiares ascendentes ou descendentes; c) Traços biográficos para além do acadêmico e profissional; d) Trabalhos produzidos, dando ênfase aos mais importantes e/ou soluções de importantes problemas; f) Frases célebres vinculadas ao eleito; g) Fotografias pessoais e de familiares, de livros e trabalhos de sua autoria ou em coautoria, com outras pessoas, dentre outras; h) Curiosidades, fatos pitorescos ou anedotas.

Personagens contemporâneos ao personagem evidenciado: Identifique personagens/matemáticos contemporâneos ao personagem/matemático destacado. Apresente um resumo biográfico destes e suas contribuições para os diversos campos do conhecimento, em especial, para o desenvolvimento das ciências, em particular da Matemática. Estes personagens contemporâneos podem ter contribuído, ou não, na mesma área do personagem eleito. Sugere-se que sejam identificados personagens contemporâneos nas mais diversas áreas do conhecimento para uma melhor localização em tempo e espaço, além de proporcionar uma visão contextual pluridisciplinar.

História da Humanidade / Cenário Mundial: Um dos objetivos deste componente é delimitar em tempo e espaço o personagem principal e seus contemporâneos. Deve-se caracterizar o cenário mundial da época do personagem principal tendo em vista à vinculação da história da matemática a história da humanidade e identificar as forças que o impulsionaram ou geraram obstáculos para o desenvolvimento do tema/ conteúdo eleito inicialmente, de modo a constituir um contexto sociocultural.

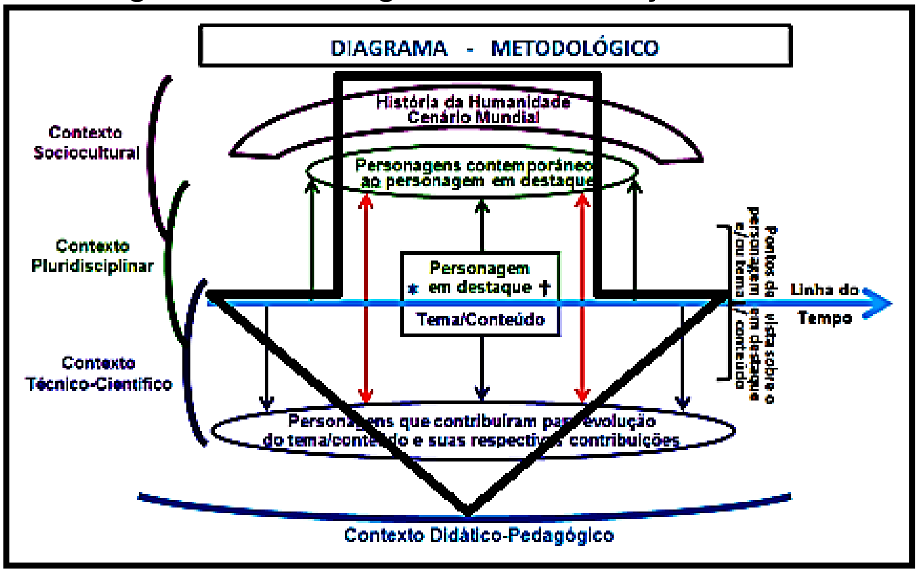
Pontos de vista sobre o personagem em destaque ou tema: Considerando que não é nosso objetivo investigar, analisar ou tirar conclusões sobre o personagem principal ou tema, recomendamos que sejam empregados esforços no sentido de identificar historiadores/pesquisadores que fizeram leituras e interpretações sobre o personagem principal ou tema abordado e apresentaram seus pontos de vista. Esse complemento enriquecerá o trabalho, proporcionará questões para debates e proporcionará diferentes visões e/ou interpretações a respeito do personagem principal e/ou do tema, podendo gerar novas pesquisas para maiores esclarecimentos.

Considerando que o texto a ser elaborado a partir do diagrama-metodológico tem dentre seus objetivos vincular à história da humanidade a história da matemática e aos conteúdos matemáticos, destacar os personagens/matemáticos com suas respectivas contribuições para o tema, gerar um contexto didático-pedagógico para uso em sala de aula, propor um único caminho se constituiria em desprezar todas as diversidades e peculiaridades que permeiam a sala de aula, dentre elas, as culturais, sociais, econômicas, tecnológicas e cognitivas.

Embora existam diversas possibilidades de composição do texto e tendo em vista sua função didático-pedagógica, proponho que o mesmo seja desenvolvido na seguinte ordem: a) História da humanidade/cenário mundial; b) Apresentação dos personagens contemporâneos ao principal; c) O personagem principal, exceto suas contribuições para o tema/conteúdo; d) Evolução do tema e os respectivos personagens que contribuíram para evolução do mesmo e, por fim, apresentação dos pontos de vista atual de historiadores/pesquisadores sobre o tema/conteúdo ou personagem principal.

A seta em destaque indica o caminho a ser percorrido na elaboração do texto.

Diagrama-Metodológico VII – Elaboração do Texto



Fonte: Elaborado pelo autor

Essa ordem pode proporcionar uma visão geral que se inicia dentro de um contexto sociocultural, perpassa por um contexto pluridisciplinar e finaliza dentro de um contexto técnico-científico, com localização em tempo e espaço do personagem principal e evolução do conteúdo matemático.

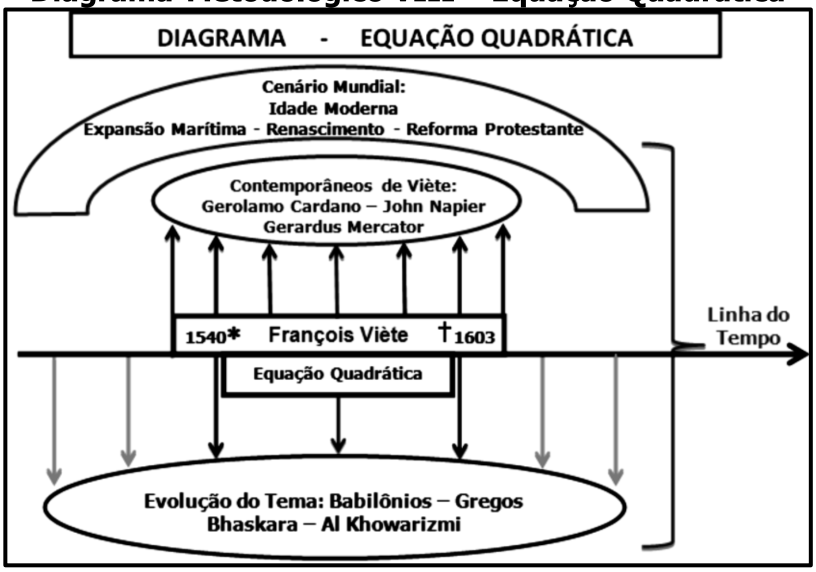
Exemplos de diagramas baseados no modelo proposto

Os exemplos a seguir foram elaborados em 2017 por alunos da pós-graduação durante o desenvolvimento da disciplina Tópicos História da Matemática, final do curso mestrado profissional em Ensino de matemática da Universidade do Estado do Pará, sob minha orientação e coautoria, a partir do diagrama-metodológico ora proposto. Estes são exemplos, dentre outros, que pode auxiliar na corroboração de outros textos a partir do diagrama-metodológico proposto.

Os diagramas dos textos apresentados integralmente na Parte II estão sendo antecipados de modo a proporcionar ao leitor uma familiarização com o modelo ora proposto e observar os parâmetros utilizados na constituição destes.

O diagrama abaixo serviu de orientação para elaboração do texto *Equação Quadrática: recorte da história das equações*, iniciado na página 47. O leitor pode observar que o tema "Equação Quadrática" percorreu os povos na Babilônia e Grécia, passando por Bhaskara e Al Khowarizmi, sendo dado maior atenção francês Françoies Viète em função das suas contribuições matemáticas ao tema.

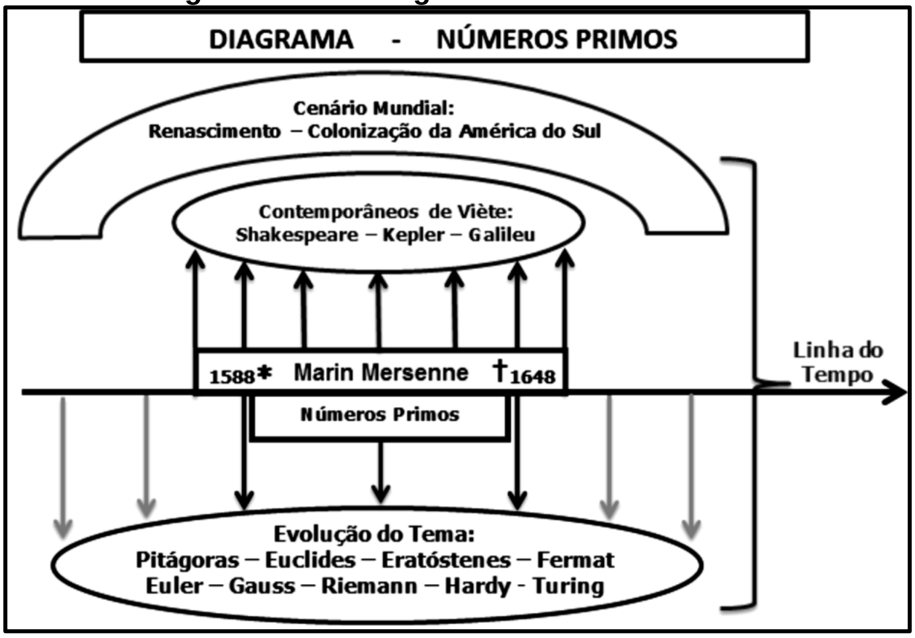
Diagrama-Metodológico VIII – Equação Quadrática



Fonte: Adaptado de Chaquiam (2016)

O diagrama a seguir orientou a produção do texto referente *Números Primos: uma história dos números*, iniciado na página 61. Os autores percorreram caminhos em torno dos "Números Primos" a partir de Pitágoras até Alan Turing e escolheram Marin Mersenne para aprofundar seus estudos.

Diagrama-Metodológico IX – Números Primos

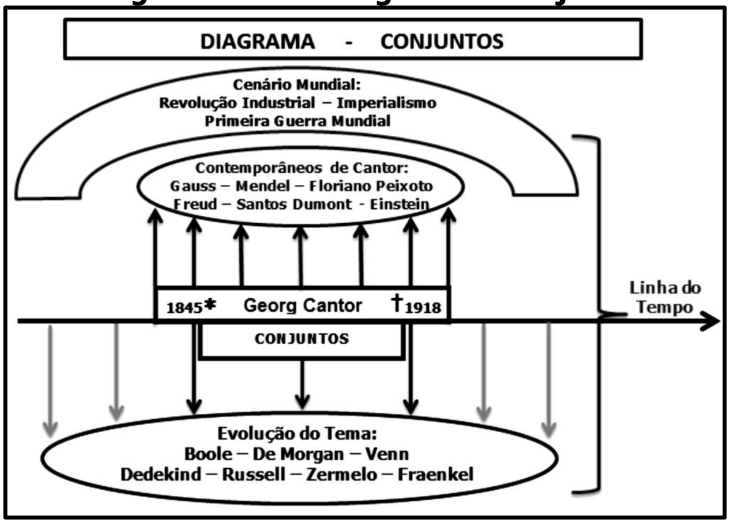


Fonte: Adaptado de Chaquiam (2016)

O diagrama-metodológico X foi elaborado em torno dos conjuntos e gerou um texto, iniciado na página 81, que aborda os conteúdos matemáticos relacionados ao tema a partir de Boole até Fraenkel, com destaque para Georg Cantor. Observa-se que os autores apresentam seis contemporâneos de George Cantor, incluindo os brasileiros Santos Dumont e Floriano Peixoto para caracterizar-nos melhor em tempo e espaço.

Para caracterizar o cenário que compreende a período de vida de Cantor e de seus contemporâneos, os autores optaram em registrar acontecimentos relacionados a revolução industrial, imperialismo e primeira guerra mundial. Quando se observa o texto "*Conjuntos: sobre a história de sua evolução*", nota-se que ainda há necessidade de uma melhor integração entre os fatos da história geral com os da história da matemática e seus personagens, entretanto, ressalta-se que ainda nos encontramos em processo (re)estruturação do diagrama.

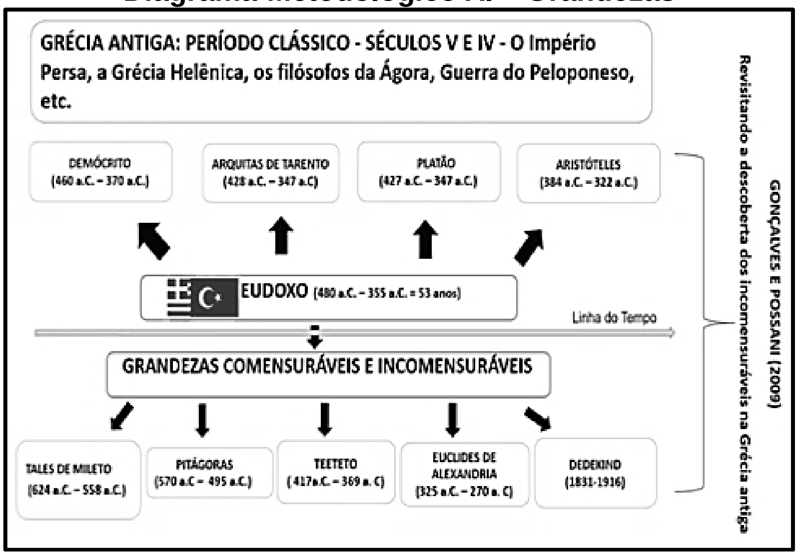
Diagrama-Metodológico X – Conjuntos



Fonte: Adaptado de Chaquiam (2016)

Os demais diagramas utilizados nos texto apresentados na Parte II deste livro estão apresentados na sequência deste, sendo dois deles constituídos de forma diferenciada.

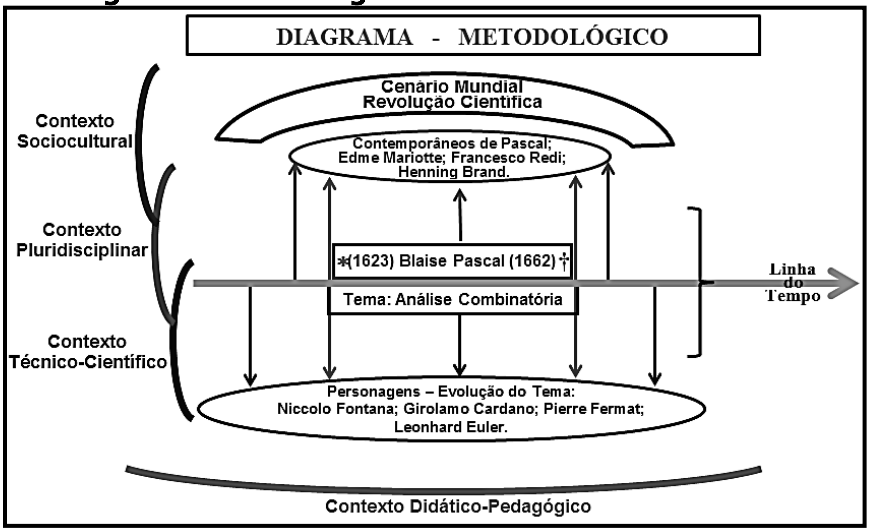
Diagrama-Metodológico XI – Grandezas



Fonte: Adaptado de Chaquiam (2016)

O diagrama-metodológico XII orientou a elaboração do texto referente *Análise Combinatória: história para sala de aula*, iniciado na página 133. Os autores percorreram caminhos a partir de Nicolo Fontana até Leonhard Euler e escolheram o personagem Blaise Pascal para apresentar com mais detalhes seus traços biográficos, incluso a produção intelectual.

Diagrama-metodológico XII – Análise Combinatória

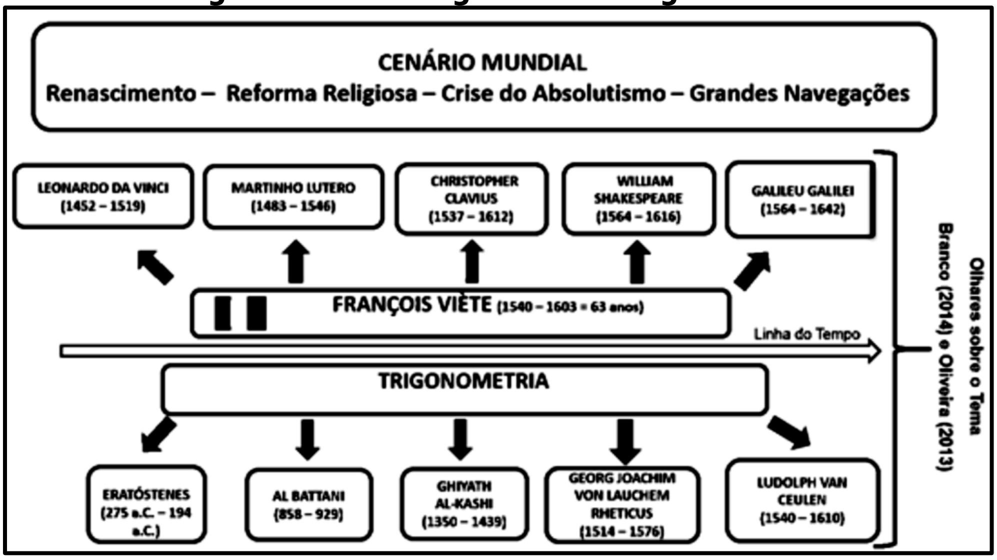


Fonte: Adaptado de Chaquiam (2016)

O texto intitulado *Trigonometria: recortes da história da sua evolução*, iniciado na página 147, originou-se a partir do diagrama-metodológico XIII. Observa-se neste que o personagem principal escolhido foi Françoies Viète, isso demonstra que um mesmo personagem pode fazer parte de mais de um tema, inclusive sendo o destacado.

Os contemporâneos apresentados são de outras áreas do conhecimento científico, artístico, cultural ou social, além disso, integram a história geral a partir de fatos relacionados ao renascimento, reforma religiosa, crise do absolutismo e grandes navegações.

Diagrama-Metodológico XIII – Trigonometria



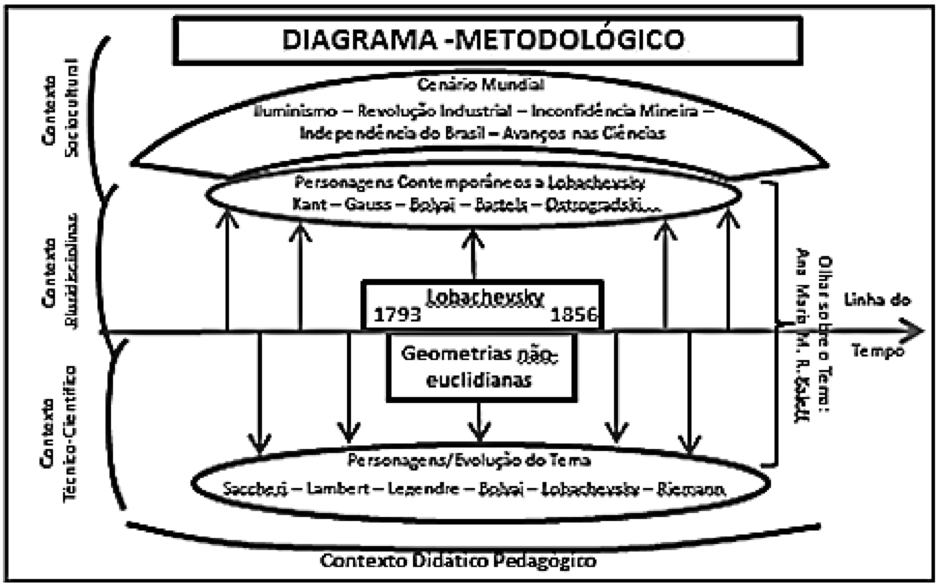
Fonte: Adaptado de Chaquiam (2016)

O diagrama-metodológico XIV foi elaborado em torno da geometria euclidiana e não-euclidiana, que subsidiaram o texto *Geometrias Euclidiana e Não-Euclidianas: composição histórica*, iniciado na página 175, que destaca o matemático Lobachevski, seus contemporâneos Kant, Gaus e Bolay, dentre outros, para caracterizar outros acontecimentos a partir desses personagens.

Para caracterizar o cenário que compreende a período de vida de Lobachevski e de seus contemporâneos foram retratados fatos relacionados ao Iluminismo e revolução industrial, no Brasil, apresentam episódios relacionados a inconfidência mineira e a independência do Brasil.

Este último texto é o mais extenso e denso dentre os aqui apresentados, nos mostra quanto é possível entrelaçar história geral e história da matemática de tal modo que possamos nos situar melhor em tempo e espaço, tanto a partir de personagens quanto da indicação de fatos da história geral, entretanto, ainda há rupturas textuais na apresentação dos conteúdos matemáticos nos trabalhos apresentados.

Diagrama-Metodológico XIV – Geometrias



Fonte: Adaptado de Chaquiam (2016)

As discussões apontam a necessidade de inserir elementos dentro do contesto didático-pedagógico que proporcionem a exploração do texto apresentado, principalmente no que tange a evolução dos conteúdos matemáticos.

PARTE II

Ensaios Temáticos - História e Matemática em sala de aula

Das primeiras empirias aos resultados atuais

É importante ressaltar que a primeira versão do diagrama foi publicada no livro *História da matemática em sala de aula: proposta para integração aos conteúdos matemáticos*, integrante da Série História da Matemática para o Ensino, volume 10, durante um minicurso ministrado no XI Seminário Nacional de História da Matemática (XI SNHM), em 2015, com o mesmo título. Neste livro apresento um resultado das primeiras aplicações do referido diagrama em três turmas do curso de Licenciatura em Matemática em 2014, cujo texto aborda *O cálculo infinitesimal de Gottfried Leibniz*, elaborado em coautoria com a Gabriela Coêlho Rodrigues.

Em 2016 publiquei em coautoria com o professor Iran Abreu Mendes o livro *História nas aulas de Matemática*: *fundamentos e sugestões didáticas para professores*, durante o XII Encontro Nacional de Educação Matemática (XI ENEM). Neste livro, dividido em duas partes, apresento na segunda parte detalhes o diagrama metodológico sob o título de *Um diagrama, um texto*. Nessa parte insiro outro experimento, resultado da aplicação do diagrama em outras três turmas do curso de Licenciatura em Matemática, em 2015, que aborda o tema *Números "sofísticos" de Cardano*, produzido em coautoria com antiga aluna Cláudia G. Balbino.

Em 2017, durante o XII Seminário Nacional de História da Matemática (XII SNHM), realizado em Itajubá (MG), reapresento como parte da mesa *Caminhos para utilização da História da Matemática na Educação Matemática*, o diagrama e alguns resultados sob o tema *História da matemática nas aulas de matemática: uma proposta para professores* e, na forma de comunicação científica, dois textos elaborados com base no referido diagrama, *Uma história dos números complexos: de Nicolas Chuquet a Carl Friedrich Gauss*, em coautoria com Cláudia Gonçalves Balbino, e *Uma história do conceito de função para uso em sala de aula*, em coautoria com Lucas Antônio Mendes de Lima e Mayara Gabriella Grangeiro Pereira.

Com a constituição do *Grupo de Pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia* (GHEMAZ), em 2016, coordenado em parceria com o professor Natanael Freitas Cabral, passamos sistematicamente a discutir o diagrama, avaliar possíveis variações e resultados visando ajusta-lo para novas experimentações.

Os textos apresentados a seguir foram produzidos a partir do diagrama metodológico, no primeiro semestre deste ano, durante o desenvolvimento das disciplinas *História da Matemática* e *História da Matemática como Recurso Didático*, na graduação e pós-graduação, respectivamente.

Os resultados apresentados são provenientes da utilização do diagrama na produção de textos que envolvem história e matemática, em três turmas do curso de Licenciatura em Matemática e duas turmas do Programa de Mestrado em Ensino de Matemática, tomando por base a segunda parte do livro *História nas aulas de Matemática*: *fundamentos e sugestões didáticas para professores*.

Nessas turmas foram produzidos quarenta e nove trabalhos, sendo trinta e um na graduação e dezoito trabalhos na pós-graduação. Dentre esses, apresento dois textos oriundos da graduação e cinco textos de alunos da pós-graduação.

EQUAÇÃO QUADRÁTICA
recorte da história das equações

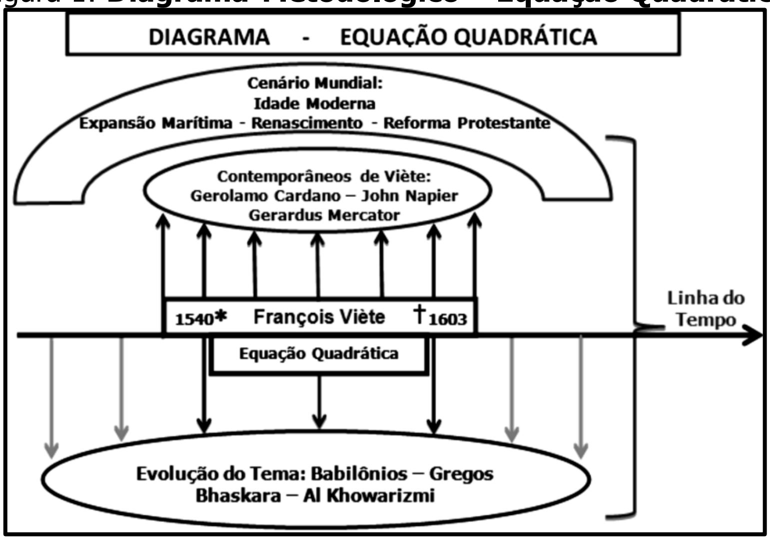
Lucas Antonio Mendes de Lima
Mayara Gabriella Grangeiro Pereira
Miguel Chaquiam

Introdução

Hoje em dia várias tendências em Educação Matemática fornecem suporte metodológico para professores que visam dar mais significado e compreensão ao estudo da matemática. Dentre as diversas tendências daremos destaque à história da matemática, fato que não descarta o uso de outras, tais como resolução de problemas, tecnologias da informação e comunicação, modelagem matemática e etnomatemática.

O texto apresentado a seguir é parte do Trabalho de Conclusão de Curso, que tem como tema *A História da Matemática no processo de ensino e aprendizagem da Matemática*, cuja constituição foi pautada no diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2016), Figura 1.

Figura 1: **Diagrama-Metodológico – Equação Quadrática**



Fonte: Elaborado pelos autores, adaptado de Chaquiam (2016)

Contexto histórico geral relacionado ao personagem principal

Para nos situar em tempo e espaço em relação ao personagem principal, neste caso, François Viète (1540-1603). Elencamos fatos que marcaram o cenário mundial em que Viète viveu, tomando por base Boyer (1974), Eves (2004) e sites que publicam conteúdos científicos.

O século XVI foi marcado por um período histórico denominado de Idade Moderna. Três acontecimentos podem ser destacados nesse período: a Expansão Marítima, o Renascimento e a Reforma Protestante. Esses acontecimentos alteraram significativamente a política, a economia, a sociedade e a cultura e, por consequência, as pessoas passaram a adotar modos de vida diferenciados em relação aos daqueles da Idade Média.

As descobertas de novas rotas marítimas e novas terras abriram caminho para as comunicações com todo do mundo. Na religião, a Reforma Protestante, marcou o processo de decadência da Igreja católica, a principal representante da ordem feudal. Na política, a formação das monarquias nacionais iniciada durante a Baixa Idade Média, com a submissão da nobreza e da Igreja, consolidou-se na Idade Moderna com o surgimento dos Estados Absolutos.

O Renascimento cultural firmava novos valores e princípios, com a contestação dos valores medievais-feudais. No mais, o século XVI foi marcado por transições da Renascença para o Mundo Moderno, considerado como um marco do final da Idade Média e do início da Idade Moderna.

Esses acontecimentos nos evidenciam importantes mudanças no cenário mundial, dentro de um contexto sociocultural, têm como finalidade demarcar tempo e espaço em torno de Viète e de seus contemporâneos, apresentados a seguir, além de integrar fatos da história geral à história da matemática, podem proporcionar uma visão interdisciplinar entre História e Matemática e nos mostrar que a história da matemática é, sim, parte da história da humanidade.

Os contemporâneos de François Viète

Tendo em vista o cenário mundial, destacamos outros personagens que contribuíram para o desenvolvimento cientifico e que foram contemporâneos de Viète, dentre eles: Gerolamo Cardano (1501-1576); Gerardus Mercator (1512-1954); e John Napier (1550-1617).

Iniciamos com **Gerolamo Cardano** (1501-1576), que de acordo com Eves (2004), foi um dos personagens mais extraordinários da história da matemática. Começou sua vida profissional como médico, mas paralelamente se dedicava à Matemática.

Cardano deixou uma obra vasta, abrangendo aritmética, astronomia e física, medicina e outros assuntos. Dentre seus livros, o mais importante foi *Ars Magna*, o primeiro grande tratado em latim exclusivamente à álgebra. Nele encontram-se alguns relatos às raízes negativas de uma equação e ao cálculo com números imaginários. Há indícios que Cardano tinha algum conhecimento da regra de sinais de Descartes. Como jogador inveterado, ele escreveu um manual do jogador onde aborda algumas questões de probabilidade.

Gerard de Cremer, que segundo Seemann (2003) é o nome latinizado de **Gerardus Mercator**, nasceu em 5 de março de 1512, sétimo filho de um sapateiro em Rupelmonde, região de Flandres, município de Kruibekena na atual Bélgica, perto do porto de Antuérpia. Por conta da precária situação financeira da família, em 1526, sob a influência do seu tio Gisbert, Gerardus foi mandado para 's-Hertogenbosch para seguir carreira na igreja e ser educado pelos "Irmãos da vida comum".

Com o desenvolvimento de seus estudos, destaca-se nos ramos da cartografia e da Matemática. Sua reputação veio da elaboração de mapas, atlas e da sua famosa projeção cartográfica de 1569, projeção cilíndrica do globo terrestre sobre uma carta plana, embora apresentasse distorções, essa ação auxiliou a navegação marítima e tornou-se modelo para inúmeros mapas-mundiais. Além disso, a projeção de Mercator contribuiu para a constituição de outro tipo de projeção cartográfica, a projeção cilíndrica transversa secante, denominada de Universal Transversa de Mercator (UTM).

Segundo Boyer (1974), outro personagem importante do século XVI, foi **John Napier** (1550-1617), que não era um matemático profissional. Era um proprietário escocês, Barão de Murchiston, que administrava suas propriedades e escrevia sobre diversos assuntos. Napier só se interessava por certos assuntos da matemática, em especial os que se referiam à computação e trigonometria.

Napier ficou conhecido como inventor do Logaritmo quando, em 1614, publicou o seu *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma Descrição do Maravilhoso Cânon de Logaritmos) que conteve uma descrição de logaritmos, um conjunto de tabelas, e regras para o uso dos mesmos.

Por meio desses três contemporâneos de Viète é possível inferir sobre o desenvolvimento científico noutros ramos do conhecimento, bem como, o desenvolvimento da Matemática.

Traços biográficos de François Viète

Segundo os estudos de Gil (2001), François Viète (1540-1603) nasceu em França, em Fontenay-le-Comte, na província de Poitou a cerca de 50 km de La Rochelle. Filho de Étienne Viète, advogado, e de Marguerite Dupont, Viète iniciou os seus primeiros estudos no convento franciscano de Fontenay e, mais tarde, com 18 anos, foi admitido na Universidade de Poitier, onde concluiu o curso de Direito em 1560. Depois da obtenção da graduação, Viète regressou a Fontenay onde exerceu a profissão de advogado.

Viète sempre demonstrou interesse pela Matemática nos tempos livres e conseguiu importantes descobertas em diversos ramos, por exemplo, na aritmética, na álgebra, na trigonometria e na geometria, embora, ao longo da sua vida tenha sido absorvido por trabalhos oficiais na vertente do direito.

Mesmo não se considerando um matemático, Viète não deixou de agir como tal, visto que mantinha contato com pessoas que atuavam em outros campos da ciência e se fez presente em diversas discussões sobre diversos assuntos que envolviam matemática.

Um olhar sobre a evolução da equação quadrática

Os **Babilônios**, uma das antigas civilizações da Mesopotâmia, se estabeleceram inicialmente numa parte da região ocupada pelos Sumérios e, aos poucos, foram conquistando diversas cidades da região mesopotâmica e até conquistarem o povo hebreu e a cidade de Jerusalém, assim, o império formado pelo rei Hamurabi passa a ter como capital a cidade de Babilônia. Além de Hamurabi, outro importante imperador foi Nabucodonosor, responsável pela construção dos Jardins suspensos da Babilônia.

A respeito da "Matemática" babilônica, Boyer (1974) destaca que seu desenvolvimento foi pautado na utilização do sistema numérico que tinha como base fundamental o sessenta, muito provavelmente por conta da facilidade da metrologia. Além disso, foram hábeis na elaboração de algoritmos para obtenção de raízes de equações, assim como, nos cálculos que envolviam operações aritméticas fundamentais e tabelas exponenciais.

De acordo com Boyer (1974), os babilônios também faziam uso de tabulações como auxílio para álgebra desenvolvida no período, por exemplo, as tabulações de $n^2 + n^3$ para valores inteiros de n.

Ainda no campo da álgebra, eles também apresentavam a solução da equação quadrática a partir de uma flexibilidade algébrica da adição ou multiplicação de um determinado termo em ambos os membros da equação, além de outras estratégias algébricas.

Para esclarecer esta abordagem dos Babilônios a respeito da resolução da equação do segundo grau, com o uso de tais manipulações, consideremos o problema que pede o lado de um quadrado, se a área menos o lado dá 14,30 (base sexagesimal). Sua solução equivale a resolver a equação $x^2 - x = 870$, expressa por eles do seguinte modo, conforme Boyer (1974), Tome a metade de 1, que corresponde a 0;30, e multiplique 0;30 por 0;30, o que resulta 0;15; some isto a 14,30, o que dá 14,30;15. Isto é, o quadrado de 29;30. Agora some 0;30 a 29;30 e o resultado é 30, o lado do quadrado.

Resolução esta, que se resume basicamente na utilização da fórmula $x = \sqrt{(p/2)^2 + q} + p/2$. A qual pode ser desenvolvida, a partir da equação $x^2 - px = q$ usando os conhecimentos atuais para estabelecer o valor de x.

Além disso, os Babilônios também abordavam dois tipos de problemas envolvendo a solução das equações quadráticas, para as quais faziam uso das transformações algébricas. Para tanto, eles classificaram as equações em três tipos: $x^2 + px = q$; $x^2 = px + q$ e $x^2 + q = px$. Sabe-se que os babilônios não detinham o conhecimento para solucionar uma equação quadrática na sua forma completa, portanto, eles elaboravam técnicas de solução a partir da classificação apresentada.

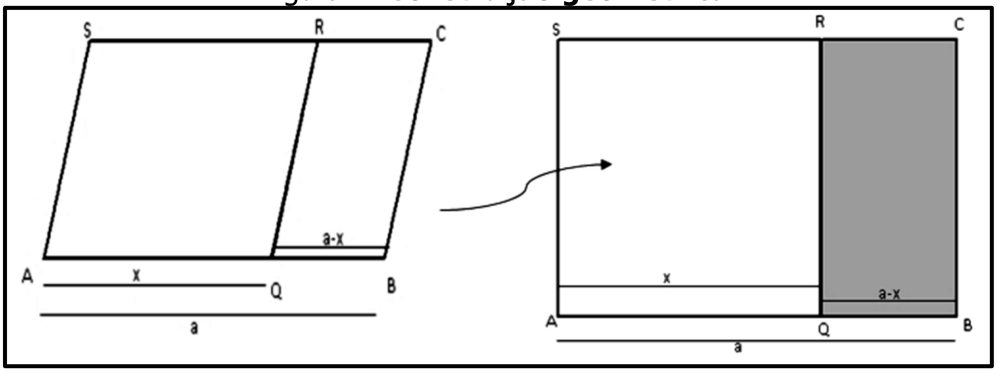
Os **Gregos** ainda hoje se chamam helenos, o nome usado por seus antigos antepassados que se estabeleceram no decorrer das costas do Mediterrâneo. Para Boyer (1974), a "Matemática" abordada por eles surge de rudimentos de cálculos de origem babilônica e egípcia trazidos por mercadores, entretanto, destacam-se por estudos em astronomia e geometria.

Nesse sentido, de acordo com os estudos de Yves (2004), o método utilizado pelos Gregos para solucionar as equações quadráticas, estava embasado exatamente na geometria. Esta por sua vez, apoiada nos livros Elementos de Euclides, especificamente no Livro IV, na proposição 28:

> Aplicar a um dado segmento de reta AB um paralelogramo AQRS de área igual a uma figura retilínea F, e ficando aquém por um paralelogramo QBCR semelhante ao paralelogramo dado, não excedendo a área de F a do paralelogramo descrito sobre metade de AB e semelhante à deficiência QBCR. Considere o caso particular em que o paralelogramo dado é um quadrado. Denote o comprimento AB por a, a base AQ do paralelogramo aplicado (que é então um retângulo) por x e o lado de um quadrado F, de área igual à do retângulo, por b. Então $x(a - x) = b^2$.
>
> (EVES, 2004, p.110)

Dessa forma, apresentamos a seguir uma construção geométrica similar da ideia exposta anteriormente:

Figura 2: **Construção geométrica**



Fonte: Elaborado pelos autores.

Nesse sentido, a área da figura hachurada é igual à área de um quadrado de lado b, consequentemente b^2, caracterizando então a relação exposta por Euclides da forma: $x(a - x) = b^2$.

Bhaskara (1114-1185), segundo Boyer (1974), foi o mais importante matemático do século XII dentre tantos oriundos pela Índia. Desenvolveu estudos baseados na aritmética e na álgebra, dos quais preencheu algumas lacunas na obra de Brahmagupta, dentre elas, apresentou uma solução geral da equação de Pell e o problema da divisão por zero.

Além disso, das contribuições Bhaskara no campo da Álgebra, assim como do povo hindu de um modo geral, ecoam a seguinte afirmação: *Uma equação quadrática (com respostas reais) tem duas raízes formais*. Além disso, eles unificaram a resolução algébrica destas equações por meio da utilização do método de completamento de quadrado, o qual é denominado de método Hindu.

Nesse sentido, para evitar repetição, apresentamos a seguir um exemplo da utilização deste modelo de resolução, na caracterização feita por Al-Khowarizmi para alguns tipos de abordagens a respeito das equações quadráticas.

Mohamed Ibu-Musa Al Khowarizmi nasceu em torno de 780 e morreu por volta do ano 850 e, para Boyer (2004), um mestre matemático do período que também atuou como astrônomo e geógrafo que, assim como Euclides, teve grande influência na Europa Ocidental. Este sábio escreveu obras nas duas áreas, as quais foram baseadas nos Sindhind da Índia e, especificamente a respeito da Matemática, escreveu dois livros de Aritmética e Álgebra.

Nesse sentido, por meio de um de seus livros mais importantes denominado de *Al-Jabr wa'l muqabalh* surge o termo álgebra e palavra *algorismi* é, portanto, a versão latina do nome Al-Khwarizmi da qual derivou a palavra algoritmo. No livro de *Al-Jabr wa'l muqabalh* é abordado num dos capítulos a solução de equações com os seguintes itens: raízes, quadrados e números (x, x^2 e números).

Neste mesmo livro, nos capítulos IV, V e VI são abordados especificamente os três casos de equações quadráticas com três termos que, segundo Boyer (2004), envolvem (i) quadrados e raízes iguais a números; (ii) quadrados e números iguais a raízes e (iii) raízes e números iguais a quadrados, cujas soluções por ele apresentadas, são dadas por regras "culinárias" e para "completar o quadrado" aplicada a exemplos específicos, ilustradas no capítulo IV por meio das equações: $x^2 + 10x = 39$, $2x^2 + 10x = 48$ e $(1/2)x^2 + 5x = 28$.

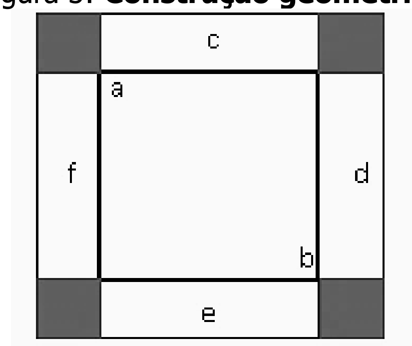
Além disso, no capítulo V usa o seguinte exemplo $x^2 + 21 = 10x$, cujas raízes são 3 e 7 obtidos pela fórmula de resolução da equação do segundo grau completa, isto é, $x = 5 \pm\sqrt{25-11}$. Além disso, Al-Khowarizmi chama atenção para um fato que usamos hoje, o discriminante deve ser positivo.

Nos trabalhos de Al-khowarizmi é notória a presença e influência dos gregos, embora, segundo Boyer (1974), seja pouco evidente nas primeiras demonstrações geométricas, a exemplo, para a equação $x^2 + 10x = 39$ enuncia:

> Traça um quadrado ab para representar, e sobre os quatro lados desse quadrado coloca retângulos *c*, *d*, *e* e *f* cada um com largura 2 ½. Para completar o quadrado maior é preciso acrescentar os quatro pequenos quadrados nos cantos. Portanto, para completar o quadrado somamos 4 vezes, 6 ¼ unidades ou 25 unidades, obtendo, pois, um quadrado de área total 39 + 25 = 64 unidades. O lado do quadrado grande deve, pois, ser de 8 unidades, de que subtraímos 2 vezes 2 ½ ou 5 unidades, achando $x = 3$.
>
> (BOYER, 1974, p.168)

Abaixo apresentamos uma representação da citação acima.

Figura 3: **Construção geométrica**



Fonte: Elaborado pelos autores

Observa-se que ao acrescentarmos os quatro quadrados pequenos coloridos para completar o quadrado maior, onde cada um desses tem área equivalente a 6 ¼ unidades, que multiplicados por quatro resultam uma área equivalente a 25 unidades, que adicionadas a 39 totalizam 64 unidades. Assim, o lado do quadrado maior é igual a 8, do qual subtraímos duas vezes 2 ½, ou seja 5, oque nos leva a concluir $x = 3$, comprovando que a resposta constante no capítulo 4 está correta.

Além disso, Boyer (1974) afirma que no livro Al-khowarizmi constam outros seis casos de equações que abordam todas as possibilidades quanto as equações quadráticas que tem uma raiz positiva, apresentadas de forma sistemática e completa. Por outro lado, também afirma que uma publicação na Turquia põe em dúvida o fato da obra de Al-khowarizmi ser a primeira obra sobre o assunto, visto que um manuscrito de uma obra de abd-al-Hamid ibn-Turk, denominada de *Necessidades Lógicas em Equações Mistas* é parte do livro *Al-Jabr wa'l muqabalh*, talvez publicada antes deste.

Boyer (1974) considera que **François Viète** foi um nome importante para Álgebra, devido ao fato de contribuições apresentarem uma aproximação das abordagens modernas. Visto que até o tempo dos Árabes e o início do tempo moderno o conhecimento a respeito das equações quadráticas não havia se expandido, pois abordavam apenas os casos particulares.

Nesse sentido, Viète usou um esquema para escrever uma equação quadrática de um modo geral, de tal forma que a escrita representava qualquer classe destas equações. Assim, ele introduziu o uso de *vogal* para representar uma quantidade indeterminada e *consoante* para números conhecidos.

De acordo com o mesmo autor, se Viète tivesse usado símbolos existentes em seu tempo representava todas as equações quadráticas na forma, com *A* sendo a incógnita e B, C e D os parâmetros. Com isso, vemos que a Álgebra de Viète merece destaque pela generalidade de sua expressão.

Além disso, numa de suas últimas obras, o *De numerosa potestatum ... resolucione* (1600), ele usou o método para resolução aproximada de equações, que é muito próximo do conhecido como método de Horner. Para melhor compreensão, apresentamos uma resolução da seguinte equação por Boyer (1974)

> $x^2 + 7x = 60750$, Viète encontrou a primeira aproximação por falta para x, o valor $x_1 = 200$. Depois, substituindo $x = 200 + x_2$ na equação de partida, ele achou $x^2_2 + 407x_2 = 19350$. Essa equação, agora conduz a uma segunda aproximação $x_2 = 40$, agora fazendo $x_2 = 40 + x_3$, resulta na equação $x^2_3 + 487x_3 = 1470$e a raiz dessa é $x_3 = 3$. Portanto, $x_2 = 43$ e $x = 243$. (Escrita em notação moderna).
>
> (BOYER, 1974, p.225)

Este método é importante visto que pode ser aplicado a qualquer equação polinomial com coeficientes reais e uma raiz real. Contudo, para utiliza-lo precisa desta raiz real, o que pode dificultar um problema em que não se consegue identificar imediatamente.

Portanto, a respeito da evolução dos estudos referentes as equações quadráticas, vale ressaltar que as discussões das primeiras classificações, assim como, utilização de técnica para resolução foi abordada inicialmente pelos babilônios que utilizavam fórmula semelhante a que utilizamos até os dias atuais, entretanto, eram apenas para a classificação apresentada na época.

Posteriormente, os gregos, também apresentaram contribuições significativas para solucionar as equações quadráticas, baseadas na geometria. Por outro lado, Bhaskara considerou que uma equação quadrática (com respostas reais) tem duas raízes formais e apresentou a lógica do completamento de quadrado.

Posteriormente, Al-Khowarizmi considera "o que conhecemos por discriminante hoje deve ser positivo". Além disso, em seu livro retoma os métodos de abordados na Babilônia (por meio da regra) e por Bhaskara (completamento de quadrado). Por fim, evidenciamos a generalização feita por Viète para representar qualquer classe destas equações.

Tomando por base a generalização apresentada por Viète, associada as regras utilizadas pelos babilônios, assim como, das outras contribuições apresentadas, há uma aproximação considerável das abordagens apresentas no livros didáticos atuais.

Textos complementares sobre equações e Viète

Sugerimos como leitura complementar duas dissertações que apresentadas a seguir, uma voltada para abordagem histórica das equações algébricas e outra apresenta um estudo desenvolvido acerca de François Viète.

Na primeira, Ribeiro (2015) nos apresenta uma visão atual a respeito da utilização da História da Matemática para o ensino das equações algébricas, o que vem corroborar no sentido da importância referente a abordagem por nós apresentada.

Na segunda, de Gil (2001), encontramos um estudo exclusivamente do François Viète. No qual, o autor evidencia uma bibliográfica do mesmo e apresenta as suas contribuições para a ciência, caracterizando assim a relevância do personagem destacado nesta construção das equações quadráticas.

Considerações finais

Compreendendo a construção apresentada a respeito da equação quadrática, entendemos que a história da matemática não deve ser trabalhada em separado do ensino da matemática, mas, como um recurso complementar durante a abordagem dos conteúdos e, evidentemente, associada a outras tendências em Educação Matemática, dentre elas, a resolução de problemas e o uso das tic's no ensino.

Nossa abordagem visa destacar a importância da construção histórica do estudo das equações quadráticas e que estas podem ser utilizadas em sala de aula na Educação Básica. Ao evidenciarmos o matemático François Viète, procuramos destacar o início de uma generalização das equações quadráticas, ideia fundamental para compreensão dos estudos atuais.

Os fatos relativos a história geral, que engloba o período de vida de Viète, nos favorece no sentido de localizar o estudo em tempo e espaço. Além disso, evidencia-se a possibilidade de uma abordagem interdisciplinar com a história da humanidade, assim como, com outras áreas do conhecimento, como por exemplo, quando citamos entre alguns de seus contemporâneos Gerardus Mercator que desenvolveu estudos em cartografia e matemática.

Por fim destacamos um equívoco ainda constante em alguns textos didáticos a respeito da denominação atribuída a fórmula para encontrar raízes de uma equação do segundo grau, "método de Bhaskra para solução de equações do segundo grau", quando na verdade é uma fórmula que está diretamente relacionada a estudos desde o período dos Babilônios.

Bibliografia referenciada e consultada

BOYER, C. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 1974.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CHAQUIAM, M. Um diagrama, um texto. In: MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática**: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016.

CHAQUIAM, M. **História da matemática em sala de aula**: proposta para integração aos conteúdos matemáticos. Coleção História da Matemática para Professores. Natal: Livraria da Física, 2015. 82 p.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**. Campinas (SP): Editora da UNICAMP, 2004.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projeto de pesquisa**. São Paulo: Editora Atlas S.A. 2008.

GIL, Paulo Duarte Bastos. **François Viète**: o despontar da álgebra simbólica. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2001.

RIBEIRO, Denise Benino Dourado. **O uso da história das equações nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática na educação básica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, 2015.

SEEMANN, Jörn. **Mercator e os geógrafos**: em busca de uma "projeção" do mundo. Revista de Geografia da UFC, v. 2, n. 03, p. 7-17, 2003.

Sites consultados:

https://lilimachado.wordpress.com/2012/05/05/contexto-historico-do-renascimento/

http://www.historiamais.com/idademoderna.htm

http://www.somatematica.com.br/biograf/khwarizmi.php

https://fr.wikipedia.org

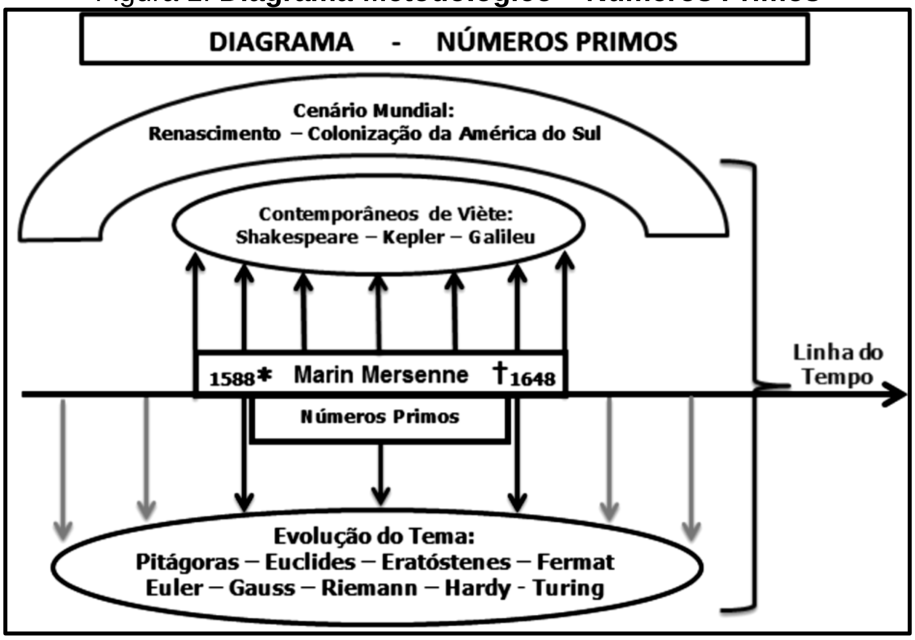
NÚMEROS PRIMOS: uma história dos números

Elane Cristina Teixeira Corrêa
Gilson Ferreira Meireles
Miguel Chaquiam

Introdução

Apresentamos um apanhado histórico dos números primos segundo a abordagem proposta por Chaquiam (2016). Tal proposta sugere a constituição de um diagrama, Figura 1, a partir de um tema de matemática e a escolha de um personagem principal a partir de um grupo de personalidades relevantes para a evolução do tema. Neste caso, elegemos Marin Mersenne (1588-1648). A escolha desse personagem justifica-se por sua contribuição ao tema, os chamados "Primos de Mersenne".

Figura 1: **Diagrama-Metodológico – Números Primos**



Fonte: Adaptado de Chaquiam (2016)

Entre os séculos XVI e XVII na Europa e na América do Sul

Iniciamos com a apresentação do cenário histórico do período no qual viveu o nosso personagem principal, final do século XVI e início do século XVII, destacando fatos europeus e sul-americanos.

O **Renascimento** foi um movimento cultural e intelectual iniciado no século XV (Quatrocentismo) na Itália, período no qual também ocorreram transformações nos âmbitos social, político e econômico, atingindo seu apogeu no século XVI (Quinhentismo). Observa-se que a retomada das formas do mundo greco-romano (Humanismo) e a descoberta de uma nova realidade espacial, além da busca pela beleza foram escopos do movimento renascentista.

Com o decorrer desse movimento, Deus deixou de ser o centro de tudo (teocentrismo) e, o homem, se tornou o centro da criação e a medida de todas as coisas (antropocentrismo). Foi nesse período também que surgiu a figura do mecenas, os quais eram os patrocinadores da produção artística. O objetivo desse patrocínio era a obtenção de reconhecimento e prestígio na sociedade, uma vez que a posição social dos artistas era elevada.

Nas artes, destacamos Leonardo da Vinci (1452-1519), que também contribuiu para as ciências, Michelangelo Buonarrotti (1475-1564) e Sandro Botticelli (1444-1510). Por suas obras literárias, elencamos Luís de Camões (1524-1580), Miguel de Cervantes (1524-1580) e William Shakespeare (1564-1616).

O Renascimento científico possui contribuições de Nicolau Copérnico (1473-1543), que atuou no desenvolvimento da matemática, mecânica e astronomia. Foi o criador da teoria heliocêntrica, segundo a qual o Sol passava s ser o centro do universo, pois, até então se acreditava-se que a Terra era o centro do universo (geocentrismo). A medicina evoluiu graças aos trabalhos de Miguel Servel (1509-1553) e William Harvey (1578-1657) que descobriram o funcionamento do sistema circulatório do sangue e, André Vesálio (1514-1564) conhecido como o "pai da anatomia" devido à publicação do primeiro livro sobre anatomia humana em 1543.

Na França merecem destaque François Rabelais (1494-1553) e Michel de Montaigne (1533-1592) por suas obras literárias. Segundo Raminelli (1994) existem sete obras publicadas em Portugal as quais falam do Brasil, a saber:

> 1 - *Cópia de unas cartas embiadas del Brasil ... tresladas de Portugueses em Castilhano recebidas el ano de MDLI*;
> 2 – José de Anchieta, *Excellentíssimo, singularis Fidei ac Pietatis Viro Mendo de Saa*, Coimbra, na casa de João Alvares, 1563;
> 3 – Pedro de Magalhães Gandavo, *História da provincia Sãcta Cruz a qui vulgarmente chamamos Brasil*, 1576;
> 4 – *Naufragio, que passou Jorge de Albuquerque Coelho, Capitão e Governador de Pernambuco*, opúsculo impresso (?), 1584 e 1592 ou 1601;
> 5 – José de Anchieta, *Arte da gramatica da lingoa mais usada na costa do Brasil*..., Coimbra, António de Mariz, 1595;
> 6 – *Carta Regia de 13 de janeiro de 1596 com a transcrição da lei de 11 de novembro de 1595 sobre a liberdade ds gentios do Brasil*, opúsculo de quatro páginas, Lisboa, 1596 (?);
> 7 – *Gravura impressa em Portugal, entre 1565 e 1569, a representar um animal estranho, visto e matado na Capitania de São Vicente, no Brasil*.
>
> (RAMINELLI, 1994, p. 14-15)

Raminelli (1994) afirma que alguns manuscritos não foram impressos por conterem informações valiosas capazes de gerar o interesse de outros Estados europeus pelas riquezas do Brasil, como por exemplo, os trabalhos de Gabriel Soares de Sousa (1540-1591) e Frei Vicente do Salvador (1564-1635).

A história do Brasil tem início no contexto das chamadas Grandes Navegações e Colonização da América do Sul. Após as grandes descobertas geográficas do século XV, deu-se início ao processo de colonização. No século XVI, criaram-se os vice-reinos de Nova Espanha

(1535) e Peru (1542), posteriormente dividido nos vice-reinos de Nova Granada (1717) e Rio da Prata (1776). A chegada dos colonos franceses às Américas se deu no início do século XVII, após insucessos no Brasil e na Flórida. Embora os franceses tenham conseguido estabilidade na zona oriental do Canadá (Terranova e vale do São Lourenço), ao tentarem avançar mais a sul foram derrotados pelos ingleses e, estes, passaram a ter posse dos territórios franceses após a assinatura do Tratado de Paris de 1763.

Em relação ao Brasil, a partir de 1530, D. João III enviou uma expedição com o objetivo de expulsar colonos franceses estabelecidos no litoral do Rio de Janeiro, além de subjugar os indígenas (Tamoios), buscar metais preciosos e fundar o primeiro núcleo colonial.

Pelo Tratado de Tordesilhas (1494), celebrado entre o Reino de Portugal e a Coroa de Castela para dividir as terras "descobertas e por descobrir" fora do continente europeu, a região do extremo leste do Brasil, que pertencia ao Reino de Portugal, foi dividida em 1532 em quatorze capitanias hereditárias que permaneceram até o século XVIII, sendo que numa destas foi fundada a vila de São Vicente, na área litoral que atualmente pertence ao estado de São Paulo.

Em 1548, D. João III cria o governo-geral do Brasil, com sede na capitania da Bahia e, no ano seguinte, criou-se a vila de São Salvador, capital da colônia até 1763. A partir daí, chegaram os escravos africanos e os primeiros jesuítas para catequizar os índios, disciplinar o clero e implantar as primeiras instituições de ensino. Em 1553, chega ao Brasil junto ao novo governador, o padre José de Anchieta (1534-1597) que, no ano seguinte ao de sua chegada, fundou junto a Manuel da Nóbrega (1517-1570) o colégio de São Paulo, embrião da atual cidade de São Paulo.

O período de 1580 a 1640 (União Ibérica) possibilitou o avanço dos portugueses para o interior do Brasil, para além do que havia sido estabelecido pelo Tratado de Tordesilhas. As incursões dos bandeirantes chegaram aos Andes e aos confins do Amazonas em busca de metais preciosos, principalmente o ouro, e de escravos indígenas.

Em 1612, a cidade de São Luís é fundada por franceses que haviam invadido o Maranhão. A partir de 1613 iniciaram incursões com destino ao Amazonas, tais expedições e possíveis tentativas holandesas de alcançar as minas de prata do Peru, acessíveis pelo rio Amazonas, provocaram a designação de Francisco Caldeira Castello Branco (1566-1619) para tomar posse das terras habitadas e exploradas por "aventureiros" de outras nacionalidades.

Em 12 de janeiro de 1616, conforme Cruz (1937), Francisco Caldeira Castello Branco desembarca e se instala na área que deu o nome de Feliz Lusitânia, levantando um forte de madeira chamado de Presépio de Belém, em homenagem à data de sua partida do Maranhão, 25 de dezembro de 1615, e posteriormente, essa nova terra recebeu o nome de Nossa Senhora de Belém do Grão-Pará, atual cidade de Belém.

Os contemporâneos de Marin Mersenne

Tendo-se em vista melhor caracterizar o cenário mundial em torno do personagem em destaque neste texto, apresentamos alguns personagens que se destacaram em outras áreas do conhecimento.

William Shakespeare, dramaturgo e poeta inglês nascido em Stratford-on-Avon durante o reinado de Elizabeth I (1533-1603), dentro do período renascentista. Frequentou a *King's New Scholl*, mas devido à falta de recursos não completou seus estudos. Casou-se com Anne Hathaway (1556-1623) e teve três filhos. Em Londres exerceu vários ofícios até consagra-se com ator e escritor. Teria iniciado sua carreira na companhia *Lord Chamberlain's Men*, exercendo as funções de ator, dramaturgo e coordenador. Em 1598, construiu seu próprio teatro, *The Globe*, no qual divulgava sua obra.

Considerado o maior escritor em língua inglesa de todos os tempos e um dos maiores do mundo. Suas primeiras peças foram provavelmente, as três partes de Henrique VI, encenadas entre 1589 e 1592, seguidas por Ricardo III. Sua primeira grande tragédia foi *Romeu e Julieta*, sempre um sucesso de público e que teve diversas versões adaptadas para o cinema. *Sonho de uma noite de verão* é considerada sua obra-prima no gênero comédia. Em 1600, inicia a época das grandes tragédias com *Hamlet*. Em 1604, encena-se a peça *Otelo*, a qual compõe com *Hamlet* e *Macbeth* o trio das grandes tragédias de Shakespeare. Por volta de 1610, retira-se para sua cidade natal, onde escreve suas últimas obras *O conto de inverno* (1611) e *A tempestade* (1612).

Johannes Kepler (1571-1630), astrônomo alemão nascido em Weil der Stadt, ainda bebê contraiu varíola, o que afetou sua visão permanentemente. Em decorrência da situação financeira dos seus pais, dos 3 aos 5 anos foi criado por seus avós paternos. Em 1576 muda-se com seus pais para a cidade de Leonberg, onde aos oito anos, em 1579, entra para escola para aprender Latim e Alemão. Em 1584, entra para a Escola do Monastério em Aldelberg. Em 1586, foi estudar em Maulbronn em uma escola preparatória para a Universidade de Tuebingen. Em 1589, ingressa na Universidade Protestante de Tuebigen para estudar Teologia, Filosofia, Matemática e Astronomia. Em 1591, obteve o grau de Mestre. Em 1594, muda-se para Graz, na Áustria, onde se casa pela primeira vez e tem dois filhos que, infelizmente, faleceram logo após o nascimento.

Em seu primeiro livro, conforme Rooney (2012), tentou associar os cinco sólidos de Platão com os planetas conhecidos até então, sugeria um modelo no qual a órbita de cada planeta estava circunscrita sobre um sólido e inscrita noutros seguintes. Em 1604 publica a obra *Astronomia pars Optica* (*A parte Óptica da Astronomia*), na qual tratava com o problema da refração atmosférica e com a teoria das lentes. Em 1609, escreve *Astronomia Nova*, onde apresenta as duas primeiras leis do movimento planetário. Em 1612, muda-se para Linz, na Áustria e, em 1619, aparece em seu livro A terceira lei do movimento planetário.

Em 1621, publica a *Epitome Astronomia*, seu trabalho mais completo acerca da Astronomia heliocêntrica. Em 1626, devido à perseguição religiosa muda-se de Linz e, no ano seguinte, fixa-se em Sagan. Muito provavelmente, o maior mérito de Kepler foi ter confirmado experimentalmente a teoria de Copérnico, provando que os planetas se movem em elipses com o Sol em um dos focos.

Galileu Galilei (1564-1642), nascido na cidade de Pisa na Itália, era filho do destacado músico Vicenzo Galilei (1520-1591). Sua mãe Giulia teve mais seis filhos, no entanto, somente três viveram até a idade adulta. Em 1572 muda-se para Florença e, aos 11 anos de idade seu pai o envia a um mosteiro em Vallombroza para aprender grego, latim e lógica, retornando em 1579. Em 1581, retorna a sua cidade natal para estudar Medicina na Universidade de Pisa. No entanto, logo voltou seu interesse para Filosofia e Matemática e, em 1587, viaja à Roma para visitar o Colégio Romano.

Em 1609, com o uso de um telescópio, observa o relevo lunar, as manchas solares, os satélites de Júpiter e que a Via Láctea é composta de estrelas. E publicou suas descobertas em 1610 em *O Mensageiro Celeste*. Em 1612, publica um livro sobre corpos em flutuação. Em 1623 publica uma obra sobre cometas, *O experimentador*. Em 1632, é chamado à Roma pela Inquisição para ser processado sob a acusação de "suspeita grave de heresia". Em 1633 é condenado à prisão perpétua, pena revertida em prisão domiciliar e, recentemente a Igreja desculpou-se pela condenação.

O personagem em destaque Marin Mersenne

Marin Mersenne nasceu em 08 de setembro de 1588, em Oizé, França. Após ter estudado no colégio jesuíta *Collège de La Flèche* em Paris, no período de 1604 a 1609, estudou teologia em Sorbonne, nos dois anos seguintes, juntou-se à Ordem Franciscana dos Mínimos, em 1611, onde permanece até o fim da sua vida.

De acordo com Garber (2000), *Quaestiones celeberrimae in Genesim,* publicado em 1623, foi a primeira publicação ajuizada de Mersenne na qual apresentava 35 argumentos em favor da existência de Deus, na tentativa de combate ao ateísmo. Nos anos seguintes publica *L'impiété des déistes* (1624) e *La vérité des sciences* (1625), neste último defende a filosofia cristã contra o ceticismo e a heterodoxia.

Ainda segundo Garber (2000), no período compreendido entre o final da década de 1620 e início da década de 1630, Mersenne pode ser considerado como um cientista galileano por suas publicações tratarem de temas defendidos por Galileu, tais como queda livre em *Traité des mouvemens, et de la cheute des corps pesans, et de la proportion de leur diferentes vitesses* (1633) e teoria do movimento em *Questions Théologiques* (1634).

Segundo Costa (2015), Mersenne lamentava o fato de não existir uma organização formal onde os estudiosos pudessem se encontrar regularmente para trocar e discutir ideias e descobertas. Assim, disponibilizou o seu próprio quarto no convento dos Mínimos para este fim, dando origem aos primeiros encontros regulares de matemáticos que decorreram continuamente desde 1635 até sua morte em 1648.

Conforme Rooney (2012), Mersenne considerava que era sua função cristã difundir o conhecimento científico, desta forma se correspondia com centenas de matemáticos, cientistas e outros pessoas cultas. Apesar disso, sua obediência à autoridade religiosa não o permitia aceitar publicamente algumas teorias, como por exemplo, a do movimento terrestre, defendido por Copérnico. Ainda assim, o seu espirito inquisidor colocava questões e apresentava ao mundo científico.

Seu primeiro trabalho relacionado à música foi publicado em 1627, *Traité de l'harmonie universelle.* Em 1634, publica as *Questions* *harmoniques* e *Les Préludes de l'harmonie universelle*. No final e 1636 e início de 1637 publica a obra *Harmonie Universelle*, na qual discute aspectos relacionados à música, mecânica e acústica. Os dezenove livros deste tratado discutem temas tais como a natureza do som, o problema da queda dos corpos, a vibração das cordas e dos tubos, os instrumentos musicais e regras de composição.

Segundo Silva (2007), Mersenne procurava determinar as leis que regem os fenômenos naturais por meio da observação de certas regularidades. Leis que, por sua vez, foram erguidas sobre bases matemáticas e mecanicistas. O mundo seria constituído de corpos em movimento; o som era concebido como o choque de partículas e produzido por uma corda é resultado do movimento realizado por ela, ou seja, a música era abordada por Mersenne em termos mecânicos.

Ele também havia percebido que existem tipos de sons que o ouvido humano normal não é capaz de detectar, estabelecendo uma lei matemática que regula a relação entre a vibração de uma corda e o som produzido por ela, segundo a qual, quanto mais comprida for a corda, menor será o número de vibrações que ela efetua.

De acordo com Costa (2015), depois de sua morte, foram encontradas cartas de 78 correspondentes da Europa, dentre os quais Fermat (1601-1665) na França, Huygens (1629- 1695) na Holanda, Hobbes (1588-1679) na Inglaterra e Galileu e Torricelli (1608-1647) na Itália.

Sobre os números primos, também abordado por Mersenne, será apresentado a seguir um recorte sobre o desenvolvimento do conteúdo matemático a este relacionado.

Os números primos

No **Período Helênico** (600-336 a.C.) os gregos realizaram amplas transformações culturais, intelectuais e científicas. O grande berço comercial, cultural e intelectual grego estava em Atenas e tinham filósofos como Sócrates (469?-399 a.C.) e Platão (427?-347 a.C.) e cientista como Aristóteles (384-322 a.C.), época de Alexandre, o Grande (356-323 a.C.) que uniu toda a Grécia sob o Império Macedônio (EVES, 2008, pp. 90-93).

Destacam-se nesse contexto três grandes matemáticos que contribuíram na construção, dedução e aperfeiçoamento dos números primos, Pitágoras de Samos, Euclides de Alexandria e Eratóstenes de Cirene.

De acordo com Eves (2008, p. 97), **Pitágoras** (572-500 a.C.), mencionada no *Sumário Eudemiano* de Proclo, em que supõe-se que nasceu em 572 a.C. na ilha de egéia de Samos em que se conjectura que tenha sido discípulo do filósofo, matemático e astrônomo grego **Tales de Mileto** (624-558 a.C.) pela proximidade da ilha de Mileto a Samos e por ser cinquenta anos mais novo que Tales. Viajou para Índia e Babilônia e retornou para Samos, contudo emigrou-se para o porto marítimo de Crotona, situada no sul da Itália em que fundou a "Escola Pitagórica".

Os primeiros passos relacionados à teoria dos números são atribuídos a Pitágoras e seus seguidores. Jâmblico, que viveu por volta de 320 d.C, atribuiu a Pitágoras a descoberta dos *números amigáveis*, isto é, dois números são considerados *números amigáveis* se cada um deles é igual à soma dos divisores próprios do outro, a exemplo, 284 e 220. Também se atribuem aos pitagóricos e a Pitágoras, os *números perfeitos*, *deficientes* e *abundantes*, o teorema sobre triângulos retângulos, os ternos pitagóricos, a descoberta das grandezas irracionais, além de surpreendente, foi perturbadora para os Pitagóricos que defendiam a filosofia baseada nos números inteiros.

De acordo com Boyer (1974, p. 44), a matemática durante o tempo de Tales e dos pitagóricos dependiam de conjectura e inferências devido as incertezas da matemática grega abarcada no período de 600 a.C. a 450 a.C. e comparada com a álgebra babilônica ou da geometria egípcia de cerca de 1700 a.C.

Euclides de Alexandria, que viveu por volta de 325 a.C. a 265 a.C., foi um dos mais proeminentes matemáticos da Antiguidade e, segundo Roque e Carvalho (2012, p.82) , autor de várias obras em que algumas se perderam. Para Boyer e Merzbach (2012, p.88), as cinco obras de Euclides sobreviveram até hoje foram *Os elementos*, *Os dados*, *Divisão de figuras*, *Os fenômenos* e *Óptica*.

Roque e Carvalho (2012, pp.82, 83), ressaltam que a obra *Os Elementos* são formados por treze livros, escritos por volta do ano 300 a.C., nestes estão expostos conteúdos que se dividem em três partes: Geometria plana (Livros I-VI), Aritmética(Livros VII-IX) e Geometria espacial(Livros XI-XIII). No Livro IX, da sua obra encontra-se proposições sobre *Os números primos são mais numerosos do que qualquer multidão de números primos proposta* e outra que fornece um método para construir *números perfeitos*.

De acordo com Boyer e Merzbach (2012, p.122), **Eratóstenes** (?276 a.C. – ?196 a.C.) (viveu aproximadamente de 275 a 194 a.C.) foi bibliotecário chefe de Alexandria em que representava as muitas áreas de estudo. É lembrado pelos trabalhos por sua medida estimada da Terra e por um método sistemático para isolar os números primos, conhecido como "Crivo de Eratóstenes".

Durante a **Idade Média** os árabes tiveram um papel fundamental no desenvolvimento de uma Matemática que influenciou procedimentos algébricos entre os séculos VIII e XII. Nos textos árabes está caracterizado que a cultura atenção dos matemáticos visto que se debruçavam sobre os problemas do cotidiano e que "a diferença se estabelecia entre aqueles que se contentavam em produzir as práticas comuns e outros, que refletiam sobre estes procedimentos". (ROQUE e CARVALHO, 2012, p. 189). O conhecimento que detinham sobre obras gregas e orientais contribuiu para a evolução de conceitos algébricos a partir do século IX.

No **Renascimento** destacamos o matemático Fibonacci que, muito provavelmente, teve contato com a matemática dos árabes e também de outros países do mediterrâneo onde aperfeiçoou seus domínios em álgebra e algum simbolismo herdado dos árabes.

Por outro lado, temos Girolamo Cardano que no começo do século XVI contribuiu para a resolução de equações cúbicas e quárticas, época que ficou conhecida como marco do período moderno da matemática.

Destacamos que tanto Fibonacci quanto Cardano, não contribuíram diretamente para a ideia de números primos em suas obras, contudo destacam-se na história da matemática pelas suas obras relacionadas à álgebra e equações algébricas que, de alguma forma envolvem números primos como solução.

Em Aragão (2009, p.39), Fibonacci (1180-1240), também conhecido por Leonardo de Pisa, nasceu em Pisa e viajou pelos países do mediterrâneo devido aos negócios da família. Em uma de suas viagens pela África islâmica aprendeu a calcular pelo sistema indiano. Dentre outras viagens a países como o Egito, à Sicília, à Grécia e Síria teve contato com procedimentos matemáticos orientais e árabes, o qual se convenceu da superioridade prática dos métodos indo-arábicos de cálculos. (EVES, 2008, p. 292).

Entre 1202 e 1225 Fibonacci escreveu cinco obras, o *Líber abaci* em que fala sobre aritmética e álgebra elementares na qual temos um problema que dá origem a sequência de Fibonacci; *Practica geometriae*, onde descreve sobre Geometria e Trigonometria, *Flos* em que apresenta as soluções de três problemas que lhe tinham sido colocados em um torneio de matemática por João de Palermo, um membro da corte do Imperador Frederico II e *Liber quadratorum*, no qual aproxima raízes cúbicas, obtendo uma aproximação correta até a nona casa decimal.

Encontra-se em Eves (2008, p. 306) que Girolamo Cardano (1501-1576) nasceu em Pávia e começou sua vida como médico e, posteriormente, dedicou-se a matemática ocupando cadeiras importantes nas Universidades de Pávia e Bolonha. Cardano deixou obras que abrangia aritmética, astronomia, física, medicina e outros assuntos. A mais importante obra é Ars Magna, um tratado em latim dedicado a álgebra em que nele há algumas raízes negativas de uma equação, o cálculo com números imaginários dentre outros tópicos da matemática.

A expansão da matemática na Europa nos séculos XVI e XVII

A expansão da Europa pelo mundo deu-se por meio de explorações, viagens comerciais e conquistas que se estabeleceram durante séculos pelos Continentes Americano, Africano e Índia. Durante esse período expansionista europeu nasceram Marin Mersenne e Pierre de Fermat, matemáticos que proporcionaram à humanidade ganhos relacionados a números primos.

Marin Mersenne (1588-1648) foi um influente matemático, teórico musical, teólogo e filósofo. Em 1644, Mersenne conjecturou que os números $M_n = 2^n - 1$, $n > 1$, são primos para n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 e 257 e compostos para todos os outros primos n < 257. Logo, esse trabalho ficou conhecido como os "*primos de Mersenne*". Uma das questões em aberto na matemática é se existem finitos ou infinitos primos de Mersenne. Os primeiros números constan no quadro abaixo e os maiores primos de Mersenne foram obitidos por meio de computação pelo *Great Internet Mersenne Prime Search* (GIMPS).

n	M_n	Dígitos	Data	Descobridor
2	3	1	Antiguidade	Antiguidade
3	7	1	Antiguidade	Antiguidade
5	31	2	Antiguidade	Antiguidade
7	127	3	Antiguidade	Antiguidade
13	8191	4	1456	Desconhecido
17	131.071	6	1588	Cataldi
19	524.287	6	1588	Cataldi
31	2.147.483.647	10	1772	Euler

Fonte: Adaptado de https://pt.wikipedia.org/wiki/Primo_de_Mersenne.

De acordo com Aragão (2009, p.95, 96) e Eves (2008, p. 389, 390, 391), o francês **Pierre de Fermat** (1601-1665) nasceu em Beaumont de Lomagne, perto de Toulouse, em 17 de agosto de 1601. Foi magistrado e matemático amador, também foi conselheiro do rei no Parlamento de Toulouse. Fermat estudava matemática nos tempos livres.

Teve grande contribuição na Geometria Analítica onde propôs curvas definidas por equações algébricas e na Teoria dos números. Alguns de seus trabalhos sobre a teoria dos números destacamos o "pequeno teorema de Fermat" cujo enunciado é: Se "*n é primo e a é primo com n, então* $a^{n-1} - 1$ *é divisível por n*". Fermat conjecturou em 1637 o famoso "último teorema de Fermat" que consistia na proposição de que "*não existem inteiros positivos x, y, z, n, com n > 2, de modo que* $x^n + y^n = z^n$". Sobre este teorema, o suíço Leonhard Euler (1707-1783) provocou que é verdadeira para n = 3 e o alemão Gustav Lejeune Dirichilet (1805-1859) mostrou para n = 5, entretanto, o matemático inglês Andrew Wiles provou que não é verdade de um modo geral. Fermat também conjecturou sem demonstrar que $f(n) = 2^{2^n} + 1$ é primo para todo inteiro não-negativo n, entretanto, Euler provou em 1732 que f(5) é composto.

A matemática nos século XVIII e XIX

Sabe-se que em pleno século XVIII os conteúdos relacionados a matemática elementar eram ensinados nas escolas secundárias e universidades na Europa. A matemática da época, assentada na geometria analítica, contribuiu para alargar os passos na direção do cálculo diferencial. Neste contexto destacamos Leonhard Euler, Carl Friedrich Gauss e Georg Friedrich Bernhard Riemann.

Em Boyer e Merzbach (2012, p. 303) consta que o suíço Leonhard Euler (1707-1783), estudou matemática, teologia, medicina, astronomia, física e línguas orientais. Em 1727, viajou para a Rússia, onde seis anos mais tarde ocupou a cadeira de matemática da Academia de São Petersburgo deixada por Daniel Bernoulli.

De Eves (2009, p. 472) destaca-se que Euler publicou 530 trabalhos em vida e ainda outros manuscritos que foram publicados pela Academia de São Petersburgo por quarenta e sete anos. Em 1909 a Sociedade Suíça de Ciências Naturais iniciou uma edição que compreendia de 886 trabalhos propostos por Euler.

Euler contribuiu em diversos campos da matemática, dentre eles, fundamentos da análise, séries infinitas, séries convergentes e divergentes, logaritmos e identidades, equações diferenciais, probabilidade, livros didáticos, geometria analítica e teoria dos números.

Em teoria dos números sabe-se que Euler provou que a proposição $f(5) = 2^{2^5} + 1$ de Fermat é um número composto. Em 1736, Euler demonstrou a segunda conjectura conhecida como "pequeno teorema de Fermat", por indução e fez uma generalização da fórmula, a qual ficou conhecida como Função ϕ de Euler.

De acordo com Eves (2009, p. 519) Carl Friedrich Gauss (1777-1855), nasceu em Brunswick na Alemanha e com dezoito anos de idade entrou na Universidade de Gottingen. Em sua tese de doutorado, deu a primeira demonstração do teorema fundamental da álgebra, tal feito foi intentado por Newton, Euler, d'Alembert e Lagrange, porém, sem sucesso.

Gauss contribuiu para a astronomia com o cálculo da órbita de Ceres em 1801, à Geodésia, em 1820 e, quando foi encarregado do levantamento topográfico do Reino de Hannover pelos seus estudos com instrumentos e observações de compreensão da natureza, à eletricidade.

De acordo com Aragão (2009, p. 116), Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), nasceu em Breselenz, Hanover (Alemanha). Em 1846 matriculou-se na Universidade de Gottingen e um ano depois se mudou para a Universidade de Berlin para estudar trabalhos de Jakob Steiner, Carl G. Jacobi, Johann P. Dirichlet e Gotthold M. Eisenstein. Em

1849 defendeu em Göttingen sua tese de doutorado supervisionada por Gauss. (PINEDO e CASTILLO, 2009)

No ano de 1859 publicou um artigo sobre a teoria dos números primos e também trabalhos sobre uma geometria não euclidiana, a teoria das funções de variável complexa, o que daria base a Cauchy e, contribuiu para a teoria da relatividade de Einstein.

O século XX

No cenário relativo à Matemática, surgiu um conjunto de postulados para embasar a geometria euclidiana, plana e espacial, a evolução da teoria dos conjuntos, o conceito de função passou por evoluções acentuadas devido às noções de espaço e geometria.

A chegada da 2ª Guerra Mundial (1939-1945) forçou os governos há um maciço investimento em pesquisa matemática para a construção de uma bomba nuclear e decifrar códigos secretos. Daí, o surgimento e aprimoramento de computadores para uso militar, porém com contribuições enormes da pesquisa matemática e, aqui destacam-se Goldfrey Harold Hardy e Alan Turing.

Para Boyer e Merzbach (2012, p.423), Goldfrey Harold Hardy (1887-1947), nasceu na Inglaterra, e uma de suas maiores contribuições com Ramanujan (1887-1920) foi a contribuição em relação à hipótese de Riemann, isto é, produziram um artigo conjunto a respeito de números primos relacionadas função Zeta.

Ainda em Boyer e Merzbach (2012, p.423), Alan Turing (1913-1954), nasceu na Inglaterra e graduou-se na Universidade de Cambridge, em 1934. Fez doutorado em Princeton, EUA e retornou à Inglaterra. Envolveu-se em projetos de computadores e sistemas de programação para propósitos matemáticos, cálculos de tabelas, números primos e constantes matemáticas. Alan Turing também enveredou pelos números primos, e acreditou que com a invenção dos computadores seria mais fácil desvendar a hipótese de Riemann, entretanto, os computadores contribuíram apenas para encontrar o próximo primo, o próximo zero sobre a linha crítica.

Os avanços recentes

O Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS) foi fundado em 1996 por George Woltman que criou um software com o objetivo de encontrar números primos e, usando código Lucas-Lehmer, em novembro de 1996, Joel Armengaud descobriu o 35º Mersenne.

O software foi distribuído, envolveu um processo manual usando e-mails para solicitar atribuições de trabalho e, em seguida, enviar os resultados de volta, contudo com seu crescimento houve a necessidade de um sistema mais eficiente e Scott Kurowski respondeu a essa necessidade com a introdução do PrimeNet que, com o avanço dos processadores de alto desempenho, chegou ao Prime95.

No seu 20º aniversário, o GIMPS, em 7 de janeiro de 2016, chegou a descoberta do maior número primo conhecido , $2^{74.207.281} - 1$, denominado por Curtis Cooper de $M_{74207281}$, que tem 22.338.618 dígitos.

A pesquisa de primos Mersenne tem sido usada como um teste para hardware de computador e criptografia. Recentemente aconteceu um grande avanço em direção a descoberta de um padrão nos primos, isto é, pesquisadores conseguiram provar que a distribuição dos primos não é aleatória.

Percebe-se neste recorte a respeito dos números primos que a história dos números primos é longa e apresenta reflexos ainda em dias atuais, principalmente no que tange a busca de uma "fórmula" que os gere. De acordo com Ribenboim (1992), tal busca gerou vários tipos de algoritmos, a saber: algoritmos para números arbitrários, algoritmos para números de forma especial, algoritmos justificados, algoritmos baseados em conjecturas, algoritmos deterministas e algoritmos probabilísticos.

Neste sentido, o que se pode afirmar acerca dos números primos é limitado à existência de uma infinidade deles; à não existência de uma fórmula razoavelmente simples para estes; e à possibilidade de reconhecimento da "primalidade" de números de números não excessivamente grandes, o que nos leva a crer que que ainda há muito a ser produzido historicamente acerca do tema e ainda muito a ser descoberto.

Bibliografia consultada e mencionada

ARAGÃO, Maria José. **História da Matemática**.-Rio de Janeiro: Interciência, 2009.

BENTLEY, Peter. **O livro dos números**: uma história ilustrada da matemática. Tradução Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2009.

BOYER, Carl Benjamin, 1906. **Historia da matemática**: tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

BOYER, Carl Benjamim; Uta C. Merzbach; [tradução de Helena Castro]. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.

Costa, Tito Jose Minhava Botelho da. **Os números perfeitos e os primos de Mersenne**. 2015. 65f. Dissertação de Mestrado em Matemática para Professores. Faculdade de Ciências – Departamento de Matemática. Universidade de Lisboa, 2015. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/20623/1/ulfc113672_tm_Tito_Costa.pdf>. Acesso em: 03 fev. de 2017.

CHAQUIAM, M. Um diagrama, um texto. In: MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática**: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016.

CHAQUIAM, M. **História da matemática em sala de aula**: proposta para integração aos conteúdos matemáticos. Coleção História da Matemática para Professores. Natal: Livraria da Física, 2015. 82 p.

CRUZ, Ernesto. **Noções de historia do Pará**: da conquista e colonização à independência. 1937.

DU SAUTOY, Marcus. **A música dos números primos**: a história de um problema não resolvido na matemática. Trad. Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2007.

GARBER, Daniel. O que Mersenne aprendeu da Itália. In: **Discurso**. n. 31. 2000. p. 89-113.

MEDEIROS, Alexandre. Entrevista com Kepler: do seu nascimento à descoberta das duas primeiras leis. In: **Física na Escola**. v. 3. n. 2. 2002. p. 19-33. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol3/Num2/a09.pdf>. Acesso em: 05 fev. 2017.

______. Continuação da entrevista com Kepler: a descoberta da terceira lei do movimento planetário. In: **Física na Escola**. v. 4. n. 1. 2003. p. 19-24. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol4/Num1/a08.pdf>. Acesso em: 05 fev. 2017.

PINEDO, Christian Quintana; CASTILLO, Milagros Quintana. **Cálculo Integral e Funções de Várias Variáveis**. Universidade Federal do Tocantins. Campus de Palmas, Curso de Engenharia Civil/Elétrica, 2009. Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC. Disponível em: <http://www.joinville.udesc.br/portal/professores/milagros/materiais/InteVarVar_19_06_2012.pdf>. Acesso em: 04 fev. 2017.

RAMINELLI, Ronald. O índio e o renascimento português. In: **História Social**. n. 1. 1994. p. 5-28.

RIBENBOIM, Paulo. **Números primos, amigos que causam problemas**: um triálogo com o Papa Paulo. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

______. Os recordes dos números primos. In: **Matemática Universitária**. n. 14. 1992. p. 29-46.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática**: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M.Books do Brasil Editora Ltda., 2012.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de História da Matemática**.-Rio de Janeiro: SBM, 2012. 1ª edição. Coleção PROFMAT

SANTOS, Rafael Nascimento. **A função zeta de Reimann**. 2015. 35f. TCC em Licenciatura em Matemática – Departamento de Matemática – CCT/UEPB.-Paraíba, 2015. Disponível em: <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/7167/1/PDF%20-%20Rafael%20Nascimento%20Santos.pdf>. Acesso em: 04 fev. 2017.

SILVA, Paulo Tadeu. A harmonia mecanicista de Mersenne. In: **Discurso**. n. 37. 2007. p. 75-101.
https://www.uc.pt/fctuc/dmat/departamento/bibliomat/servicos/copy_of_matematicos/Gauss-KF. Acesso em: 04 fev. 2017.
https://www.youtube.com/watch?v=eHp0cQy-2S4. Acesso em: 25 jan. 2017.

Site:

https://docs.gimp.org/2.8/pt_BR/gimp-introduction-history-2-2.html, Acesso em: 05 fev. 2017

CONJUNTOS: sobre a história de sua evolução

Robério Valente Santos
Marcos Fabrício Ferreira Pereira
Miguel Chaquiam

Introdução

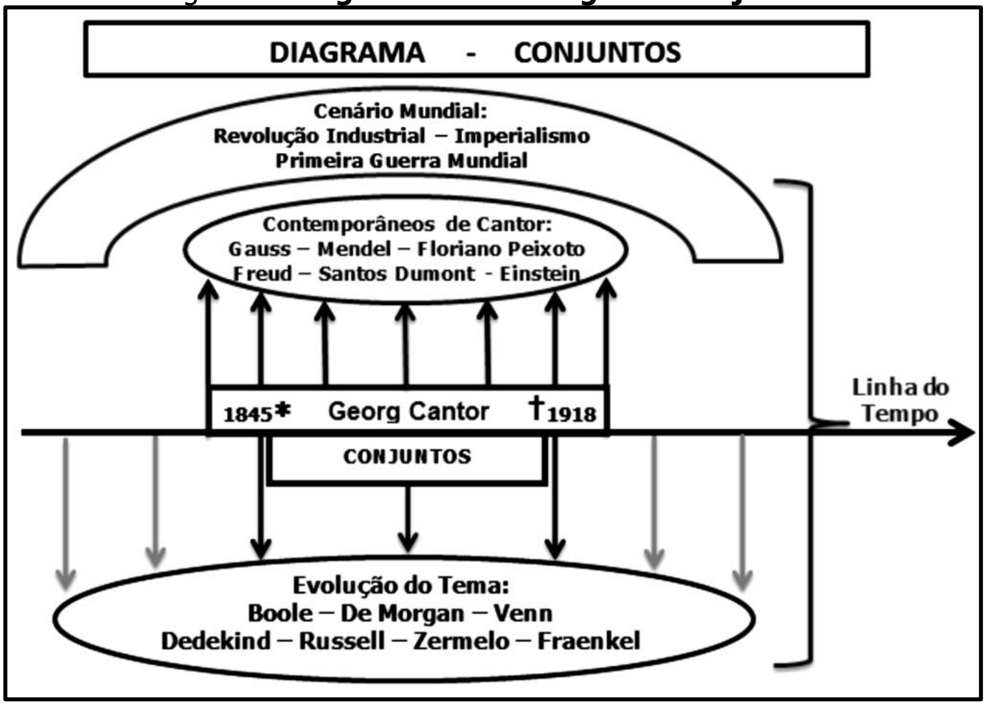
O processo de ensino-aprendizagem da matemática enfrenta diversos obstáculos, dentre eles, a capacitação docente inadequada, o conceito pré-formado de que a matemática é difícil, o uso excessivo da metodologia tradicional frente ao mundo tecnológico, o desinteresse de alunos em querer aprender e de professores em ensinar matemática, a falta de infraestrutura de suporte, etc. (ARAÚJO ET AL., 2014, p. 1) No entanto, devemos buscar novos caminhos na tentativa de superar ou amenizar esses obstáculos com por meio da apresentação de uma matemática ativa, interativa, dinâmica e prazerosa.

O uso de novas tendências metodológicas para o ensino de matemática, como: o ensino por atividades, a história da matemática, a resolução de problemas, os jogos educativos, a modelagem matemática, as tecnologias de informação e comunicação e a etnomatemática são possibilidades que podem contribuir para superar os obstáculos mencionados anteriormente. Essas alternativas nos permitem enveredar por caminhos que tornam o ensino de matemática menos mecânico e com pouca ênfase em regras e fórmulas, mas isso não significa que conceitos e algoritmos sejam descartados, contudo espera-se que a referida disciplina leve o aluno a pensar e que este saia da condição de passividade.

> É preciso substituir os processos de ensino que priorizam a exposição, que levam a um receber passivo do conteúdo, através de processos que não estimulam os alunos à participação. É preciso que eles deixem de ver a matemática como um produto acabado, cuja transmissão de conteúdos é vista como um conjunto estático de conhecimentos e técnicas.
> (D'AMBROSIO, 2003, p. 57)

O objetivo deste trabalho é apresentar uma evolução histórica a respeito dos conjuntos a partir de Boole até Abraham Fraenkel, com ênfase ao personagem Georg Cantor. A escolha desse tema ocorreu pelo fato dos conjuntos permearem toda a Educação Básica. Para alcançarmos tal finalidade nos apoiamos no diagrama-metodológico proposto por Chaquiam (2016). A figura a seguir é uma adaptação do referido modelo para o tema conjuntos.

Figura 1: **Diagrama-Metodológico – Conjuntos**



Fonte: Adaptado de Chaquiam (2016)

Tomamos por base o diagrama acima para apresentar, na sequência, aspectos relativos ao contexto sociocultural dos séculos XIX e XX, fragmentos da matemática neste período, alguns contemporâneos de Georg Cantor, traços biográficos do personagem em destaque e um recorte da história dos conjuntos a partir de George Boole até Fraenkel.

O contexto sociocultural

Em meados do século XVIII iniciou na Inglaterra a chamada Revolução Industrial, caracterizada pela mecanização da produção, expansão do comércio e êxodo rural, que trouxeram profundas consequências econômicas, políticas, sociais e culturais. Esta foi a Primeira Revolução Industrial (1760-1860), marcada pelo uso do carvão, do ferro, da máquina a vapor e da produção têxtil. A Segunda Revolução Industrial (1860-1900) representou um aumento da capacidade produtiva, motivado pelo uso do aço, da energia elétrica, dos combustíveis derivados do petróleo e da invenção da locomotiva a vapor. Esta etapa da revolução industrial se espalhou por países, dente eles, Alemanha, Estados Unidos, França e Japão.

O Imperialismo Europeu ou Neocolonialismo desenvolveu-se a partir da segunda metade do século XIX, no entanto o seu apogeu encontra-se no início do século XX. As revoluções industriais provocaram uma superprodução de produtos manufaturados nas grandes potências mundiais da época - Inglaterra, França, Alemanha, Rússia, Estados Unidos e Japão, que buscaram na África e na Ásia colônias que pudessem servir de novos mercados consumidores e fontes de matérias-primas. O cenário brasileiro deste período foi marcado pela chegada da Família Real Portuguesa ao país (1808), pela independência (1822), pela abolição da escravatura (1888) e pela proclamação da República (1889).

O cenário mundial do século XX foi bastante conturbado, marcado por guerras. Um dos marcos históricos do início desse século foi a Primeira Guerra Mundial (1914-1918), motivada pela busca de novos mercados consumidores e fontes de matérias primas e pela disputa de territórios na Ásia e África as potências mundiais dessa época entraram em conflitos. Uma das consequências disso foi o declínio das potências europeias e a ascensão dos Estados Unidos à condição de principal potência mundial.

Em 1917 ocorreu a Revolução Russa, na qual a classe proletária, constituída principalmente por operários, soldados e camponeses, insatisfeita com o capitalismo e liderados por Lênin instituíram uma nova ordem, o socialismo. O resultado desta revolução foi a criação da União das

Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS) que perdurou até 1991 com o final da Guerra Fria.

A Segunda Guerra Mundial (1939-1945) foi um conflito armado que envolveu a maioria das nações mundiais, organizadas em duas alianças militares, os países aliados, liderados pelos Estados Unidos, União Soviética, França e Império Britânico, e os países do eixo, liderados pela Alemanha, Itália e Japão. Um fato importante deste período foram os bombardeios atômicos as cidades japonesas de Hiroshima e Nagasaki feito pela ofensiva norte-americana em 1945. A guerra terminou com a vitória dos países aliados e como consequência houve uma redefinição da ordem mundial, com EUA e URSS tornando-se superpotências, iniciando o mundo bipolar. Além disso, ocorreu o declínio da influência política, econômica e cultural da Europa.

Estados Unidos e União soviética travaram um conflito ideológico entre dois sistemas antagônicos, de um lado o capitalismo norte-americano e de outro o socialismo soviético, denominado de Guerra Fria (1940–1991), na qual disputavam a hegemonia política, econômica e militar do mundo. Um fato importante deste período foi a divisão da Alemanha, marcada pela criação do muro de Berlim em 1961, que separou a Alemanha Ocidental (capitalista) da Alemanha Oriental (socialista).

Os principais marcos históricos no Brasil foram o auge do ciclo borracha (1879-1912), República do café com leite (1894-1930), Revolução de 30 (1930), era Vargas (1930-1945), Estado Novo (1937-1945), entrada do Brasil na segunda guerra mundial (1942), construção de Brasília (1956-1960), golpe militar de 1964, abertura política (1979), fim da ditadura (1985), promulgação da constituição federal (1988) e plano real (1994). A partir da caracterização contexto sociocultural, enveredamos a seguir pelos caminhos da matemática.

A matemática nos séculos XIX e XX

Na primeira metade do século XIX ocorreram dois acontecimentos matemáticos notáveis e revolucionários. O primeiro feito foi a descoberta de uma geometria autoconsistente em 1829, diferente da geometria usual de Euclides. O segundo foi a descoberta em 1843 de uma álgebra diferente da álgebra usual dos números reais (EVES, 2004, p. 539).

Segundo Eves (2004, pp. 544-548), o surgimento de geometrias não euclidianas ocorreu em 1829 e 1832, quando Lobachevsky e Bolyai deram início ao movimento de "libertação da geometria" ao desconsiderarem um dos postulados de Euclides. Em 1871, Klein nomeou as geometrias de Lobachevsky e Bolyai, a de Euclides e a de Riemann, respectivamente, de geometria hiperbólica, geometria parabólica e geometria elíptica.

Conforme Garbi (2007), no final do século XIX, o matemático inglês George Boole (1815-1877) mostrou que a álgebra poderia se libertar dos números e trabalhar também com outros tipos de entes, como os conjuntos e as proposições da lógica. Esta descoberta, juntamente com estudos dos matemáticos William Rowan Hamilton (1805-1895), Hermann Günther Grassmann (1809-1877) e Arthur Cayley (1821-1895) deram origem ao movimento conhecido como "a libertação da álgebra". Em 1857, Cayley descobriu mais uma álgebra não comutativa, a álgebra das matrizes. Além dos dois movimentos descritos acima, a matemática do século XIX teve um terceiro movimento de extrema relevância, conhecido como "aritmetização da análise".

De acordo com Eves (2004, pp. 655-696), a maior parte dos estudos desenvolvidos na matemática do século XX, está relacionada ao exame dos fundamentos e da estrutura lógica dessa ciência. Com consequência disto, houve a criação da "axiomática", ou o estudo dos sistemas de postulados e suas propriedades. A teoria dos conjuntos, a álgebra abstrata e a topologia se desenvolveram grandemente nesse período. Além disso, ocorreu também o surgimento da lógica matemática, dos números transfinitos, das filosofias da matemática (logicismo, intuicionismo e formalismo) e da matemática moderna e o grupo de Bourbaki.

Dentro de um contexto pluridisciplinar, apresentamos personagens que contribuíram para o meio científico e que foram contemporâneos a George Cantor, dentro do cenário mundial descrito anteriormente.

Contemporâneos de Georg Cantor

Para melhor caracterizar o período de vida de Georg Cantor destacamos os contemporâneos Gauss, Gregor Mendel, Floriano Peixoto, Freud, Santos Dumont e Albert Einstein de áreas do conhecimento científico.

Iniciamos com **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), matemático, astrônomo e físico alemão, nasceu em Brunswick em 30 de abril. Contribuiu em diversas áreas da ciência, a exemplo, teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletrostática, astronomia e óptica. A obra *Indagações Aritméticas* (1798) é considerada por muitos como sua principal. Segundo Eves (2004, p. 519), Gauss é considerado o maior matemático do século XIX, sendo conhecido como o "príncipe dos matemáticos".

De acordo com Eves (2004, p. 519), há uma história atribuída a Gauss, história de que aos dez anos de idade apresentou em poucos instantes o resultado correto, 5050, relativo a soma dos números de 1 a 100, porém sem nenhum cálculo. Muitos associam esse fato a soma dos termos de uma progressão aritmética finita

Gregor Michael Mendel (1822-1884), foi um biólogo austríaco do século XIX, nasceu em 20 de julho num pequeno povoado denominado de Heinzendorf, na atual Áustria. Em 1847 ele foi ordenado monge e logo em seguida ingressou na Universidade de Viena, onde cursou História da Natureza. Mendel é considerado o pai da genética por ter desenvolvido as Leis de Hereditariedade ou Leis de Mendel, apresentadas em 1865 em dois encontros da Sociedade de História Natural de Brno, no entanto as suas teorias só foram reconhecidas cientificamente após a sua morte ocorrida em 06 de janeiro de 1884.

Floriano Vieira Peixoto (1839-1895), foi um militar e político brasileiro, nasceu na cidade de Maceió (AL) em 30 de abril de 1839. Em 1862 se formou em Ciências Físicas e Matemática na Escola Militar do Rio de Janeiro. Floriano foi o segundo presidente do Brasil, após a renúncia de Marechal Deodoro da Fonseca em 23 de novembro de 1891. Os seus três anos de mandato foram marcados pelo uso excessivo da força e pela violência, o que lhe rendeu o título de Marechal de Ferro. Faleceu em Barra Mansa (RJ), em 29 de junho de 1895.

Sigismund Schlomo Freud (1856-1939), ou simplesmente **Sigmund Freud**, nasceu em 6 de maio de 1856 na cidade Freiberg in Mähren, atual República Tcheca, no entanto viveu a maior parte de sua vida em Viena na Áustria. Sua família era judaica e no período nazista ele perdeu quatro das suas cinco irmãs nos campos de concentração, mas Freud e parte de sua família escaparam e conseguiram refúgio na Inglaterra.

Estudou na Universidade de Viena, aonde se formou em medicina, especializando-se em neurológia. Contribui grandemente com o campo da psicologia, sendo considerado o pai da psicanálise, a qual investiga os processos inconscientes. Desenvolveu os conceitos de *id*, *ego* e *superego*. Morreu em Londres, Inglaterra, em 23 de setembro de 1939.

Alberto Santos Dumont (1873-1932) foi um aeronauta, esportista e inventor brasileiro, nasceu na cidade de Palmira (MG) em 20 de julho de 1873. Viveu parte de sua vida em Paris, na França. Ele é considerado o pai da aviação, devido ser o autor do primeiro voo de avião em 1906. Além do famoso avião 14 Bis, Santos Dumont inventou o chuveiro de água quente, o ultraleve, o dirigível e o relógio de pulso. Suas obras publicadas são "Dans-L'air" (1904) e "O que Vi e o que Nós Veremos" (1918). Em 1914 Dumont volta ao Brasil, já muito doente, sofrendo de depressão e esclerose múltiplas em decorrência de ver a sua maior criação, o avião, sendo utilizada como máquina de guerra durante a Primeira Guerra Mundial, o que o motivou a cometer suicídio em 23 de julho de 1932.

Albert Einstein (1879-1955) nasceu em Ulm, na Alemanha, em 14 de março de 1879. Estudou matemática e física no Instituto Politécnico Suíço na cidade de Zurique e, depois de formado, em fevereiro de 1901, adquiriu a nacionalidade suíça. Contribui enormemente para a física, com o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Restrita (1905), na qual apresentou novas concepções sobre tempo, espaço, massa, movimento e gravitação. Desenvolveu em 1915 a Teoria da Relatividade Generalizada, aonde buscou expressar todas as leis da física através de equações covariantes. Einstein é muito lembrado por sua equação de energia, $E = mc^2$, sendo considerado um dos pilares da física moderna. Em 1921 ele recebeu o Prêmio Nobel de Física, devido a sua descoberta da lei do efeito fotoelétrico. Junto com o filósofo britânico Bertrand Russell, assinou o *Manifesto Russell-Einstein*, que destacou o perigo das armas nucleares. Einstein tornou-se um cidadão norte-americano em 1° de outubro de 1940 e morreu em Princeton, EUA, em 18 de abril de 1955.

Os contemporâneos de Georg Cantor, acima apresentados, nos dão uma dimensão dos acontecimentos noutras áreas do conhecimento e suas realizações. A seguir, para conhecermos um pouco mais sobre a vida e obra Georg Cantor, apresentamos um perfil biográfico deste.

Traços biográficos de Georg Cantor

Filho de pais dinamarqueses, Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor nasceu em São Petersburgo, Rússia, em 3 março de 1845. Sua família era extremamente religiosa, o pai de Cantor era um judeu convertido ao protestantismo e a mãe, também descendente de judeus e muito talentosa na música, era católica. Garbi (2007) afirma que de sua mãe, Cantor herdou dons artísticos, tendo sido um talentoso desenhista, como comprovam alguns trabalhos deixados por ele.

A religiosidade da família também influência nos interesses de Cantor pela teologia medieval, sendo decisiva no seu misticismo e em sua forma de enxergar o mundo. Com o intuito de concentrar seus estudos em Filosofia, Física e Matemática, não atendeu a sugestão de seu pai em estudar engenharia.

Mudou-se aos 11 anos para Frankfurt, Alemanha, país onde estudou e viveu quase toda vida. Após estudar em Zurique e Göttingen, em 1867 obteve o doutorado em Berlim, onde foi aluno de Weierstrass. No período de 1869 a 1905, foi professor na Universidade de Halle, porém seu sonho de ensinar em Berlim, considerado um dos melhores centros matemáticos do mundo, jamais se realizou, pois seus pontos de vista nada convencionais encontraram forte oposição, principalmente de Leopold Kronecker, professor da Universidade de Berlim.

Em 1872 ele definiu números irracionais em termos de sequências convergentes de números racionais e, em 1873, provou que os números racionais são enumeráveis, isto é, podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números naturais. Depois de realizar estudos em teoria dos números e em séries trigonométricas, voltou seus esforços para os fundamentos da análise e, mais precisamente, sua atenção para os conjuntos infinitos, tema ao qual se dedicou 25 anos e produziu trabalhos de grande relevância para a matemática.

Cantor sofreu durante a última metade da sua vida repetidos ataques depressivos, fatos que comprometeram a sua capacidade de trabalho e o forçou a ficar hospitalizado várias vezes. Ao final de sua vida passou a ter maior interesse por literatura e religião e desenvolveu o conceito de infinito absoluto, um infinito que transcende os números transfinitos. Faleceu em 6 de janeiro de 1918 no hospital em Halle com doenças mentais.

Uma evolução histórica dos Conjuntos

George Boole, um dos colaboradores do movimento da libertação da Álgebra, nasceu em 2 de novembro de 1815 em Lincoln, Lincolnshire, na Inglaterra, e faleceu em 8 de dezembro de 1864 em Ballintemple, County Cork, na Irlanda. Filho de um lojista, frequentou a escola pública local e, com apoio do dono de uma livraria, aprendeu grego e latim por si mesmo. Foi professor de uma escola primária por três anos até abrir sua própria escola onde sentiu necessidade de aprender alguma Matemática para ensinar aos alunos. Em pouco tempo de estudos, avançou a ponto de entender as difíceis obras de Laplace e Lagrange.

Boole percebeu que as manipulações algébricas não necessitam restringir-se ao âmbito dos números, pois se baseiam em princípios lógicos aplicáveis de forma muito mais ampla. Com isso, associações como $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

(soma) e $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}$ (produto) antes feitas pela "Álgebra" apenas com números, poderiam ser trabalhadas também com outros entes. Assim, podemos citar como exemplo as associações $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ (ou $\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$) e $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$ (ou $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}$), que representam, respectivamente, as operações de soma (ou união) e produto (ou intersecção) dos conjuntos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$.

Seu livro intitulado *The Mathematical Analysis of Logic* (1847) foi ampliado e esclarecido em um livro chamado *Investigations of the Laws oj Thught* (1854) que, segundo Eves (2004), lançou fundamentos da lógica formal e de uma nova álgebra, hoje conhecida como *álgebra booleana*. O trabalho de Boole (1847) foi louvado por De Morgan como uma obra para marcar época.

Augustus De Morgan nasceu em 27 de junho de 1806 em Madura, na Índia, e morreu em 18 de março de 1871, em Londres, na Inglaterra. Frequentou o Trinity College e graduou-se em matemática com distinção máxima em Cambridge. Assumiu em 1828 o cargo de professor da recém-criada Universidade de Londres, onde exerceu larga influência na matemática inglesa através de seus trabalhos e de seus alunos. Foi o primeiro presidente da *Sociedade Matemática de Londres*, fundada em 1866.

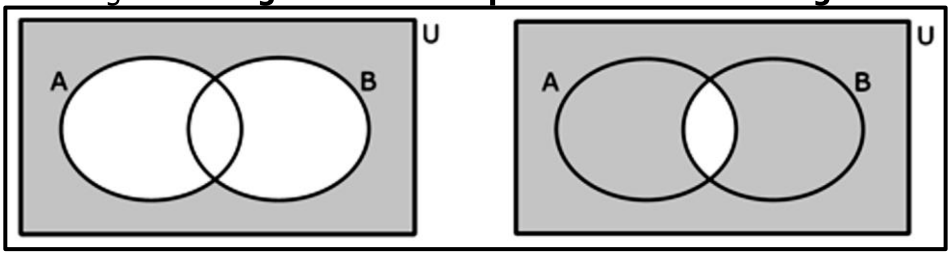
Dando continuidade ao trabalho de Boole, De Morgan enunciou o princípio da dualidade da teoria dos conjuntos que podem ser ilustradas pelas chamadas leis de De Morgan, enunciadas a seguir:

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ subconjuntos de um dado conjunto universo, então

- *o complemento da união de $\mathbf{A}$ com $\mathbf{B}$ é a intersecção dos complementos de $\mathbf{A}$ e de $\mathbf{B}$ ou $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' \cap \boldsymbol{B}'$;*
- *o complemento da intersecção de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é a união dos complementos de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ ou $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' \cup \boldsymbol{B}'$.*

Essas leis podem ser visualizadas utilizando os chamados diagramas de Venn, que segundo Garbi (2007), foram popularizados pelo matemático inglês John Venn, entretanto, foram utilizados um século antes por Leonhard Euler (1707-1783) para testar a validade de raciocínios dedutivos e, de acordo com Eves (2004), os diagramas também foram parte conteúdo de uma das cartas de Euler à princesa Phillipine von Schwedt.

Figura 2: **Diagrama de Venn para as leis de De Morgan**



Fonte: Elaborado pelos autores.

John Venn nasceu no dia 4 de agosto de 1834 em Kingston upon Hull, na Inglaterra. Aos três anos ficou órfão de mãe e só foi para a escola aos 19 anos, quando ingressou em Cambridge. Em 1857, graduou-se na Universidade de Cambridge e, em 1862, assumiu o cargo de professor nesta universidade para ministrar Ciência e Moral, além disso, estudou e ensinou técnicas lógicas e a teoria da probabilidade desenvolvendo a lógica de Boole, utilizando representações gráficas de conjuntos, através de diagramas que ficaram conhecidos com o seu nome, publicados pela primeira vez na *Philosophical Magazine and Journal of Science*, no artigo *Da representação mecânica e diagramática de proposições e raciocínios*.

Desde 1960, com o Movimento da Matemática Moderna, os diagramas foram introduzidos no ensino de Matemática no que tange a teoria dos conjuntos e funções.

Outro matemático importante para a evolução do conceito de conjuntos foi **Julius Wilhelm Richard Dedekind**. Nascido em 6 de outubro de 1831, em Braunschweig, Alemanha, e morreu na sua cidade natal em12 de fevereiro de 1916 . Segundo Garbi (2007), frequentou o curso de Matemática e Física na Universidade de Göttingen, sendo um dos mais talentosos alunos de Gauss, seu orientador no doutorado obtido em 1852. Em sua maior obra *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* (A continuidade e os números irracionais), publicada em 1872, consta a principal ideia geradora do *Corte de Dedekind*, que era compreender o que distingue a grandeza geométrica contínua das grandezas representadas pelos números racionais, fato que o levou a concluir que a definição de número irracional dada pelos cortes de Dedekind.

Dedekind procurou fornecer na, maioria de seus trabalhos, uma compreensão rigorosa sobre a natureza dos números reais. Para o embasamento lógico e dedutivo da teoria dos números reais, buscou ideias na Grécia, onde os gregos associavam números (inteiros, racionais e os irracionais do tipo $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc.) a segmentos de reta.

Na época de Dedekind eram conhecidos outros tipos de números irracionais, não apenas aqueles conhecidos pelos gregos na antiguidade. Nesse sentido, Dedekind decidiu postular o hoje conhecido como Axioma de Dedekind-Cantor, isto é, *todos os tipos de números reais poderiam ser postos em correspondência biunívoca com todos os pontos de uma reta*.

Os principais estudos de George Cantor dizem respeito aos conjuntos infinitos e a questão dos seus tamanhos, ou seja, como existem infinitos números naturas e infinitos números irracionais, haveria uma forma de comparar estas duas infinidades, de se saber se uma é maior que a outra?

Desde o tempo de Zenão de Eléia que viveu por volta de 450 a.C., a ideia de infinito já era bastante sutil e por meio desta, pode-se produzir alguns paradoxos de difícil explicação, podemos citar os paradoxos de Zenão (Eves, 2004, p.418).

Outra importante observação sobre os conjuntos infinitos foi feita por Galileu Galilei (1564-1642) quando fez a correspondência de cada natural com o seu quadrado, notando assim que cada número da linha inferior também pode ser encontrado na linha superior. Galileu concluiu que no conjunto infinito dos naturais a parte é igual ao todo, batendo de frente com a ideia de Euclides, segundo a qual, para conjuntos finitos, a parte é sempre menor que o todo.

Gauss escreveu em 1831 que *o infinito é apenas uma figura de linguagem: uma forma abreviada para a afirmação de que existe limites dos quais certas relações podem se aproximar tanto quanto nós desejamos, desde que permitamos que outras magnitudes cresçam sem qualquer restrição*.

Cantor mostrou que para se comparar o "tamanho" de dois conjuntos não era necessário contar o número de elementos de ambos. Por exemplo, para sabermos a quantidade de dedos em cada mão é a mesma, basta colocar uma sobre a outra e verificar se cada dedo de uma mão se corresponde a um dedo da outra, sem necessariamente precisar contar os dedos.

De modo geral, Cantor mostrou que a possibilidade de se estabelecer uma relação biunívoca entre elementos de dois conjuntos finitos assegura que tais conjuntos possuem o mesmo número de elementos. Mas ele foi além, estendendo este critério para conjuntos infinitos e disse que todo conjunto que pudesse ser colocado em correspondência biunívoca com os naturais era enumerável.

Cantor criou também a figura de um número cardinal transfinito, correspondente à infinidade dos números naturais, pondo-se assim a pesquisar os conjuntos infinitos, foi ele que utilizou pela primeira vez o símbolo $\mathbb{R}$ para representar o conjunto dos números reais, fazendo descobertas que deixaram muitos matemáticos da época incrédulos. Um desses matemáticos foi **Leopold Kronecker**, um forte opositor de Cantor que nasceu em 07 de dezembro de 1823, na cidade de Liegnitz, nas proximidades de Breslau, Alemanha. Estudou na Universidade de Berlim e depois na Universidade de Bonn. Atuou no mundo dos negócios no período de 1844 a 1855, onde graças ao seu talento financeiro acumulou uma considerável fortuna. Faleceu no dia 29 de dezembro de 1891, em Berlim.

Segundo Eves (2004), após sua mudança para Berlim em 1855, Kronecker passou a lecionar na Universidade local, onde se especializou em teorias das equações, funções elípticas e teoria dos números algébricos. Condenava o trabalho de Cantor, visto que considerava os trabalhos mais de teologia do que matemática, pois acreditava que toda matemática devia se basear em métodos finitos desenvolvidos e a partir dos números inteiros.

No final do século XIX e início do século XX, a descoberta de alguns paradoxos abalou a teoria dos conjuntos. Um desses paradoxos foi descoberto por **Bertrand Arthur William Russell**, nascido em 18 de Maio de 1872 na cidade de Ravenscroft, País de Gales, e faleceu em 2 de Fevereiro de 1970 em Penrhyndeudraeth, no mesmo pais de nascimento. Considerado um popularizador da filosofia, Russell foi respeitado por inúmeras pessoas e considerado como uma espécie de profeta da vida racional e da criatividade. Em 1902, enuncia o paradoxo que ficou conhecido como Paradoxo de Russell, que de acordo com Eves (2004), seu enunciado é:

> Representamos por M o conjunto de todos os conjuntos que são membros de si próprios e por N o conjunto de todos os conjuntos que não membros de si próprios. Perguntamos então se N é um membro de si próprio ou não. Se N é um membro de si próprio, então N é um membro de M e não de N e, portanto N não é membro de si próprio. De outra parte, se N não é um membro de si mesmo, então N é membro de N e não de M, ou seja, N é membro de si próprio.
>
> (Eves, 2004, p. 674)

Muitos outros paradoxos foram encontrados desde então. A existência de tais paradoxos mostrou algumas fragilidades na teoria de Cantor, não faltando propostas de solução para essas questões. Para Eves (2004) uma saída matemática simples para estas questões seria a reconstrução da teoria dos conjuntos com *uma base axiomática suficientemente restrita para eliminar as antinomias conhecidas.*

Ernst Zermelo e Abraham Fraenkel fizeram as primeiras tentativas no sentido de axiomatizar à teoria de Cantor, porém o procedimento que ficou conhecido como axiomas de Zermelo-Fraenkel foi bastante criticado pelo fato deste simplesmente evitar paradoxos, não explicando o porquê deles. Outra tentativa de eliminar os paradoxos na teoria de Cantor foi procurar o problema na lógica, o que desencadeou investigações minuciosas nos fundamentos da lógica, adotando assim uma lógica trivalente, ou seja, uma lógica com afirmações verdadeiras, falsas e *indecidível*.

Considerações sobre o texto apresentado

O recorte histórico feito sobre a evolução do conceito de conjuntos nos permite perceber que Cantor, inspirado pelas ideias de Zenão e Galileu, contribuiu de maneira significativa para chegarmos aos conceitos que temos hoje, mesmo encontrando grandes opositores à sua teoria, como por exemplo, Kronecker.

Neste sentido, a abordagem histórica proposta neste trabalho pode contribuir para que professores e alunos da licenciatura em matemática tenham um olhar mais crítico sobre os conceitos matemáticos e, muito provavelmente, obter respostas aos seus questionamentos sobre o processo de ensino e de aprendizagem de conjuntos.

Bibliografia consultada e mencionada

ARAÚJO, Adjanny Vieira Britode; ATAÍDE, Ana Raquel Pereira de; MONTENEGRO, Dhiego Souto. **Atividades adidáticas no ensino de matemática: uma compreensão da realidade vivida na escola.** In: Anais do I Congresso Internacional de Educação Inclusiva – CINTEDI. Anais ... Brasil/Paraíba, 2014. Disponível em: http://editorarealize.com.br/revistas/cintedi/trabalhos/Modalidade_1dataho

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** 2 ed. São Paulo: Blucher, 1996.

CHAQUIAM, M. Um diagrama, um texto. In: MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática**: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016.

CHAQUIAM, M. **História da matemática em sala de aula**: proposta para integração aos conteúdos matemáticos. Coleção História da Matemática para Professores. Natal: Livraria da Física, 2015. 82 p.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da teoria à prática. Campinas/SP: Papirus, 2003.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

GARBI, Gilberto G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática.** 2 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

LOPES, Lidiane Schimitz e FERREIRA, André Luis Andrejew. **Um olhar sobre a história nas aulas de matemática**. Revista Abakós. Belo Horizonte (MG): Ed. PUC Minas, 2013.

RONAN, Colin A.. História Ilustrada da Ciência. São Paulo: Círculo do Livro, 1987.

GRANDEZAS: uma história dos comensuráveis e incomensuráveis

Marcelo Baia da Silva
Saul Rodrigo da Costa Barreto
Miguel Chaquiam

Introdução

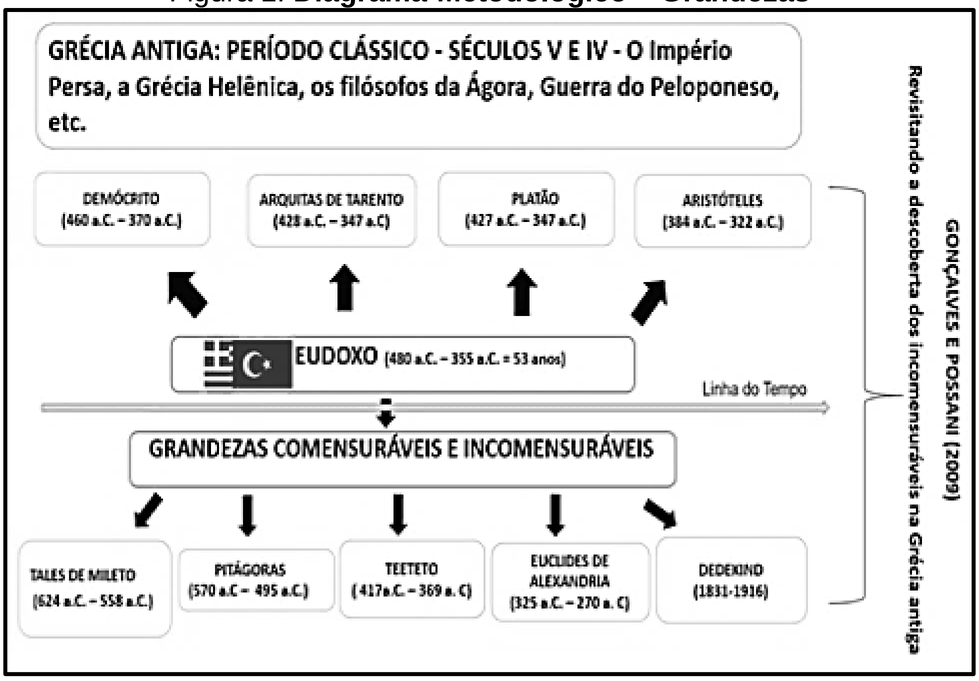
Este trabalho tem como objetivo apresentar um estudo a respeito das grandezas comensuráveis e incomensuráveis ao longo da história, desde os estudos de Tales de Mileto, dos pitagóricos, incidindo em Eudoxo, o personagem em foco, até a construção dos números reais por Dedekind, além de perpassar pelo contexto cultural, social e político de alguns estudiosos desse tema, em particular Eudoxo, criador da teoria das proporções, temos em vista também situar seu desenvolvimento ao longo história, bem como os desafios enfrentados.

> O magistral tratamento dos incomensuráveis formulado por Eudoxo aparece no quinto livro dos *Elementos* de Euclides, e essencialmente coincide com a exposição moderna dos números irracionais dada por Dedekind em 1872.
> As abordagens de razoes e proporções e de semelhança de triângulos apresentadas nos textos de geometria das primeiras décadas deste século destinados ao ensino secundário refletem as dificuldades e as sutilezas na questão das grandezas incomensuráveis. Nessas abordagens consideram-se dois casos, dependendo da comensurabilidade ou incomensurabilidade de certas grandezas.
> (EVES, 2011, p.107)

Nesse sentido, observa-se que a partir das dificuldades dos matemáticos gregos em aceitar as grandezas incomensuráveis é que surge o tratamento dado por Eudoxo para tal problema, ou seja, a criação da teoria das proporções que, posteriormente, veio a influenciar Dedekind na composição teórica dos números reais. Para tal abordagem, começamos as pesquisas com a intenção de construir uma visão histórica da humanidade nos Séculos V e IV a.C., mais especificamente no período clássico na Grécia antiga, com análises práticas, ensinamentos e enfoques culturais, bem como o desenvolvimento científico e tecnológico da população da época para então nos atermos ao personagem em foco, estudando suas produções e o desenvolvimento de seu saber matemático, observando seus contemporâneos e personagens importantes que contribuíram para a evolução dos conhecimentos acerca das grandezas comensuráveis e incomensuráveis.

Tendo em vista o uso desse texto em sala de aula, foi elaborado um diagrama a partir de Chaquiam (2016), para subsidiar o conteúdo matemático, assim como balizar a construção de uma história, a fim de abordar pensamentos e métodos matemáticos acerca das grandezas comensuráveis e incomensuráveis.

Figura 1: **Diagrama-Metodológico – Grandezas**



Fonte: Elaborado pelos autores a partir do modelo de Chaquiam (2016)

Tendo como referência o diagrama, o professor poderá trabalhar em sala de aula, começando na apresentação do tema e do personagem em foco (no nosso caso foi Eudoxo); em seguida o professor faz uma pequena abordagem de como era o cenário mundial na época deste personagem, colocando em cena seus contemporâneos, figuras celebres que contribuíram de alguma com seus trabalhos para a história da ciência em geral; agora o ele retoma o foco para a evolução do tema, fazendo alguns questionamentos que o levarão a explanação da evolução do tema em questão: como iniciaram os primeiros estudo? Quem estudou? Passando assim pelas contribuições do personagem principal até estudos mais recentes acerca do tema. E para um fechamento mais conciso, o docente poderá mostrar olhares de pesquisadores mais atuais sobre o tema ou sobreo personagem principal. Dessa feita, acreditamos que o professor poderá trabalhar com sucesso a história da matemática como recurso didático que muito o auxiliará no processo de Ensino e aprendizagem na sala de aula.

Na próxima secção faremos uma abordagem da história da Grécia no período clássico, época em que viveu Eudoxo, bem como mostraremos seu contexto sociocultural e político.

A Grécia nos séculos V e IV a.C.

No início do século V a.C., é importante ressaltar que os gregos tiveram que enfrentar a ameaça dos persas, cujo Império chegou a abranger a Líbia, as cidades gregas da Ásia Menor, o Egito, a Trácia e a Macedônia, controlando importantes regiões fornecedoras de alimentos (como trigo, por exemplo)

O império Persa

O império Persa (559-330 a.C.) representado pela dinastia Aquemênida, que por causa disso é chamado também de Império

Aquemênida, tem sua linhagem remonta ao rei Aquêmenes que governou a Pérsia entre 705 e 675 a.C. Os Aquemênidas alcançaram o domínio do Oriente Médio sob o governo de Ciro II da Pérsia, bisneto de Aquêmenes, quando este subjugou a Média e todas as outras tribos arianas da área do atual Irã conquistando em seguida a Lídia, a Síria, a Babilônia, a Palestina, a Armênia e o Turquestão, fundando o Império Persa.

As conquistas foram levadas adiante por seu filho Cambises II, que conquistou o Egito, e Dario I, que expandiu o poderio persa até a Europa, conquistando a Trácia e consolidando seu poder na Anatólia formando o maior império que o mundo de então tinha visto. No auge de seu poder, os Aquemênidas governavam um império que abrangia cerca de 8 milhões de quilômetros quadrados ao longo de três continentes: Ásia, África e Europa. Em 480 a.C., estima-se que 50 milhões de pessoas viviam no Império Aquemênida.

> O formidável e extenso Império Persa (atuais Irã, Iraque, Síria, Egito e partes da Índia e Ásia Menor), que atingira seu apogeu nos séculos V e IV, com Ciro, Cambises, Dario e Xerxes, seria derrotado e ocupado por Alexandre, após destruir sua capital, Persépolis (331 a. C).
>
> (ROSA, 2012, p.98).

Após a tentativa frustrada de Dario de conquistar a Grécia, o Império Aquemênida começou a declinar. Décadas de golpes, revoltas e assassinatos enfraqueceram o poder da dinastia, embora o império continuasse relativamente poderoso. Por volta de 330 a.C., os persas não suportaram as incursões e ataques do rei macedônio Alexandre, o Grande. Sendo assim, em 330 a.C., o último rei aquemênida, Dario III, foi assassinado por um de seus sátrapas, Besso, e o primeiro Império Persa caiu em mãos dos gregos e macedônios.

A Grécia Helênica

A Grécia Helênica (800-336 a.C.) segundo Eves, apresentou um grande crescimento intelectual e cientifico surpreendente, um período notável, no que diz respeito as realizações humanas. Era o viver e o pensar grego. O período testemunhou realizações intelectuais extraordinárias.

> A Grécia Helênica era um mosaico de cidades-estados e de pequenas fazendas dispersas. Não era uma planície ampla dividida por rios grandes e lamacentos, como o Egito e a Babilônia; ao contrário, era um pais cortado por longas cadeias de montanhas íngremes e por baias sinuosas que penetravam fundo seu interior. Seus vales eram estreitos e pontilhados de grandes pedras, seus rios, rasos e seu solo, ressequido. Suas cidades-estados separavam-se umas das outras por montanhas íngremes e alcantiladas; suas fazendas, em vales pequenos, eram divididas por afloramentos de rochas e por trechos de terra infértil. Devido em parte a seu isolamento e em parte as dimensões restritas das áreas circunvizinhas, as pequenas cidades e fazendas da Grécia Helênica estavam resguardadas de projetos expansionistas. E inegável que os gregos fizeram várias guerras, mas raramente uma cidade-Estado conseguia anexar outra. Alguns fazendeiros gregos ricos chegaram a formar grandes propriedades, mas nunca na escala observada no Egito ou na Babilônia. Nesse cadinho, onde poder e riqueza estavam dispersos, era viável a criação de republicas democráticas; e foi isso exatamente o que os gregos fizeram na cidade de Atenas sobranceira as ilhas que pontilhavam o golfo Sarônico.
>
> (EVES, 2011, p.91)

Segundo o teórico, o azeite e o vinho de Atenas eram considerados os mais finos da região do mar mediterrâneo. Sem mencionar as produções artística advindas das mãos dos artesãos da cidade, que eram vendidos tanto dentro quanto fora da Grécia. O mercado de Atenas, a ágora, era o principal elo que ligava as transações comerciais do mediterrâneo oriental, sendo que toda vida intelectual girava em torno da ágora. Ali pessoas de todos os tipos se reunião para conversar.

> Filósofos como Sócrates (469? - 399 a.C.) e Platão (427? -347 a.C.), cientistas como Aristóteles (384-322 a.C.) e dramaturgos

> como Aristófanes (445? - 385? a.C.) sentavam-se a sombra, cercados de discípulos, admiradores e cidadãos interessados e trocavam ideias. Embora a *ágora* ateniense fosse a maior da Grécia Helênica, outros mercados, em outras cidades comerciais, como Corinto, Rodes e Mileto, tinham uma função semelhante.
>
> (EVES, 2011, p.92)

Os gregos foram os primeiros a romper as algemas do conservadorismo e a libertar a razão, capacitando-a mais e mais. No que tange ao brilhantismo nos mais diversos campos, como da educação, das artes, do direito, da política, da medicina e da filosofia, os gregos foram os criadores da ciência e os iniciadores do espírito científico. Tudo isso, foi fruto de um longo e complexo processo de desenvolvimento e aperfeiçoamento e, não apenas de gênio ou de uma geração privilegiada

Período Clássico

Grécia vivia o período clássico, caracterizado pela hegemonia e imperialismo das cidades de Atenas, Esparta e Tebas. Um momento marcado por invasões e conflitos. Entretanto mesmo com tais conflitos, muitos estudiosos acreditam que a Grécia viveu nesse período, seu apogeu como civilização, devido as mudanças político-administrativas em Atenas e a disseminação desse modelo para as outras cidades-estados gregas (como Esparta e Tebas) acabaram deixando marcadas o auge da Antiguidade grega.

> O resultado Principal das vitórias Gregas foi a expansão e a hegemonia de Atenas. Nessa cidade, sob o domínio de Péricles, na segunda metade do século V a.C., os elementos democráticos tornaram-se cada vez mais influentes. Constituíam a força condutora da expansão econômica e militar e, por volta de 430 a.C., fizeram de Atenas não apenas a cabeça do Império Grego, mas também o centro de uma nova e fascinante civilização – A idade de ouro da Grécia.
>
> (STRUIK, 1992, p.75).

No governo de Péricles, a Grécia viveu um ápice cultural, pois ele protegeu os artistas e ordenou a construção de vários monumentos. A estátua de Zeus olímpico, construída pelo escultor Fídias, foi considerada uma das maravilhas do mundo antigo. Templos, teatros, anfiteatros e Odeons eram construído em mármore para a grandeza da Grécia, para que ela fosse vista pelos estrangeiros e sua beleza divulgada no mundo inteiro. Seus padrões de colunas eram invejados e copiados por outros povos.

A Guerra do Peloponeso

No ano de 431 a.C., a rivalidade econômica e política existente entre Atenas e Esparta e as cidades aliadas culminou na guerra do Peloponeso (431 a.C. – 403 a.C.), trazendo destruição, conflitos sociais e empobrecimento. Em Atenas, os vestígios de uma guerra prolongada deixou um rastro de ruina aos pequenos camponeses que foram obrigados a abandonar suas terras e a se mudar para área urbana. A derrota de Atenas trouxe a instalação de oligarquias em toda a Grécia.

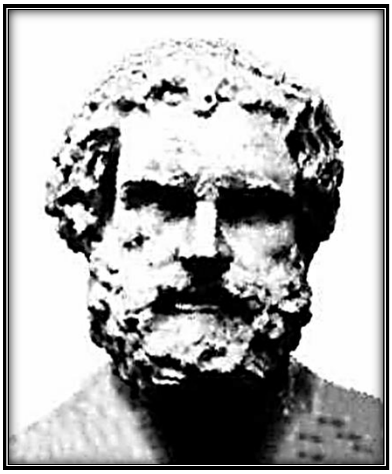
> A paz chegou ao fim em 431 a.C. com o início da Guerra do Peloponeso entre Atenas e Esparta. Foi um conflito inusitadamente longo. Atenas, ao início vitoriosa, foi assolada por uma peste devastadora que matou um quarto de sua população; e por fim, em 404 a.C., teve de aceitar uma derrota humilhante. Esparta assumiu a liderança grega que só veio a perder em 371 a.C. ao ser derrotada por uma liga de cidades-estados rebeldes.
>
> (EVES, 2011, p.131)

Com o fim da Guerra do Peloponeso, em 403 a.C., veio o período marcado pela hegemonia de Esparta até 362 a.C., seguida pela supremacia da cidade de Tebas. Os constantes desentendimentos bélicos entre as cidades gregas somente conseguiram abalar a unidade do país, propiciando a Filipe II que concretizasse a conquista da Grécia em 338 a.C., na batalha de Queronéia. Felipe foi sucedido por seu filho Alexandre, o grande, (336 a.C. – 323 a.C.), que fundou o Império Macedônico, englobando a Grécia, a Pérsia, a Mesopotâmia e o Egito. Chegava ao fim o mais brilhante período da Grécia antiga.

Os contemporâneos de Eudoxo

O grego Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) viveu durante o Período Clássico Grego, marcado por muitos conflitos e invasões imbricados em um cenário de guerra, que marcou o contexto político e social da Grécia nesse período. Frente a esse cenário, cabe mencionar alguns dos contemporâneos de Eudoxo, como:

Demócrito de Abdera



"De todos os meus contemporâneos tenho coberto o mais terreno em minhas viagens, fazendo as perguntas mais exaustivas do tempo; tenho visto a maioria dos climas e países e ouvidos o maior número de homens instruídos." (DEMÓCRITO)[2]

A Idade Heroica da Matemática foi marcada por grandes produções matemáticas, mas também pelos atores que participaram desse período. Dentre eles, estava Demócrito de Abdera, o qual era conhecido como o filósofo da Química. Ele viveu aproximadamente entre os anos de 460 a 370 a.C., foi quem propôs uma doutrina materialista atômica. Além disso,

[2] Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Democritus.html>

teve destaque no campo da geometria e grande conhecimento na área da matemática, fruto das inúmeras viagens realizadas. Passou por Atenas, Egito, Mesopotâmia e, provavelmente, pela Índia. Por causa dessas viagens, ele foi considerado o homem que mais viajou em seu tempo em busca de conhecimento. (BOYER, 2010, p. 54)

De acordo com Boyer (2010, p. 55), Demócrito escreveu inúmeras obras em matemática, a saber, "Sobre os números, Sobre a geometria, Sobre tangências, Sobre representações e Sobre irracionais", sendo que estas não foram preservadas e se perderam com o tempo. Todavia, depois de séculos, foram atribuídos a ele muitos trados de matemática e química, dentre estes, estão antigos trados de alquimia e os livros sobre o pitagorismo, sobre a ordem do mundo e sobre ética.

Sobre a teoria atômica de Demócrito, de acordo com O'Connor e Robertson (1999), esta provavelmente tenha sofrido influências tanto de seu professor Leucipo e de Anaxágoras, pois ambos propuseram anteriormente um sistema atômico, e também dos pitagóricos, por meio da teoria dos sólidos regulares, com relação à constituição do universo. No entanto, a proposição de Demócrito apresentava uma configuração mais elaborada e sistemática do mundo físico, do que a teoria dos seus antecessores. Como mostra o trecho a seguir.

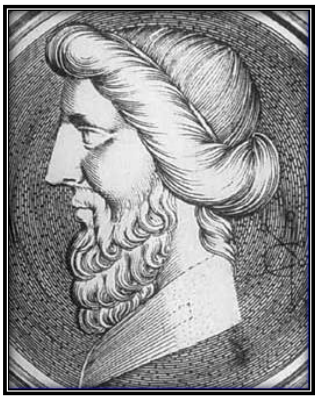
> [...] o espaço, ou o Vazio, tinha um direito igual com a realidade, ou Ser, para ser considerado existente. Ele concebeu o Vazio como um vácuo, um espaço infinito no qual movia um número infinito de átomos que constituíam o Ser (isto é, o mundo físico). Esses átomos são eternos e invisíveis; absolutamente pequeno, tão pequeno que seu tamanho não pode ser diminuído (daí o nome de atomon, ou "indivisível") ; absolutamente cheio e incompressível, como eles são sem poros e preencher inteiramente o espaço que ocupam; e homogênea, diferindo apenas em forma, disposição, posição e magnitude.[3]

[3] Disponível em: <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Democritus.html>

Demócrito acreditava, segundo Boyer (2010, p. 55), que o surgimento do mundo e de tantos outros, foram resultados ordenados ou coagulações de átomos em grupos que apresentaram alguma semelhança. De acordo com O'Connor e Robertson (1999), a teoria atômica de Demócrito não abriga espaço para crer que o mundo tenha surgido por uma intervenção Divina. "Este não foi um mundo que surgiu através do design ou propósito de algum ser sobrenatural, mas sim um mundo que surgiu por necessidade, isto é, pela própria natureza dos átomos."

Apesar da teoria atômica de Demócrito fosse imbricada de leis matemáticas, a Idade Heroica foi lembrada, segundo Boyer (2010, p. 56), pelo legado matemático que abrangeu seis problemas, a saber, quadratura do circulo, duplicação do cubo, trissecção do ângulo, razão de grandezas incomensuráveis, paradoxo do movimento e validade dos números infinitesimais. Assim, essa época ficou marcada pela ousadia em atacar problemas imprescindíveis da matemática, por esse motivo ficou conhecida como Idade Heroica que compreendeu o período de Anaxágoras até Arquitas.

Arquitas de Tarento



"Para se tornar conhecedor de coisas que não se sabe, é preciso aprender com os outros ou descobrir por si mesmo. Agora a aprendizagem deriva de outra pessoa e é estrangeira, ao passo que descobrir é por e por si mesmo. Descobrir sem procurar é difícil e raro, mas com a busca é manejável e fácil, embora alguém que não sabe como procurar não pode encontrar." (ARQUITAS)[4]

[4] Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/biograf/tarento.php>

Esse grego, segundo O'Connor e Robertson (1999), viveu em Tarentum (hoje Tarento), sul da Itália, por volta de 428 a.C. até 350 a.C. Fora matemático, estadista e filósofo também chegou a ser comandante chefe das forças em Tarento por sete anos, pois buscou formar uma aliança com as cidades gregas, com o objetivo de proteger os pitagóricos contra as ofensivas não-gregas.

De acordo com os autores, Arquitas foi aluno de Filolaus e defendia a filosofia dos Pitágoras, a qual tinha como premissa que a matemática canalizava para o entendimento de todas as coisas.

Arquitas, na concepção dos autores, foi um estudioso da matemática e considerava que as outras disciplinas dependiam desta. Ele dividiu a matemática em quatro ramos, ou seja, em geometria, aritmética, astronomia e música, o que ele chamou de quadrivium. Trabalhou com a média harmônica, nome dado por ele, com o interesse no problema de duplicação do cubo, que consistia em descobrir o lado de um cubo com o dobro do volume do cubo dado. Além disso, o grego fora considerado, por vezes, como o fundador da mecânica, pois inventou dois artefatos, a saber, uma ave mecânica e um chocalho para crianças.

Ainda sobre alguns dos feitos de Arquitas cabe ressaltar que ele

> Escreveu sobre as utilizações das médias aritméticas e geométricas, sobre métodos interativos para determinação de raízes quadradas e, também, sobre geometria analítica e introduziu o estudo da média harmônica na música. Com relação à música escreveu Harmonia, da qual conhecemos alguns fragmentos, e sempre a achou mais importante que a literatura no ensino das crianças, dentro de um núcleo educacional denominado de quadrivium, formado pelas aritmética, geometria, música e astronomia. Suas ideias contribuíram para que a Matemática se tornasse matéria básica na educação atual[5].

Arquitas de Tarento, segundo O'connor e Robertson (1999), via a política e a ética sobre o prisma da matemática, da seguinte forma:

---

[5] Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/biograf/tarento.php>

> Quando o raciocínio matemático foi encontrado, ele verifica a facção política e aumenta a concórdia, pois não há vantagem injusta em sua presença, e a igualdade reina. Com o raciocínio matemático suavizamos as diferenças em nossas relações uns com os outros. Através dele os pobres tomam dos poderosos, e os ricos dão aos necessitados, ambos confiando nela para obter uma parte igual[6] [...].

O grego Arquitas fora um homem justo e prudente, porque considerou a razão a responsável pelo aprimoramento da sociedade. Era também bondoso e apreciava as crianças. (BOYER, 2010, p. 48)

Arquitas sobrepujou a Aritmética da geometria, pois acreditava na eficiência dos números e na filosofia pitagórica. Ele também afirmou que entre dois inteiros que estão na razão n : (n + 1) não poderia haver um número inteiro que fosse um média geométrica. Ainda mais, acreditava que a matemática era importante porque influenciava no aprendizado. Assim, a participação considerável da matemática no cenário da educação se deve, em boa parte, a Arquitas. (BOYER, 2010, p. 49)

Plalão (ou Plato)

"[...] que a realidade que o pensamento científico está procurando deve ser expressível em termos matemáticos, sendo a matemática o tipo de pensamento mais preciso e definido do qual somos capazes. O significado dessa ideia para o desenvolvimento da ciência desde o início até o presente tem sido imenso."[7]

[6] Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Archytas.html>.
[7] Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Plato.html>.

Um filósofo eminente da Grécia antiga que exerceu influência no mundo pagão e na ideologia da igreja Romana por intermédio de Santo Agostinho. Ele nasceu e morreu em Atenas (427 – 345 a.C.), fora aprendiz de Sócrates e adquiriu conhecimentos pitagóricos quando viajou pela África do Sul e pela Itália, os quais foram utilizados em suas doutrinas. Em 387 a.C., criou a célebre Academia que perdurou até o ano de 529 d.C., como o último centro da cultua helenista pagã, sendo fechada pelo imperador Justiniano. Platão teve interesse pela política, o que fez escrever sobre a arte de governar e concepção da Sociedade humana, além de ter participado do processo de ensinar a governar uma cidade, Siracusa. Em seus escritos sobre filosofia, cerca de 30 diálogos e inúmeras cartas, prevaleceu o uso do método da Dialética. (ROSA, 2012, p. 128-129)

Na República de Platão, escrita por volta de 360 a.C., encontram-se os ideias da classe dirigente esclavagista. Os membros da República, provavelmente, estudaram os quadrivium, composto pela aritmética, geometria, astronomia e música, para compreender a leis do universo. Neste cenário, discutiu-se sobre os fundamentos da matemática e da cosmogonia especulativa. Participaram dessa época da Academia de Platão os matemáticos Arquitas, Teeteto e Eudoxo. (STRUIK, 1992, p. 83)

Sobre Platão, Boyer (2010, p. 58) afirmou que "Embora o próprio Platão não tenha dado contribuição específica digna de nota a resultados matemáticos técnicos, ele era o centro da atividade matemática da época e guiava e inspirava o seu desenvolvimento."

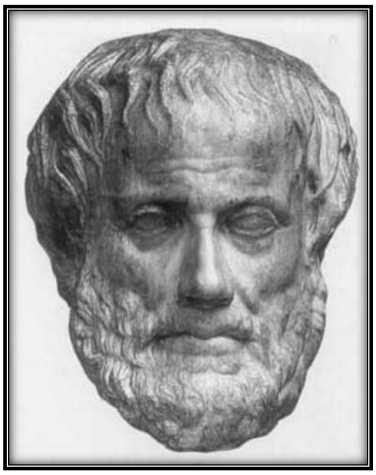
Nas portas da Academia de Platão estava a frase "Que ninguém que ignore a geometria entre aqui". Por se interessar pela Geometria, Platão ficou conhecido não como matemático e sim como o "criador de matemáticos." (BOYER, 2010, p. 58)

Na perspectiva de Boyer (2010), é provável que Arquitas tenha influenciado Platão a enveredar pela Matemática, quando visitou aquele em Sicília por volta de 388 a.C.. Nessa viagem, talvez, Platão obteve conhecimento acerca dos cinco sólidos regulares. Esses eram ligados aos quatro elementos de Empédocles (terra, fogo, ar e água). O culto dos pitagóricos ao dodecaedro fez com que Platão o considerasse o quinto e último sólido regular como uma representação do universo. Os poliedros regulares foram chamados de corpos cósmicos ou sólidos platônicos, pela maneira como Platão os utilizou para explicar os fenômenos científicos.

Aqui cabe ressaltar, de acordo com Boyer (2010, p. 59) que citou Proclo, que foram os Pitágoras que construíram as figuras cósmicas e Teeteto quem, a priori, escreveu sobre eles. E mais, consta no livro XIII dos Elementos de Euclides que os Pitágoras tinham conhecimento sobre três dos cincos sólidos regulares, mas foi somente por meio de Teeteto que o octaedro e icosaedro ficaram conhecidos.

A biografia de Teeteto e algumas das suas contribuições para a Matemática serão apresentadas adiante no contexto da evolução do tema, como um dos personagens partícipe na abordagem acerca das grandezas incomensuráveis.

Aristóteles



"Mas meu argumento não rouba de qualquer modo os matemáticos de seu estudo, embora nega a existência do infinito no sentido de existência real como algo aumentado a tal ponto que não pode ser passado completamente; Pois, como eles são, eles não precisam do infinito ou usá-lo, mas apenas exigem que a linha reta finita deve ser o tempo que quiserem. ... Portanto, não fará diferença para eles com o propósito de provas."[8]

O nascimento de Aristóteles ocorreu, segundo O'Connor e Robertson (1999), em 384 a.C. na Grécia em Estágira, Macedônia, e sua morte por volta de 322 a.C., em Chalcis, Eubéia, no território Grego. Era

[8] Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Aristotle.html>.

filho do médico Nicômaco, o qual fora médico pessoal do rei da Macedônia, Amyntas III, e da Phaestis, sua mãe.

Aristóteles foi considerado o maior filósofo, pensador e cientista da Antiguidade e um dos mais sábios de todos os tempos. Ele redigiu textos sobre Física, Matemática, Biologia, Zoologia, Psicologia, Política, Lógica e Ética. Conviveu na Academia de Platão por um período de quase duas décadas. Também fundou uma escola chamada Liceu, em 334 a.C., após a morte de Platão. A escola de Aristóteles também fora administrada, após a morte deste, por Teofrasto (322 a 287 a.C.), depois por Estratão (287 – 270 a.C.), seguidos de Licon (270-228 a.C.), Crátetes e Arcesilau. Essa escola destinou-se ao estudo e a pesquisa em inúmeras áreas, sobretudo, nas Ciências Naturais, Astronomia e Física. (ROSA, 2012, p. 131)

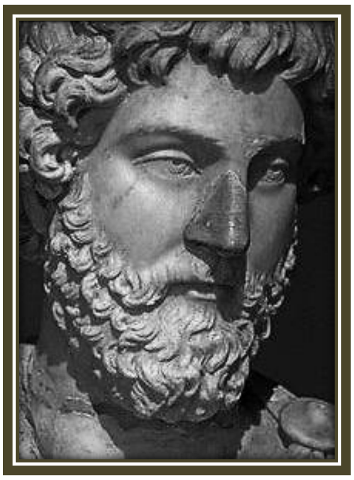
A obra de Aristóteles, segundo Rosa (2012), estava divida em dois tipos, a saber, uma para o grande público, escrita em forma de diálogo como o Eudemo, que abordava a imortalidade da alma, Protético, apresentava um elogio à vida contemplativa, Sobre a Filosofia, essa era contrária à teoria platônica das ideias. A outra obra se destinava aos alunos e abordava sobre Ciências e Filosofia.

No final do século V a.C., de acordo com Roque e Carvalho (2012, p. 61-62), Aristóteles, bem como Platão, procurou encontrar meios que apurassem os tipos de afirmação que uma pessoa podia fazer, para diferenciar o juízo falso do correto e, assim, determinar critérios de verdade. Nesse período, as opiniões eram vastas, por isso foi imperativo a criação de critérios que decidissem quem estava com a razão, o que para Platão serviu para distinguir os indivíduos perceptíveis de suas cópias. Tudo isso deveria estar fundamentado em definições inteligíveis. Frente a esse cenário, Aristóteles desenvolvera, a posteriori, uma lógica, onde os critérios de verdade estavam ligados com o nexo e ao rigor da demonstração, ou seja, num conjunto de conclusões as ideias deveriam convergir daquilo que foi falado anteriormente, sem que houvesse contestação do raciocínio. Assim, Aristóteles e Platão utilizaram da Matemática para erigir esta nova forma de pensamento.

Aqui cabe ressaltar que as concisas biografias apresentadas nessa seção são apenas um recorte na História da Matemática, onde procuramos enfatizar alguns dos feitos desses importantes homens que viveram na Grécia antiga e que se debruçaram em inúmeras tarefas com o fito de contribuir com seus conhecimentos para o avanço da Matemática e outras áreas do conhecimento.

A seguir são mencionadas as contribuições do grego Eudoxo de Cnido para o que foi a crise (ou não) dos fundamentos da matemática, a descoberta das grandezas incomensuráveis.

Eudoxo de Cnido (408 a.C - 355 a.C)



"Eu, de boa vontade, morreria queimado como Faetonte, se esse fosse o preço a pagar para alcançar o sol e saber qual a sua forma, tamanho e substância". EUDOXO (BOYER, 1996, p.57)[9]

Eudoxo, também chamado de Eudoxo de Cnido, nasceu em 408 a.C na antiga cidade grega de Cnido, na Ásia menor (atualmente é Knidos e pertence a Turquia), foi um matemático, astrônomo e filosofo que viveu durante o período clássico grego, que foi marcado por muitas disputas e invasões, que foi o pano de fundo político e social da Grécia nesse período (EVES, 2011).

O Eudoxo de Cnido foi discípulo de Platão e, também o primeiro a descrever satisfatoriamente as esferas celestes e um dos primeiros a

[9] Fonte: http://calculaveis.blogspot.com.br/2009/06/eudoxo.html

descrever o movimento do sol, da lua e dos cinco planetas conhecidos da época. Não são muitas as informações disponíveis sobre ele. Sabemos que ele esteve na cidade de Tarento, na Itália, onde estudou com um discípulo muito promissor de Pitágoras, cujo nome era Arquitas. E Por pertencer a uma família de pessoas que pendiam para a medicina, Eudoxo estudou Medicina na Sicília, antes de se dirigir para Atenas, onde ficou algum tempo participando de muitas discussões sobre filosofia e astronomia com Platão e outros estudiosos (só matemática)[10].

> A academia platônica de Atenas tornou-se centro matemático do mundo, e dessa escola provieram os principais mestres e pesquisadores durante os meados do quarto século a.C. Desses o maior foi Eudoxo de Cnido, que foi um discípulo de Platão e tornou-se o mais célebre matemático do seu tempo.
>
> (BOYER, 1996, p.61)

> Eudoxo, além disso, não era apenas um matemático e na história da ciência é conhecido como o pai da astronomia cientifica.
>
> (BOYER, 1996, p.64)

Eudoxo elaborou um trabalho que entraria para a história, registrou pela primeira vez que a duração do ano não era só de 365 dias, mas 365 dias e seis horas. Ele foi também o gerador da ideia de explicar o movimento dos planetas e das estrelas, por meio de uma composição de esferas concêntricas, deixando a terra no centro e variando os raios, cada uma variando uniformemente, em torno de um eixo fixo em relação a esfera posterior em torno da Terra. Esse tipo de sistema chegaria a um patamar superior, quase meio milênio depois, com os estudos de outro grego muito famoso, Ptolomeu, de Alexandria. (MacTutor History of Mathematics archive)[11]

Segundo Boyer (1996), Eudoxo foi com toda certeza o melhor matemático da idade helênica, contudo suas produções se perderam, mas sua influência é observada na maioria das obras de autores que o

[10] http://www.somatematica.com.br/biograf/eudoxo.php

[11] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Eudoxus.html

sucederam. Ficou conhecido como um dos matemáticos mais brilhantes de sua época, por dominar muito as técnicas da geometria conhecida. Seus trabalhos merecem todos nossos créditos, quando elabora procedimentos matemáticos para calcular a área de superfícies. Assim, através desta sua técnica, que ficou conhecido como "Método da Exaustão", trabalha com figuras curvilíneas e trata os conceitos dos infinitésimos, o conceito de Soma Superior e Soma Inferior, o que muito influenciaria os criadores do cálculo integral.

> Segundo Arquimedes, foi Eudoxo quem forneceu o lema que hoje tem o nome de Arquimedes, as vezes chamado axioma de Arquimedes e que serviu de base para o "método da exaustão", o equivalente grego do cálculo integral.
>
> (Boyer, 1996, p.62, 63)

> O método de exaustão, que pode ser considerado como a resposta da escola platônica aos paradoxos de Zenão, comumente e creditado a Eudoxo (c. 370 a.C.). O método admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e sua base e a proposição: Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará pôr fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.
>
> (EVES, 2011, p.419)

Assim, podemos representar o Método da Exaustão utilizando o cálculo da área do círculo. Para tanto, temos de inscrever e circunscrever polígonos regulares na figura geométrica no círculo. Percebe-se que à medida que os lados dos polígonos aumentam, temos uma convergência para a área real do círculo. Na maioria das vezes Eudoxo não escreveria suas conclusões acerca da matemática. Apenas transmitia seus resultados via oral. Contudo, estas conclusões passaram de pessoas a pessoas, de geração em geração, chegando aos homens do século XX. Dessa forma Eudoxo, através de sua genialidade, de sua conjectura, principalmente, em ter criado o método de exaustão, contribuiu de forma significativa e definitiva para o advento das ideias de Newton, Leibniz e Riemann, na elaboração do trabalho mais importante dos últimos tempos: o desenvolvimento das integrais[12].

> A primeira crise nos fundamentos da matemática ocorreu no século V a.C.; na verdade, essa crise não poderia ter ocorrido muito antes pois, como vimos, a matemática, como ciência dedutiva, não e anterior ao século VI a.C., tendo se originado talvez com Tales, Pitágoras e seus discípulos. A crise se desencadeou com a descoberta de que nem todas as grandezas geométricas da mesma espécie são comensuráveis; mostrou-se, por exemplo, que a diagonal e o lado de um quadrado não admitem uma unidade de medida comum. Como a teoria pitagórica das grandezas se baseava na crença intuitiva de que todas as grandezas da mesma espécie deveriam ser comensuráveis, a descoberta de segmentos incomensuráveis provocou grandes transtornos. Por exemplo, toda a teoria pitagórica das proporções, com todas as suas consequências, teria que ser jogada fora por infundada. A superação dessa crise não foi fácil nem rápida. Foi levada a efeito por volta de 370 a.C. pelo brilhante Eudoxo, cuja revisão da teoria das grandezas e proporções e uma das grandes obras-primas matemáticas de todos os tempos. A notável abordagem dos incomensuráveis de Eudoxo pode ser encontrada no quinto livro dos Elementos de Euclides e coincide em essência com a moderna teoria dos números irracionais dada por Richard Dedekind em 1872. Focalizamos essa primeira crise na Seção 3-5 e sua resolução na Seção 5-5. É bem possível que essa crise seja grandemente responsável pela subsequente instituição e adoção do método axiomático em matemática.
>
> (EVES, 2011, p.673)

Pelo exposto acima, Eudoxo, Contribuiu muito para o desenvolvimento da matemática. Ele elaborou fórmulas para calcular o volume dos cones e das pirâmides. Contudo a maior parte de seu esforço foi dedicada a estabelecer comparações entre segmentos. Elaborou, então, uma teoria das proporções na qual incluiu as chamados grandezas incomensuráveis, teoria que tantas discussões gerou no passado.

[12] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Eudoxus.html

Personagens e grandezas comensuráveis e incomensuráveis

Tales de Mileto

Tales viveu, segundo Rosa (2012, p. 121), entre os períodos de 624 a 558 a.C., era estadista, filósofo, matemático e astrônomo. Foi o primeiro filósofo grego e fundador da Escola Jônica, além de ser, considerado por muitos, o pai da Filosofia e dos Sete Sábios da Grécia.

Entre as convicções de Tales, de acordo com Rosa (2012), acreditava que a terra era plana como se fosse um disco, via o sol e a lua como vapores abrasadores que navegavam pelo firmamento. Além disso, ele previu, de acordo com Heródoto citado pelo autor, o Eclipse solar em maio de 525 a.C. e via esse acontecimento como um fenômeno natural, sem que houvesse alguma intervenção divina. No campo da Geometria, teve destaque por demonstrar teoremas e fomentar um método que calculava a distância dos barcos até a margem. O que fez de Tales, segundo Cajori (2007, p.45), o primeiro a aplicar à Geometria a usos práticos. Esse autor também afirma que Tales inseriu o estudo da Geometria na Grécia.

Sobre Tales, Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 15) afirmam que

> De Tales se diz que foi a primeira pessoa a tentar demonstrar algum teorema geométrico, inclusive a afirmação de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos, que os lados de triângulos semelhantes são proporcionais e que um círculo é cortado ao meio por qualquer de seus diâmetros.
> (BERLINGHOFF e GOUVÊA, 2010, p. 15)

De acordo com Boyer (2010, p. 32), Tales organizou a geometria dedutiva e demonstrou os seguintes teoremas: "Um círculo é bissectado por um diâmetro"; "Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais"; "Os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais"; "Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são congruentes".

Além desses feitos, nas concepções do mesmo autor, Diógenes Laércio, Plínio e Plutarco afirmaram que Tales descobrira a altura das pirâmides do Egito e para tal feito ela utilizou as sombras de um bastão e das pirâmides.

O fato supracitado ocorrera quando Tales, segundo Cajori (2007, p. 44), viajou pelo Egito, onde permaneceu por alguns anos e durante este tempo estudou com os sacerdotes daquele lugar sobre Física e Matemática. Com o tempo, Tales sobrepujou os seus mestres e ganhara admiração do rei Amasis quando mediu as alturas das pirâmides com auxílio de suas sombras. E, de acordo com Plutarco, "isto foi feito porque a razão do comprimento da sombra de um bastão na vertical para o comprimento da sombra da pirâmide é igual à razão entre as alturas do bastão e da pirâmide."

Sobre o procedimento de Tales no cálculo das alturas das pirâmides, Cajori (2007) conjectura que a solução do problema estivesse imbricada do saber sobre proporção e este era conhecido pelos egípcios por meio do papiro de Ahmes.

De acordo com Diógenes Laércio, citado por Cajori (2007, p. 44), "as pirâmides foram medidas por Tales de modo diferente; a saber, medindo o comprimento da sombra da pirâmide no momento em que o comprimento da sombra do bastão é igual a este."

Diante do exposto, Cajori (2007) diz que certamente as duas maneiras apresentadas foram usadas por Tales para determinar as alturas das pirâmides do Egito.

Frente a esse cenário, é possível que Tales de Mileto tenha se deparado com as grandezas incomensuráveis no enfrentamento de problemas que envolviam razões, como por exemplo, ao abordar razões entre segmentos de retas em um dos teoremas que levou o seu nome, conhecido como Teorema de Tales. "O Teorema de Tales é de importância fundamental em Geometria Plana, pois dele depende toda a teoria sobre semelhança de figuras; em particular, os teoremas sobre semelhança de triângulos." (ÁVILA, 1985, p. 8-9)

O autor do parágrafo precedente afirma que a descoberta dos incomensuráveis, na antiguidade, veio a colocar em dúvida a teoria de

Tales, entre outras, pois era preciso determinar uma forma de demonstrar esse teorema quando estivesse envolvido com segmentos incomensuráveis. Todavia, esse impasse somente foi resolvido com a definição eudoxiana para a igualde de razões, cuja abordagem não se preocupava com a distinção entre grandezas comensuráveis e incomensuráveis. Falaremos mais sobre essa definição quando tratarmos de Eudoxo.

A História da Matemática relata que as grandezas comensuráveis já fazia parte do conhecimento dos matemáticos da antiguidade, entretanto, com a descoberta das grandezas incomensuráveis, o cenário mudou frente às teorias que serviam de base de sustentação para a igualdade de razões. Sobre esse fato, alguns autores atribuem aos Pitágoras à descoberta dessas, quando trataram da razão entre o lado de um quadro e sua diagonal. Sobre este fato, entre outros, relacionado aos pitagóricos, abordaremos a seguir como um dos personagens que contribuiu direta ou indiretamente para evolução do tema, as grandezas incomensuráveis.

Pitágoras

Pitágoras viveu em Samos, uma cidade da Jônia, durante o período de 580 a 497 a.C., aproximadamente. Em Crotana, uma colônia grega no sul da Itália, erigiu a Escola de Pitágoras, onde abordava sobre Filosofia, Matemática e Ciências Naturais. A escola era tida como um confraria ligada por ritos secretos e religiosos. (ROSA, 2012, p. 122; EVES, 2011, p. 97)

A filosofia pitagórica, na concepção de Eves (2011, p. 97), creditava aos números todas as características do homem e da matéria. O que, segundo Rosa (2012, p. 123), explicara o entendimento universal ou a consonância dos divergentes, ou seja, seco com úmido; frio com quente; bom com mau; justo com injusto; masculino com feminino. Além disso, a proporcionalidade admitiria uma sistematização ordenada de opostos no mundo, isto é, no Cósmos, e este por possuir uma estrutura harmônica estaria presente em todas as coisas e também na alma.

Nos relatos de Proclo, onde citou Eudemo, foram creditadas aos Pitágoras duas descobertas, a saber, a construção dos sólidos regulares e a teoria das proporcionais. (BOYER, 2010, p. 38)

Esse autor relata ainda que Pitágoras teve conhecimento das médias aritmética, geométrica e harmônica na Mesopotâmia, sendo que esta última era conhecida como média subcontrária.

Ao matemático Pitágoras fora atribuído, segundo Eves (2011, p. 103), um teorema na Geometria sobre triângulos retângulos que levou o seu nome. Esse teorema era conhecido dos povos babilônios, entretanto, fora demostrado, a priori, por Pitágoras.

Na concepção de Eves (2011, p. 104), os números inteiros estavam relacionados aos processos de contar coleções finitas, no entanto, frente às atividades que exigiam outras habilidades matemáticas, como por exemplo, medir, foi preciso criar outros números chamados de racionais, os quais compreendiam todos os inteiros e as frações. Assim, para os matemáticos daquele tempo, todo número racional podia ser representado geometricamente por um ponto na reta. Todavia, Pitágoras percebeu que não havia nem um número racional na reta, que representasse a diagonal de um quadrado cuja medida do lado fosse um. Com isso, surgiam os números irracionais como uma descoberta dos Pitágoras.

A descoberta dos números irracionais, segundo Eves (2011, p. 105), trouxera um descrédito a filosofia pitagórica, a qual acreditava que tudo dependia dos números inteiros e qualquer grandeza poderia ser representada por um número racional.

A definição de proporção dos Pitágoras também ficou comprometida com a descoberta dos números irracionais, pois aquela acreditava que duas grandezas de mesma espécie sempre seriam comensuráveis, o que invalidou a teoria geral das figuras semelhantes dos pitagóricos.

Com a descoberta das grandezas incomensuráveis, quando não é possível expressar a razão de duas grandezas por meio de dois números inteiros, Boyer (2010) e Eves (2011) compartilham que houve uma crise nos fundamentos da matemática, todavia, Roque (2012, p. 122) contrapõe às ideias desses dois autores, ao afirmar que

> A possibilidade de existirem grandezas incomensuráveis não teria representado, assim, nenhum tipo de escândalo ou crise no fundamento da matemática grega. Ao contrário, sua existência seria uma circunstância positiva, pois teria sido responsável pelo desenvolvimento de novas técnicas matemáticas para lidar com razões e proporções.
> (ROQUE, 2012, p. 122)

De posse do trecho supracitado, é razoável acreditar que, de certa forma, os Pitágoras contribuíram para o fomento de ideias, a posteriori, que viessem a contornar a problemática das incomensuráveis, visto que esta teve origem na escola pitagórica. Outro fato é que a teoria pitagórica das razões se mostrava inadequada para enfrentar as grandezas incomensuráveis, e que, presumidamente, foi preciso criar outras formas para lhe dar com tais grandezas, como foi o caso da antifairese, utilizada por Teeteto e a definição de Eudoxo para a teoria das proporções.

As contribuições de Teeteto para Matemática e para as grandezas incomensuráveis serão apresentadas a seguir, além disso, fora um dos personagens da História da Matemática que, segundo Boyer (2010, p. 59), escreveu um vasto estudo acerca dos cinco sólidos regulares.

Eudoxo

Observando à teoria das proporções, a definição elaborada por Eudoxo permitia a comparação de comprimentos ou grandezas incomensuráveis (irracionais) de maneira semelhante a multiplicação em cruz. Para a matemática da época, uma das grandes dificuldades era que certas grandezas não eram comensuráveis.

> A descoberta de grandezas incomensuráveis foi feita pelos pitagóricos; e representou um momento de crise na Matemática [...]
> [...] dizer que a razão de dois segmentos A e B é a fração m/n significa dizer que existe um segmento δ tal que A = mδ e B = nδ. Ora, com a descoberta dos

> incomensuráveis, ficou claro que isso nem sempre seria possível. Como então poderia o número ser o fundamento de todos os fenômenos naturais, se nem sequer eram suficientes para exprimir a razão de dois segmentos?
>
> (ÁVILA, 2005, p.53)

Segundo Ávila (2005), hoje é fácil de compreender que a crise provocada pela descoberta dos incomensuráveis seria resolvida com a entrada das frações e dos números irracionais. Contudo, os gregos trilharam outro caminho, trabalhando um modo de se expressar em igualdade de razões mesmo as grandezas incomensuráveis. Com isso, Eudoxo cria a teoria das proporções que só dependia dos números naturais.

> "O Livro V e uma exposição magistral da teoria das proporções de Eudoxo. Foi por meio dessa teoria, aplicável tanto a grandezas comensuráveis como a grandezas incomensuráveis, que se resolveu o "escândalo logico" decorrente da descoberta dos números irracionais pelos pitagóricos."
>
> (EVES, 2011, p.163)

Eudoxo, com a sua definição de igualdade de duas razões, ele cria a teoria da proporções, apenas com uso de números naturais, a pesar que tenha sido uma solução brilhante da crise, segundo Ávila (2005), ela atrasou por mais de um milênio o desenvolvimento da Aritmética e Álgebra, sobretudo, porque submeteu essas áreas ao estudo da Geometria, como é mostrado muito bem na exposição feita nos Elementos de Euclides.

Eudoxo morreu em 355 a.C. em Cnido, sua cidade natal, apesar de suas obras na matemática, astronomia e até na geografia não terem chegado aos dias de hoje, é sabido por estudiosos que o sucederam nesses campos, que Eudoxo escreveu Sobre os contatos de um círculo e de uma esfera, Sobre a Geometria, Sobre os números e Sobre as linhas e os sólidos irracionais (Rosa, 2012).

Segundo Rosa (2012), competiu a Eudoxo a demonstração do famoso Teorema de Hipócrates de Quíos – que aparece no livro XII de Os Elementos de Euclides – sobre a proporcionalidade das áreas dos círculos aos quadrados dos seus diâmetros. A contribuição de Eudoxo para a

Matemática foi extraordinária, porque não se limitou apenas a demonstração de teoremas, à elaboração da Teoria das Proporções e à demonstração do método de exaustão; esclareceu também as proporções do segmento áureo e criou o método formal de apresentar teoremas e axiomas geométricos. Eudoxo é, igualmente, famoso na Astronomia, pois foi o autor da Teoria das Esferas Homocêntricas, conceito astronômico de grande influência durante os 1800 anos seguintes e influenciou inúmeros astrônomos ao desenvolvimento dessa ciência.

Teeteto

Nas concepções dos autores O'Connor e Robertson (1999), Teeteto viveu no período entre 417 a 369 a.C em Atenas na Grécia e, de acordo com Boyer (2010, p. 59), era amigo de Platão e filho de um dos mais ricos patrícios da Ática. Esse autor relatou também que Teeteto desenvolvera um estudo extenso sobre os cinco sólidos regulares e fora o primeiro a escreve sobre eles, visto que os Pitágoras só conheciam apenas três desses sólidos.

Com a morte de Teeteto, segundo Boyer (2010), Platão homenageou o amigo ao atribuir a palavra "Teeteto" ao nome de um diálogo que aconteceu entre Teeteto, Sócrates e Teodoro. Na ocasião se discutiu sobre as grandezas incomensuráveis. E mais

> Supõe-se que essa discussão tomou mais ou menos a forma que encontramos no início do livro X de *Os elementos*. Aqui são feitas distinções não só entre grandezas comensuráveis e incomensuráveis, mas entre aqueles que, sendo incomensuráveis em comprimento, são ou não são incomensuráveis em quadrado. Raízes como $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ são incomensuráveis em comprimento, mas não são comensuráveis em quadrado, pois seus quadrados têm razão 3 e 5. As grandezas $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ e $\sqrt{1+\sqrt{5}}$, por outro lado, são incomensuráveis tanto em comprimento quanto em quadrado.

(BOYRE, 2010, p. 59)

Outra menção foi atribuída a Teeteto, com base nas concepções dos historiadores Freudenthal, Knorr e Fowler, citada por Roque (2012, p. 119), no que tange o fomento de um método chamado antifairese, onde era utilizado em situações que envolviam a prática com razões, isto durante o período do século IV.

Fowler, citado por Roque (2012), afirma que no lapso pré-Euclides era comum o uso da teoria de razão por meio da antifairese sem a verificação de proporções.

A respeito da etimologia e do método antifairese, Roque (2012, p. 119) destaca:

> A palavra antifairese vem do grego e significa, literalmente, "subtração recíproca". Na álgebra moderna, o procedimento é semelhante ao conhecido como "algoritmo de Euclides" e sua função é encontrar o maior divisor comum entre dois números. O procedimento das "subtrações mútuas", ou "subtrações recíprocas", consiste em: dados dois números (ou grandezas), em cada passo subtrai-se, do maior, um múltiplo do menor, de modo que o resto seja menor do que o menor dos dois números considerados. O método da antifairese descreve uma série de comparações. (Grifo da autora)
>
> (ROQUE, 2012, p. 119)

O método supracitado, segundo a autora, podia ser aplicado para comprar dois segmentos de reta, de tal forma que o último segmento encontrado, após as mútuas subtrações, coubesse um número inteiro de vezes em cada um dos segmentos anteriores. Dessa forma, era possível aproximar a geometria à aritmética, pois cada segmento teria uma medida. Assim, a semelhança entre figuras podia ser vista pelo viés da proporção aritmética, ou seja, pela igualdade das razões entre números. Todavia, essa abordagem não era válida diante das grandezas incomensuráveis; o que reduziu a eficácia da antifairese somente para casos particulares, ou seja, com as razões comensuráveis.

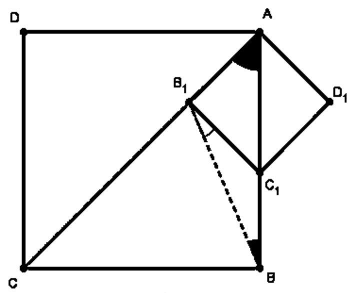
O historiador Fowler destacou que a técnica da antifairese foi utilizada para fomentar uma teoria de razão que não dependesse da proporção. Para esse historiador, a tradição grega perpassava por três formas de razão, a saber, uma da teoria musical, outra da astronomia e uma outra da antifairese.

Roque (2012) destaca que a tomada de conhecimento sobre as grandezas incomensuráveis ocasionou um cenário propício para avanços na Matemática e defende que não houve uma crise, contrapondo os relatos de alguns textos históricos que defendem que a crise existiu.

Em última análise, Roque (2012) defende que a incomensurabilidade tenha sido descoberta por meio de uma abordagem geométrica na antiguidade por volta dos anos 430 a 410 a.C., e esta descoberta teria sido difundida pelos trabalhos de Teeteto. Seus trabalhos mostraram que duas razões são incomensuráveis em um problema que usou o lado para medir a diagonal de um quadrado.

Sobre este fato, Roque (2012, p. 127) apresenta o procedimento da antifairese com algumas adaptações à linguagem atual, onde mostra que o lado e a diagonal do quadrado são grandezas incomensuráveis, a saber.

> Seja o quadrado ABCD de lado AB e diagonal AC. Suponhamos que AB e AC sejam comensuráveis, logo existe um segmento, AP, a unidade de medida, que mede AB e AC. Em primeiro lugar, queremos construir um quadro menor que ABCD cujo lado esteja sobre a diagonal AC e cuja diagonal esteja sobre o lado AB.
>
> Seja B_1 um ponto em AC tal que $B_1C = AB$. Marcando um ponto C_1 sobre AB (com B_1C_1 perpendicular a AC), podemos construir um quadrado $AB_1C_1D_1$ de lados $AB_1 = B_1C_1$ e diagonal AC_1 sobra AB. Isso é possível porque $C\hat{A}B = B_1\hat{A}C_1$ é a metade de um ângulo reto; e $A\hat{B}_1C_1$ é um ângulo reto. Logo, $A\hat{C}_1B_1$ é ½ reto; e o triângulo AB_1C_1 é isósceles, com $AB_1 = B_1C_1$.



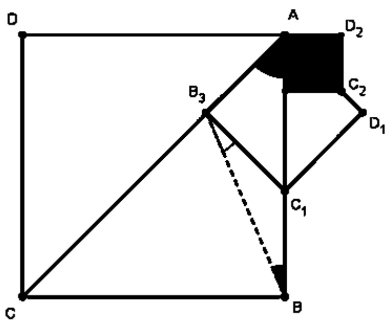
Fonte: GeoGebra/Ilustração 4

Mas como, por construção, $BC = B_1C$, o triângulo BCB_1 é isósceles e temos que $B_1\hat{B}C = B\hat{B}_1C \Longrightarrow B_1\hat{B}C_1 = B\hat{B}_1C_1$ (pois $C\hat{B}C_1$ e $C\hat{B}_1C_1$ são retos). Isso significa que o triângulo B_1C_1B também é isósceles e concluímos que $BC_1 = B_1C_1$. Podemos, assim, exprimir o lado e a diagonal do novo quadrado, AB_1 e AC_1, em função do lado e da diagonal do quadrado inicial, AB e AC:

$AB_1 = AC - B_1C = AC - AB$

$AC_1 = AB - BC_1 = AB - B_1C_1 = AB - AB_1 = AB - AC + AB = 2AB - AC$

Pela igualdade exposta acima, se AB e AC forem comensuráveis com relação à unidade de medida AP, o lado e a diagonal do quadro menor, AB_1 e AC_1, também serão. Para concluir a demonstração, precisamos evidenciar que, do mesmo modo que construímos $AB_1C_1D_1$ sobre o lado e a diagonal de ABCD, podem-se construir novos quadrados, menores, dessa vez sobre o lado e a diagonal do quadrado pequeno $AB_1C_1D_1$.



Fonte*: *GeoGebra/Ilustração 5

Supondo que o lado e a diagonal do novo quadrado são, respectivamente, AB_2 e AC_2, como na Ilustração 5, temos de mostrar que esses segmentos podem ser tornados menores do que qualquer quantidade dada. Isto é, repetimos o procedimento até obter um quadrado de lado AB_n e diagonal AC_n cujos comprimentos são menores do que a unidade AP (quantidade dada), ainda que este seja muito pequena.

Feito isso, continuando o processo indefinidamente, para qualquer que seja a escolha inicial do segmento AP, poderemos obter um quadrado de lado AB_n e diagonal AC_n, comensuráveis em relação a AP, tal que se chegue a $AB_n < AC_n < AP$, o que será uma contradição, uma vez que AP é unidade de medida. Se escolhermos AP menor do que a escolha inicial, teremos o mesmo resultado, logo, não será possível encontrar uma medida comum entre o lado e a diagonal: eles são incomensuráveis. (ROQUE, 2012, p. 127)

Acerca da antifairese entre o lado e a diagonal do quadro com feição geométrica, Roque (2012) afirmou que esse modo de fazer surgiu, provavelmente, nos séculos V e IV a.C., todavia a execução do procedimento não estava vinculada a demonstração da incomensurabilidade.

Outros fatos surgiram a respeito da descoberta dos incomensuráveis, segundo a perspectiva dessa autora, um deles atribuído a Euclides por meio da aritmética. Outro a Aristóteles, no final do século IV a.C., quando se referia à prova da incomensurabilidade por contradição ao afirmar que "se o lado e o diâmetro são considerados comensuráveis um em relação ao outro, pode-se deduzir que os números ímpares são iguais aos pares; essa contradição afirma, portanto, a incomensurabilidade das duas grandezas." (ROQUE, 2012, p. 131)

Na Matemática grega pré-Euclide, os problemas geométricos, de acordo com Roque (2012), eram calculados por meio da utilização de números. Com a descoberta das incomensuráveis, houve o rompimento entre as grandezas e os números. Assim, a reorganização da Matemática só ocorrera depois de muito tempo com a teoria das proporções de Eudoxo, o qual mostrou uma solução que erradicou a dificuldade em representar as razões entre grandezas incomensuráveis.

Sobre a teoria das proporções de Eudoxo para solucionar o problema das grandezas incomensuráveis, ela será abordada com mais detalhes quando voltarmos a falar desse matemático e de sua valiosa contribuição para o avanço da Matemática e de como sua teoria influenciou outras mentes na criação da teoria dos números.

Abordagens de autores que se debruçaram sobre o estudo das grandezas incomensuráveis, com o fito de verificar outros olhares acerca do tema e como estes podem auxiliar no ensino da matemática.

Outros olhares sobre as grandezas incomensuráveis

O trabalho de Gonçalves e Possani (2009) sobre a descoberta das grandezas incomensuráveis relata que os textos dos livros de História da

Matemática e de Matemática trazem duas versões contraditórias com relação ao estudo dos incomensuráveis na Grécia Antiga. Uma versão defende que houve uma crise na matemática, pois os incomensuráveis contrariava a filosofia pitagórica que acreditava que tudo podia ser explicado ou representado pelos números. A outra defende que não houve crise com a descoberta dos incomensuráveis, pelo menos não há registros nas fontes confiáveis sobre a ocorrência da mesma.

Gonçalves e Possani (2009) citam no decorrer do texto alguns trechos de autores que viram a descoberta dos incomensuráveis como uma crise na história da matemática. Esses autores são Boyer (1989), Eves (1969), Kline (1972) e Tannery (1930). Eles atribuíram a descoberta dos incomensuráveis aos Pitágoras, sobretudo ao Hipaso ou aos primeiros pitagóricos.

Contrapondo as ideias dos autores supracitados que defenderam a existência da crise na matemática, Gonçalves e Possani (2009) arrolam alguns pensadores que sustentaram a não ocorrência da crise, entre eles, citamos Grattan-Guinness (1997) e Fowler (1999). Aquele afirmou que Aristóteles não mencionou a existência de crise na Grécia, pelo contrário, enfatizou que os gregos vivenciaram um período de avanços na Matemática; enquanto este, apoiado nos trabalhos de Burkert (1962) e de Knnor (1975), defendeu através de alegação que a descoberta dos incomensuráveis não ocasionou uma crise na Matemática.

Por fim, Gonçalves e Possani (2009) em suas considerações afirmaram que a crise dos incomensuráveis não ocorreu e ela só existiu por falta de um rigor na interpretação das fontes de informação. Alegaram também que esse mal entendido não ocorre apenas na História da Matemática, mas em outras áreas do conhecimento, como por exemplo, na História da Literatura.

Para os autores a versão adequada da história da incomensurabilidade, pelo rigor historiográfico, é de que não houve uma crise no fundamento da Matemática que envolvesse os Pitágoras. Todavia, os trabalhos anteriores que defenderam a existência da crise não devem ser considerados inválidos, pois a história dos incomensuráveis foi escrita por meio de aproximações, como todo fato histórico, sendo estas aprimoradas com novas pesquisas, mas que não tornam as anteriores menos importantes.

No trabalho de Ávila (1984) sobre grandezas incomensuráveis e números irracionais, foi defendido que houve uma crise sustenta na descoberta das grandezas incomensuráveis pelos pitagóricos durante os anos de 450 a 400 a.C., quando esses demonstraram, por meio geométrico, que o lado e a diagonal de um quadrado eram segmentos incomensuráveis.

De acordo com o autor, a descoberta supracitada representou um revés na filosofia pitagórica, a qual era arraigada na crença de que os números representavam todos os fenômenos presentes na Geometria, na Astronomia, na Música e na Física. Os Pitágoras conheciam apenas os números naturais ou inteiros e não consideravam as frações como números, pois elas estavam representadas nas razões entre grandezas de mesma espécie. Com a descoberta dos incomensuráveis, eles perceberam que os números naturais eram insuficientes para relacionar duas grandezas. E mais, o paradoxo de Zeno também contribuiu para um cenário de crise na Matemática, onde a consonância da Geometria com os números ficou comprometida.

Ávila (1984) afirmou que a crise instalada na Matemática só foi resolvida de fato com a criação da teoria dos números reais no século XIX, principalmente, pelos trabalhos do matemático alemão Richard Dedekind (1831-1916). No entanto, o autor mencionou que a crise dos incomensuráveis fora resolvida, a priori, por Eudoxo na primeira metade do 4° a.C., quando esse fomentou uma teoria das proporções que superou a dificuldade das grandezas incomensuráveis ao utilizar somente números inteiros positivos.

Os recortes dos trabalhos de Gonçalves, Possani e Ávila apresentados aqui tentaram mostrar os olhares desses autores sobre o tema das grandezas incomensuráveis e suas perspectivas com relação à existência ou não de uma crise no fundamento da Matemática.

Assim, é relevante que o ensino de Matemática esteja pautado na História da Matemática e, com isso, subsidiar o trabalho do professor em sala de forma consistente em relação à veracidade dos fatos, pois "[...] nenhuma outra disciplina perde mais do que a matemática quando dissociada de sua história" (GLAISHER, apud CAJORI, 2007, p. 2)

Considerações finais

Neste trabalho procuramos ressaltar a importância do ensino das grandezas comensuráveis e incomensuráveis no Ensino Básico, bem como, mostrar que é possível ensinar os referidos conteúdos, levando em consideração o seu desenvolvimento e seus construtores ao longo da história de forma prazerosa e atraente. Dessa forma, o texto proposto é um recorte que têm como objetivo auxiliar a prática pedagógica docente por meio da utilização da história da matemática como recurso didático nas aulas de matemática, em especial de nos estudos das proporções, com intuito de facilitar o processo da aprendizagem dos alunos.

Atualmente é consenso reconhecer que o professor tem um papel fundamental no processo de aprendizagem, uma vez que cabe a esse o papel de se preocupar tanto com a aprendizagem dos conteúdos matemáticos quanto com o desenvolvimento a capacidade geral de aprender. É necessário explorar sua capacidade de equilibrar momentos de fazer com momentos de refletir, auxiliando os aprendizes a construírem os conceitos matemáticos.

Aprender Matemática está intimamente liga com o fazer Matemática, e isso se dá por meio da elaboração de metodologias matemáticas intencionais, que envolvam os mais diversos saberes, pois é assim que as pessoas adquirem conhecimento. Acreditamos que uma das maneiras de ajudar nessa empreitada é utilizar a história da matemática como um recurso didático nas aulas de matemática, e por meio do diagrama aqui apresentado, dispomos de uma grande ferramenta potencial, no que diz respeito a aprendizagem que ele querer transmitir.

Nessa ótica, acreditamos que novas pesquisa devem ser feita, a fim de melhorar este recurso pedagógico, no que diz respeito a sua utilização na escola, para assim, contribuir para a formação tanto dos alunos quanto dos professores, não só em respeito ao ensino-aprendizagem, mas também na sua formação como cidadão.

Referências

ARQUITAS de tarento. Disponível em:
< http://www.somatematica.com.br/biograf/tarento.php>. Acesso em: 04 abr 2017.

ÁVILA, Geraldo. Eudoxo, dedekind, números reais e ensino de matemática. Revista do professor de matemática, São Paulo, n. 7, p. 5-10, 2º semestre. 1985.

______. Grandezas incomensuráveis e números irracionais. Revista do professor de matemática, São Paulo, n. 5, p. 6-11, 2º semestre. 1984.

______. Análise matemática para licenciatura. 2.ed. São Paulo: Edgar Blücher, 2005.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. A matemática através dos tempos. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BOYER, Carl B. História da matemática. 3. ed. São Paulo: Blucer, 2010.

CAJORI, Florian. Uma história da matemática. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.

CHAQUIAM, M. Um diagrama, um texto. In: MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática**: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016.

CHAQUIAM, M. **História da matemática em sala de aula**: proposta para integração aos conteúdos matemáticos. Coleção

História da Matemática para Professores. Natal: Livraria da Física, 2015. 82 p.

CHASSOT, Attico. A ciência através dos tempos. São Paulo: Moderna, 1994.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da teoria à prática. Campinas/SP: Papirus, 2003.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

GONÇALVES, Carlos Henrique B.; POSSANI, Claudio. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na grécia antiga. Revista matemática universitária. Rio de Janeiro. n. 47, p. 16-23, dezembro. 2009.

MOL, Rogério Santos. Introdução à história da matemática / Rogério S. Mol. – Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Archytas de tarentum. In: Arquivo história da matemática. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Archytas.html>. Acesso em: 04 abr 2017.

______. Aristóteles. Arquivo história da matemática. Disponível em: < http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Aristotle.html >. Acesso em: 04 abr 2017.

______. Demócrito de abdera. Arquivo história da matemática. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Democritus.html>. Acesso em: 04 abr 2017.

ROQUE, Tatiana. História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO; João Bosco Pitombeira. Tópicos da história da matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ROSA, Carlos Augusto de Proença. História da ciência: da antiguidade ao renascimento. 2. ed. Brasília: 2012.

SOUSA, Rainer Gonçalves. "Grécia Período Clássico"; Brasil Escola. Disponível em <http://brasilescola.uol.com.br/historiag/grecia-periodo-classico.htm>. Acesso em 10 de abril de 2017.

STRUIK, Dirk J. História concisa das matemáticas. 2. ed. Lisboa-Portugal: Gradiva, 1992.

ANÁLISE COMBINATÓRIA: história para sala de aula

Jorge Tavares de Souza Neto
Ana Paula Nascimento Pegado Couto
Miguel Chaquiam

Introdução

A forma de ensinar matemática vem se tornando um assunto de extrema relevância dentro das salas de aula nos cursos de Licenciatura em Matemática, uma vez que a proposta é estimular os discentes a utilizarem as Tendências da Educação Matemática como metodologia a fim de otimizarem suas aulas e tornarem mais dinâmica e produtivas, para sair do padrão de apresentação de conceitos e exercícios.

Uma das tendências bastante discutidas é a História da Matemática que, segundo Chaquiam (2016) nas ultimas cinco décadas, esta tendência teve um desenvolvimento bastante crescente e que está constituindo um importante elemento para a melhoria do ensino-aprendizagem da matemática nas mais diversas áreas e níveis.

Para Chaquiam (2016) iniciar uma aula apresentando fatos do passado pode ser uma alternativa altamente produtiva para conduzir um determinado assunto matemático, uma vez que o aluno pode notar a matemática como uma construção humana que surgiu a partir da necessidade de solucionar problemas. O autor ainda soma com o seguinte argumento.

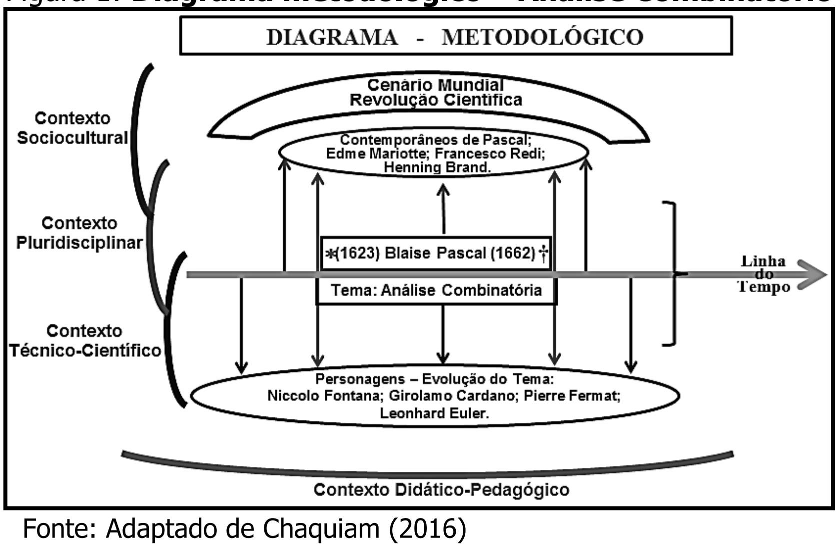
> Neste sentido, os estudos apontam que a história da matemática, combinada com outros recursos didáticos e metodológicos, pode contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática, emerge como uma possibilidade de buscar uma nova forma de ver e entender a Matemática, tornando-a mais contextualizada, mais integrada com as outras disciplinas, mais agradável, mais criativa, mais humanizada. (CHAQUIAM, 2016, p. 2)

Este trabalho aborda a construção histórica do tema Análise Combinatória, conteúdo que, de certa forma, apresenta um índice de rejeição considerável dentre os alunos e os próprios professores. No intuito de dinamizar as aulas deste conteúdo, surgiu o interesse de estudar mais sobre seu contexto histórico, e também para mesclar a história da matemática com a resolução de problemas.

Desta forma, este trabalho tem por objetivo apresentar um texto recorte da evolução histórica do tema Análise Combinatória para o uso em sala de aula na Educação Básica, com base no diagrama desenvolvido por Chaquiam (2016), com o intuito de contribuir com a produção de uma literatura adequada referente ao assunto.

Para tanto, executamos uma pesquisa bibliográfica, de cunho histórico, onde será apresentado o diagrama de base deste artigo, e terá foco as principais contribuições de Blaise Pascal (1623 – 1662) para a Análise Combinatória, este que será o personagem principal desta pesquisa. Tendo como publico alvo discente do curso de licenciatura em matemática que buscam aprimorar seus conhecimentos acerca do tema. Para sala de aula, indicamos sua aplicação para alunos do segundo ano do ensino médio, uma vez que os mesmo iniciam seus estudos sobre Análise Combinatória. Desta maneira, segue o diagrama metodológico adaptado ao conteúdo de análise Combinatória:

Figura 1: **Diagrama metodológico – Análise Combinatório**



Fonte: Adaptado de Chaquiam (2016)

Este trabalho segue com a apresentação do cenário mundial com o intuito de nos situar nas contribuições de cada personagem que será apresentado e para nos auxiliar na localização do espaço acerca dos fatos que ocorriam.

Em seguida apresentaremos um pouco sobre os contemporâneos de Pascal, ou seja, aqueles que viveram no mesmo período e que contribuíram para os mais variados campos da ciência, não necessariamente ao tema proposto. Após este momento, apresentaremos aqueles personagens que tiveram contribuição ao tema, dando foco àquele que titulamos como personagem principal. Seguindo iremos apresentar alguns pontos de vista a respeito do personagem e do tema e finalizaremos com as considerações finais.

Cenário Mundial - A Revolução Científica

Para nos situar em tempo e espaço em torno do personagem principal eleito, neste caso Blaise Pascal (1623 – 1662), será apresentado a seguir o cenário mundial da época que compreende o século XVII.

O século XVII foi um período marcado por reformas no modo de pensar, em que a ciência passou a se desligar da filosofia e passou estar mais ligada aos conhecimentos práticos, estruturados e fundamentados. Este momento da história é conhecido como *Revolução Científica, que compreende* o período que vai de 1550 à 1770 aproximadamente, passando pelo século XVI, por todo o século XVII e parte do século XVIII, embora a expressão "revolução científica" tenha sido criado por Alexandre Koyré só em 1939. (RONAN, 1987)

O início da revolução científica foi marcado pela proposta de Nicolau Copérnico de que a Terra não é o centro do universo e que ela está em constante movimento, esta proposta é o que conhecemos hoje por modelo Heliocêntrico. O período foi marcado por severas mudanças, uma vez que a igreja católica ditava suas regras de acordo com seus conhecimentos religiosos. (RONAN, 1987)

Foi uma época em que a ciência ganhou bastante força, passou a ser mais vista e aceita para uma nova sociedade que estava nascendo. Por sua vez, a igreja católica perdia forças, já que movimentos a favor da revolução científica cresciam cada vez mais. (RONAN, 1987)

O século XVII para a matemática foi de grandes avanços. Segundo Bastos (2016) várias contribuições para a matemática surgiram, assim como a invenção da Geometria Analítica; do Cálculo; da Teoria das Probabilidades e novos campos da ciência. Para a Análise Combinatória, o século XVII foi fantástico, e isso foi possível graças a Teoria das Probabilidades.

Foram vários os efeitos que a revolução científica casou no cenário histórico da humanidade, dentre eles, o marco inicial dessa revolução que foi a criação do modelo Heliocêntrico. A matemática por sua vez obteve muitos nomes que contribuíram para o seu avanço neste período, segundo Boyer (1974), *as figuras principais foram René Descartes (1596 – 1650) e Pierre de Fermart (1601 – 1665), mas três outros franceses contemporâneos também fizeram contribuições importantes, Gilles Persone de Roberval (1602 – 1675), Girard Desargues (1591 – 1661) e Blaise Pascal (1623 – 1662)*. Este último sendo escolhido como personagem principal desta pesquisa.

Contemporâneos de Blaise Pascal

Como já mencionado anteriormente, foi escolhido como personagem principal Blaise Pascal (1623 – 1662), devido seus grandes feitos para a Análise Combinatória, no entanto, para que uma melhor compreensão dos fatos, serão mostrados outros personagens que viveram no mesmo período que Pascal, que são Edme Mariotte (1620 – 1684), Fracesco Redi (1626 – 1697) e Henning Brand (1630 – 1710), de acordo com a ordem elencada.

Edme Mariotte nasceu em Bourgogne, em 1620 e viveu até 1684, foi um físico e hidráulico, deu início aos estudos da física experimental na

Europa, escreveu sobre todas as fases da hidráulica, trabalhou sobre mecânica dos sólidos e dos fluidos, ótica, cores, previsão do tempo, entre outras coisas. Foi o descobridor da chamada lei de Mariotte em 1676 que relaciona o volume com pressão dos gases, estabeleceu também uma lei sobre a deformação elástica dos sólidos. Foi membro da academia Royal de Sciences, fundada em Paris (1666) e tem como principal obra *Traité Du Mouviment Des Eaux Et Des Autres Corps Fluides* (1686) que foi publicada dois anos após sua morte. (Brasil Escola - bibliografias)

Francesco Redi nasceu no dia 18 de fevereiro de 1626 e viveu até o dia 1 de março de 1697, foi o primeiro cientista a provar que a geração espontânea não era a responsável pela criação de novas vidas. Nasceu em Arezzo, na Itália e adquiriu diploma de médico e filósofo pela Universidade de Pisa. (Portal São Francisco – bibliografia)

Responsável pela criação da teoria da Abiogénese, em um de seus experimentos que causou maior abalo na teoria da geração espontânea, Redi colocou pedaços de carne em frascos, deixou alguns abertos e outros fechados por uma tela, percebeu que o material em decomposição atraia moscas que entravam e saiam dos frascos. Tempos depois notou o surgimento de vermes nos frascos que estavam abertos, já nos estavam isolados pela tela, as moscas não entraram em contato com a carne em decomposição e por consequência não havia vermes. (Portal São Francisco – bibliografia)

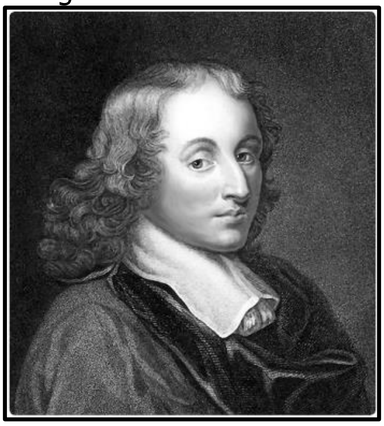
Hanning Brand viveu no período de 1630 a 1710. Brand foi o químico responsável pela descoberta do elemento químico fósforo em 1669 na tentativa de descobrir outro elemento. (WHITTEN, 2004, tradução Chemello)

Esta descoberta foi realizada graças da tentativa de produzir ouro a partir da urina que, em 1669 reunião 50 galões de urina em seu porão e adicionou alguns produtos químicos, após realizar os devidos processos para a produção, Brand observou uma substância que brilhava no escuro. Sua descoberta foi mantida em segredo durante anos até que em 1675 Brand mostrou o material produzido aos seus amigos. Para fins financeiros, Brand começou a comercializar parte do seu material. (WHITTEN, 2004, tradução Chemello)

Traços bibliográficos de Blaise Pascal

Blaise Pascal (1623 – 1662), matemático e filósofo francês, lançou as bases para a moderna teoria das probabilidades e formulou o que veio a ficar conhecido como o princípio de Pascal.Nascido na província francesa em 19 de junho de 1623, filho de Etienne Pascal(1588 – 1651) e Antoniette Begon. (Ribeiro, 2014)

Figura 2: **Blaise Pascal**



Fonte: Revista de Ciência Elementar, 2014.

Desde os primeiros anos de vida, Pascal já demonstrava uma extraordinária inteligência, no entanto, não tinha acesso aos livros de matemática para que pudesse despertar interesses em outras áreas. De acordo com Boyer (1974, p.264), *dizem que a principio ele não deu livros de matemática à seu filho Blaiser para encorajá-lo a desenvolver outros interesses, mas aos doze anos o menino mostrou tal talento geométrico que a partir daí sua inclinação foi encorajada*.

Aos quatorze anos Pascal, com seu pai, participou das reuniões informais da Academia de Mersenne em Paris. Em 1640, com dezesseis anos, escreveu um ensaio sobre secções cónicas (Essaypourlesconiques) baseado na obra de Gérard Desargues (1591 – 1661) sobre geometria projetiva sintética. O trabalho de Pascal foi bem recebido no mundo da matemática, tendo despertado o interesse do grande racionalista e matemático francês René Descartes. (Ribeiro, 2014)

Pascal realizou feitos extraordinários para o campo da matemática, aos dezoito anos de idade, o jovem inventou uma máquina de calcular e nos anos seguintes ele construiu e vendeu umas cinquentas máquinas. (Boyer, 1974)

Na física, Pascal contribuiu com seus estudos para a hidrostática onde desenvolveu grandes estudos, inventou a seringa e criou a prensa hidráulica, instrumento que se baseia em um princípio que ficou conhecido como Principio de Pascal: a pressão no seio de um fluido em equilíbrio transmite-se a todos os pontos do líquido e às paredes do recipiente. (Ribeiro, 2014)

Por volta dos vinte anos de idade era detentor de um grande cabedal científico e muito respeitado na comunidade. A partir de 1647, Pascal passou a se dedicar aos estudos da aritmética, foi quando desenvolveu o cálculo da probabilidade, o triangulo de Pascal entre outros feitos.Os últimos anos de sua vida foram marcados pelos tormentos físicos e rodeados de preocupações espirituais. Morreu em 19 de agosto de 1662, com trinta e nove anos de idade na casa de sua irmã, deixando para a humanidade alguns dos mais importantes conhecimentos que impulsionaram grandes estudos futuros.

Evolução dos conteúdos referentes a análise combinatória

Para uma melhor formação de ideia e compreensão desta evolução, será apresentada de forma cronológica a construção da Análise Combinatória seguindo com os contribuintes Niccolo Fontane (1499 – 1557), Girolamo Cardano (1501 – 1576), Pierre Fermat (1601 – 1665) e Leonhard Euler (1707 – 1783). Destacamos que os fatos históricos aqui descritos foram baseados principalmente em Boyer (1974) e Eves (2004).

Niccolo Fontana Tartaglia nasceu em Brescia no ano de 1499, e morreu em 1557 em Veneza. Seu apelido, Tartaglia (que significa "gago"), tem uma história curiosa, quando criança tinha recebido um corte de sabre, na tomada de Brésia pelos franceses em 1512, e isso lhe prejudicou a fala. Por esse fato é que recebeu o apelido de Tartaglia, ou gago, nome que usou em lugar do que recebera ao nascer. Foi um matemático italiano, cujo nome está ligado à tabela triangular mais conhecida como "Triângulo de Pascal" (Matemática na Veia - biografias)

Tartaglia era autodidata, aprendeu a ler e escrever sozinho e tornou-se professor de ciências e matemática. É atribuído à ele o mérito de ter sido o primeiro a usar matemática na ciência dos tiros de artilharia, e o desenvolvimento do primeiro método geral para resolver equações cúbicas. Escreveu também o que se considera a melhor aritmética do século XVI, um tratado em dois volumes que inclui uma discussão ampla das operações numéricas e da aritmética mercantil de seu tempo.

Sua principal contribuição para a Análise Combinatória foi o que ficou denominado de Triangulo de Tartaglia e em algumas páginas do seu livro *General Trattato* dedicou-se a solucionar os problemas de Pacioli (1500). (Matemática na Veia - biografias)

*Girolamo Cardano*nasceu em Roma nó início do século XVI, no ano de 1501 e viveu até o ano de 1576. Era médico por profissão; dedicou-se à matemática; deu aulas de astronomia, geometria e alquimia, e neste mesmo período iniciou sua vida nos jogos de azar, onde despertou o interesse em estudar as possibilidades de vencer em suas apostas. Segundo Bastos (2016) Cardano *deixou vários livros escritos, entre eles o De Ludo Aleae (sobre os jogos de azar), publicado em 1663, o livro expõe conselhos sobre os jogos ou um manual do jogador; e De Ratiociniss in Ludo Alaea, as primeiras noções de probabilidade*.

Ao analisar cada uma de suas jogadas, Cardano passou a estudar a aleatoriedade dos jogos e, juntamente a isso, escreveu um tratado no qual fala da sistematização dos dados, das possibilidades dos pontos combinados entre outros casos (Tomaz, 2011, p. 3). Além disso, Cardano foi o primeiro a utilizar as técnicas de combinatória para determinar a quantidade de casos favoráveis em um determinado evento aleatório para que assim pudesse calcular a probabilidade de ocorrência. Ele ficou limitado em resolver problemas concretos, em outras palavras, problemas que possuíam dados estritamente numéricos, no entanto, não produziu nenhum teorema.

Antes dos estudos de Cardano, há registros de estudos sobra a teoria da aleatoriedade, segundo Tomaz (2011):

> Outros matemáticos, como Pacioli, Tartaglia e Galileu, também estudaram a aleatoriedade de certos eventos, porém, todos eles, assim como Cardano, se limitaram a resolver problemas concretos, estritamente numéricos. Para alguns estudiosos da história da matemática, a teoria da probabilidade só começou a existir, de fato, após os estudos de Pascal e Fermat. Porém é de grande valia ressaltar que tanto os estudos de Fermat quanto os estudos de Pascal estavam baseados nos estudos de Cardano.
>
> (TOMAZ, 2011, p. 5)

Além de Pascal e Fermat, outros matemáticos também deram suas contribuições para a Teoria das Probabilidades. Essa teoria de acordo com os estudos de Tavares e Brito (2005) foi um terreno fértil para o desenvolvimento de Novas técnicas de Análise Combinatória.

Pierre Fermat nasceu em 17 de agosto de 1601, e morreu em 12 de janeiro 1665. Era filho de um comerciante de couro e recebeu sua educação inicial em casa. Em 1631 entrou para o serviço publico onde foi nomeado conselheiro na câmara de requerimentos. Acredita-se que o interesse de Fermat pela matemática originou-se, possivelmente, de uma leitura da Aritmética de Diofanto de Alexrandria (1621).

Fermat teve uma influencia bastante limitada, uma vez que não tinha interesse em publicar suas descobertas, mas que ficaram conhecidas, principalmente pelas correspondências que trocava com muitos dos principais matemáticos de seu tempo e, dessa maneira, exerceu considerável influencia sobre seus contemporâneos.

Contribuindo para os estudos da Análise Combinatória e para o seu uso, em 1654 Fermat troca correspondências com Pascal sobre o problema dos pontos. Foi esse trabalho que lançou as bases da Teoria matemática das probabilidades. Em 1657, Christiann Huygens (1629 – 1695) escreveu o primeiro tratado formal sobre o assunto, embasado na correspondência Pascal-Fermat.

Blaise Pascal (1623 – 1662) contribuiu para o desenvolvimento da Análise Combinatória com o aperfeiçoamento do triangulo de Tartaglia, que logo mais ficou conhecido como Triangulo de Pascal, forma conhecida no Brasil e vários outros países. Embora haja indícios históricos de que os chineses teriam conhecimento desta técnica, mas foi Pascal quem aprimorou as propriedades do triângulo.

Como mencionado anteriormente, Cardano escreveu um breve manual do jogador que envolvia alguns aspectos da probabilidade matemática. Mas em geral, se concorda que a questão a qual está ligada a origem da ciência da probabilidade o *problema dos pontos*. Esta questão enunciava o seguinte: suponha que duas pessoas estão participando deum jogo, com lançamento de dados, em que ambos têm a mesma chance de vencer, e o vencedor é quem atingir uma determinada quantidade de pontos. Porém, o jogo é interrompido quando um dos jogadores está na liderança. Qual é a maneira mais justa de dividir o dinheiro apostado? (BOYER, 1974; EVES 2004)

Pacioli foi um dos primeiros autores a introduzir o problema dos pontos em um trabalho matemático. O problema foi também discutido por Cardano e Tartaglia. Mas só se verificou um avanço efetivo quando, 1654, o Chavalier de Meré, um hábil e experiente jogador o propôs à Pascal.

Pascal ficou intrigado com as questões e começou a se corresponder com Fermat para que os dois chegassem a uma solução. Para alguns matemáticos foi essa correspondência entre os dois que realmente deu início à teoria da probabilidade. Nas correspondências ficou evidente que tanto Fermat quanto Pascal resolveram corretamente as questões, porém de maneiras diferentes. Fermat aperfeiçoou a regra geral de Cardano, baseando o cálculo de probabilidades no cálculo combinatório e Pascal ligou o estudo das probabilidades ao triângulo aritmético, que hoje é conhecido como o triangulo de Pascal. O triangulo aritmético já existia há mais de 600 anos, mas recebeu esse nome porque Pascal descobriu novas propriedades para ele (BOYER, 1974)

Desde então, Pascal, juntamente com Fermat foram os primeiros a resolverem os problemas da teoria das probabilidades de forma genérica, e não numérica, como era feita por Cardano.

Para resolver problemas de probabilidade, que eram necessários para obter o número de combinações de ***n*** elementos tomados ***r*** de cada vez (ou ***r*** a ***r***), ele expressava verbalmente e corretamente afirmava como obter. Fazendo uso do simbolismo moderno, Pascal afirmava que:

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Onde o símbolo n! (leia: fatorial de n), introduzido pela primeira vez em 1808, pelo professor Cristian Kramp (1760 – 1820) de Estrasburgo, França, cuja a expressão era simplificar a escrita. (Bastos, 2016)

Leonhard Euler (1707 – 1783) nasceu na Basiléia, Suiça. Seu pai um pastor calvinista, com certa vocação para matemática, ensinou-lhe os fundamentos da matemática e conseguiu que o filho viesse a estudar com Johann Bernoulli (irmão de Jacque Bernoulli) Euler estudou quase todos os ramos da matemática pura e aplicada. Não é exagero dizer que, quase toda a língua e notação usada hoje na matemática, principalmente à nível universitário, devemos a ele. (Bastos, 2016)

Em Combinatória, Euler contribuiu com a notação dos coeficientes binomiais $\left[\frac{n}{p}\right]$ para representar a expressão $\frac{n(n-1)(n-2)...(n+p-1)}{1.2...n}$ que equivale a $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ porém a notação $\left[\frac{n}{p}\right]$, modernamente é $\left(\frac{n}{p}\right)$ (leia: *n* sobre *p*).

Outros olhares sobre a temática

Neste tópico será apresentado um ponto de vista a respeito do tema proposto voltado a atual forma de ensino do assunto em questão. No decorrer da pesquisa constatou-se que o avanço do uso da Análise Combinatória vem se dando a partir da tentativa de solucionar problemas.

Com o passar do tempo, a forma de ensinar Análise Combinatória veio perdendo foco, as aulas passaram a ser estritamente expositivas onde os alunos são submetidos a decorarem fórmulas complexas que possam aplica-las a problemas propostos.

Esta situação causa um forte desconforto sobre o assunto tanto por parte dos alunos quanto por parte dos professores, e é consequente a isto, que uso da resolução de problemas torna-se mais vantajoso, uma vez que os alunos serão estimulados a buscarem por respostas, assim como personagens aqui destacados buscaram solucionar os problemas propostos.

Pinheiro (2008) propõe um ensino de Análise Combinatória voltado para a metodologia da Resolução de Problemas, no qual, inicialmente, o aluno é submetido a um problema e que o mesmo deverá buscar possíveis soluções para tal. O autor ainda contribui dizendo que o uso de situações-problema exige que o aluno tenha total envolvimento com o conhecimento que ele pretende alcançar e, dessa forma, uma única situação-problema não possibilitaria a construção do referido conceito.

Deste modo, é possível voltar a despertar o interesse dos jovens em buscar soluções para eventuais problemas propostos, uma vez que, de acordo com a pesquisa bibliográfica, de cunho histórico, podemos notar que o que levou ao desenvolvimento da Análise Combinatória foi a resolução de problemas.

Considerações Finais

Analisando o que foi apresentado neste artigo e com base nos textos de Chaquiam (2015) e Chaquiam (2016), é possível produzir um texto – diagrama com o tema apresentado para o uso em sala de aula a fim de contribuir para um melhor aproveitamento do ensino-aprendizagem.

Nesta pesquisa observou-se uma carência de registros históricos no campo acadêmico sobre a construção e a utilização da análise combinatória, o que dificulta a elaboração de um texto rico em detalhes sobre a contribuição de cada personagem mencionado. Muitas coisas são encontradas em sites livres pela internet, porém devemos ter muita atenção nas informações que retiramos, uma vez que algumas delas não possuem nenhuma referência para validar os fatos.

Após as pesquisas feitas para a elaboração deste trabalho, podemos notar uma forte ligação entre o conteúdo da Análise Combinatória e da Probabilidade, o que me trouxe um enriquecimento para os meus conhecimentos acerca dos assuntos mencionados. Deste modo, sugerimos que o texto seja usado por discentes do curso de licenciatura em matemática que estão em busca de aprimoramentos para suas aulas, para que possam utilizar essas informações como ponto de partida para iniciar suas aulas sobre Análise Combinatória, eliminando assim o uso de uma aula expositiva.

Referências

BRASIL ESCOLA – **Edme Mariotte**. Disponível em:<http://brasilescola.uol.com.br>. Ascesso em 15 de junho de 2017.

BASTOS, Antônio Carlos. **Resolução de Problemas:** uma discussão sobre o ensino de análise combinatória. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica) - Universidade do Grande Rio: Duque de Caxias, 2016.

BOYER, Carl b.; **História da Matemática**. 2 ed. São Paulo: Blucher, 1974.

CHAQUIAM, M. **História da Matemática em sala de aula**: uma proposta para integração aos conteúdos matemáticos. / XI SNHM. 2015.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

GASPARETTO JUNIOR, Antonio. **Revolução Cientifica.** Disponível em: <http://www.infoescola.com/historia/revolucao-cientifica>. Acesso em 15 de junho de 2017.

CHAQUIAM, Miguel. Um diagrama, um texto. In: MENDES, Iran Abreu;

CHAQUIAM, Miguel. **História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores**. Belém: SBHMat, 2016.

PINHEIRO, C. A. M. **O Ensino de Análise Combinatória a partir de situações-problema**/ 2008. 164f. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade do Estado do Pará, Belém, 2008.

PORTAL SÃO FRANCISCO – **Fracesco Redi.** Disponível em:< http://www.portalsaofrancisco.com.br/biografias/francesco-redi>. Acesso em 15 de junho de 2017.

RIBEIRO, Daniel. **Blaise Pascal**. Revista de Ciência Elementar. Vol. 2, nº4. 2014.

RONAN, Colin A.. **História Ilustrada da Ciência**. São Paulo: Círculo do Livro, 1987.

TOMAZ, Priscilla Steffani Santos. **Gerolamo Cardano**: Pai da Teoria das Probabilidades ou Um Bom Apostador de Jogos de Azar?. ANAIS do IX SNHM. 2011.

WHITTEN, K. W., DAVIS, R. E., PECK, L. M. General Chemistry; with qualitative analysis. 7ª ed. Belmont, Brooks/Cole, 2004, p. 128. Tradução: Prof. Emiliano Chemello

Matemática na Veia – **Niccolo Fontana**. Disponível em: <http://matematica-na-veia.blogspot.com.br> acessado em: 14 de junho de 2017.

TRIGONOMETRIA: recortes da história da sua evolução

Deusarino Oliveira Almeida Júnior
Marconni Augusto Pock de Oliveira
Miguel Chaquiam

Introdução

Apresentaremos neste trabalho, um recorte referente à evolução histórica da Trigonometria, com a intenção de desenvolver subsídios para a ação didática de professores de Matemática, no ensino de Trigonometria na Educação Básica.

Para tanto, analisamos alguns estudos voltados ao ensino de Matemática, e verificamos que o modelo tradicional de ensino, caracterizado pela apresentação dos conceitos pelo professor, seguidos de exemplos e exercícios de aprofundamento, ainda persistem nas escolas. No ensino de Trigonometria essa realidade é constatada, no estudo realizado por Oliveira (2008) e Gomes (2015) que indicam a predominância desta metodologia. Esta realidade se contrapõe ao que sugerem os Parâmetros Curriculares Nacionais,

> [...] é preciso rever e redimensionar alguns dos temas tradicionalmente ensinados. De fato, não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação.
> (BRASIL, 1999, p. 43)

Dessa forma, é necessário refletir criticamente sobre o ensino de Matemática que vem sendo desenvolvido nas escolas e, sobretudo, desenvolver estratégias pedagógicas mais apropriadas para o ensino de Matemática.

A Educação Matemática se propõe a superar tais dificuldades de ensino e aprendizagem, por meio de diferentes de tendências metodológicas. Modelagem Matemática, Resolução de problemas, Etnomatemática, Uso de Tecnologias de Informação e Comunicação, Uso de Materiais Concretos e Jogos, História da Matemática, buscam encontrar alternativas para superar desafios de aprendizagem e propor diferentes possibilidades para o ensino de Matemática. Dentre essas tendências, utilizamos nesta proposta os pressupostos da História da Matemática.

Assim, dentro da perspectiva que utiliza a História da Matemática como recurso didático, tomamos como referência Miguel (1997), que nos apresenta, em seu artigo intitulado "As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores" quatorze argumentos mais frequentes utilizados por defensores da história da Matemática e quatro argumentos questionadores de seu uso como metodologia de ensino e suas potencialidades pedagógicas da História da Matemática em sala de aula. Assim, concordamos com um dos argumentos reforçadores encontrados em Miguel (1997), que retrata a utilização da História da Matemática em sala de aula como fonte de motivação, não sendo possível atribuir, somente a isso, a unanimidade do interesse do aluno pelo tema.

> [...] o conhecimento histórico dos processos matemáticos poderia despertar o interesse do aluno pelo conteúdo que está sendo ensinado. Os mais ingênuos acabam atribuindo à história um poder quase mágico de modificar a atitude do aluno em relação à matemática. Nesses textos, o poder motivador da história é atestado e exaltado em função da adoção de uma concepção lúdica ou recreativa da mesma.
>
> (MIGUEL, 1997, p. 75, grifo nosso)

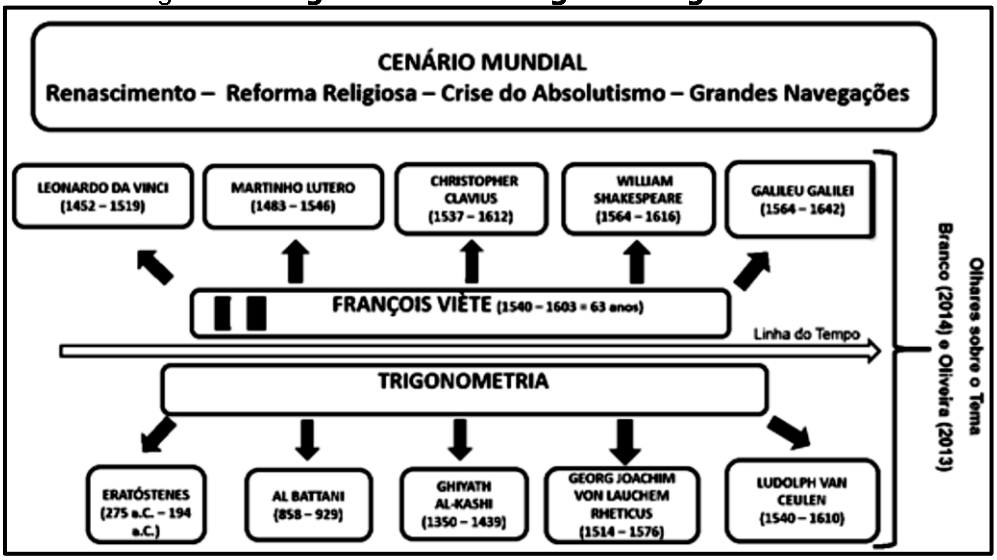
Diante dessa perspectiva, o uso pedagógico da História da Matemática proporciona um momento extremamente significativo na construção e consolidação de um conhecimento matemático durante as aulas, considerando que a partir da abordagem cronológica de personagens e fatos relacionados ao tema, é possível vislumbrar avanços e retrocessos de seu desenvolvimento ao longo da história e proporcionar uma espécie de resumo de sua evolução no sentido de justificar sua relevância durante a abordagem em sala de aula. Ao conhecer esses aspectos históricos, é possível que o aluno sinta-se mais estimulado a aprofundar conhecimentos sobre o tema.

Dessa forma, adotar a História da Matemática como recurso didático nas aulas de matemática exige pesquisa, comprometimento com leituras prévias para aprofundamento e um planejamento específico para cada tema que será abordado em sala de aula. Neste sentido, é possível destacar aspectos importantes e peculiares que fizeram parte do desenvolvimento de determinado tema, como estímulo para o aprendizado. É justamente nesta perspectiva que surge a motivação para o desenvolvimento desta proposta sobre Trigonometria. O desenvolvimento da Trigonometria, que atualmente é um ramo da Matemática, surgiu com a observação do céu, que sempre fascinou o homem. Este fascínio impulsionou o desenvolvimento da Astronomia, proporcionando descobertas científicas de grande relevância para a humanidade. Portanto este trabalho tem por objetivo oferecer ao professor, um texto acessível que possa ser utilizado como recurso pedagógico em sala de aula e que mostre uma síntese do desenvolvimento histórico da Trigonometria, destacando o contexto mundial da época e as contribuições de alguns personagens para o desenvolvimento do tema, assim como contribuir com a melhoria do ensino de matemática na educação básica.

Este trabalho foi proposto durante a disciplina História da Matemática, ministrada no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – PMPEM da Universidade do Estado do Pará - UEPA. A partir da leitura de artigos acadêmicos sugeridos durante as aulas da disciplina e dos debates decorridos, o tema foi tornando-se desafiador. As reflexões geradas sobre as potencialidades pedagógicas da História da Matemática permitiu detectar que ainda é mínima a produção de textos que possam ser utilizados em sala de aula para o ensino de determinado conteúdo matemático a partir de sua evolução histórica havendo, portanto, há necessidade de se produzir conhecimentos nessa direção.

Na pesquisa, realizada encontramos dificuldades em obter informações sobre personagens muito antigos e sobre a discordância em datas de nascimento e falecimento de determinados personagens. Assim, fundamentamos a proposta deste trabalho em Mendes e Chaquiam (2016), que sugerem um diagrama bem estruturado, para se retratar a evolução de um determinado tema a partir de um recorte histórico apropriado. Dessa forma, apresentamos o diagrama em questão, adaptado para a evolução do tema Trigonometria.

Figura 1: **Diagrama-Metodológico – Trigonometria**



Fonte: Elaborado pelos autores a partir de Chaquiam (2016)

O diagrama acima apresenta uma linha do tempo centralizada e abaixo dela é destacado o tema central (Trigonometria) e alguns dos personagens que contribuíram com o seu desenvolvimento ao longo da história, em um recorte que se inicia com Eratóstenes (275 a.C. - 194 a.C.) e é concluído com as contribuições de Ludolph Van Ceulen (1540 - 1610).

Acima da linha do tempo, está disposto o personagem em foco, François Viète, e alguns de seus contemporâneos, escolhidos em função de sua relevância nos mais diversos campos do conhecimento, tais como: Leonardo da Vinci, Martinho Lutero, Christopher Clavius, William Shakespeare e Galileu Galilei, que durante o desenvolvimento do trabalho, foram retratados por meio de seus traços bibliográficos e de suas valiosas contribuições para o desenvolvimento da humanidade.

Não obstante a estes personagens citados, são ressaltados também, fatos importantes que estavam ocorrendo no cenário mundial da época, para que o leitor possa se situar no período histórico tratado e estabelecer relações entre os personagens, e a evolução do tema em questão. Nesse sentido, serão evidenciados: O Renascimento; As Reformas Religiosas; A Crise do Absolutismo e As Grandes Navegações. Com isso, pretende-se mostrar ao leitor os acontecimentos históricos que estavam ocorrendo na maior parte do período delimitado neste recorte histórico.

A escolha deste período se justifica, pois nele é possível estruturar com certa coerência, uma história da evolução da Trigonometria, por meio das relevantes descobertas que se sucederam neste período. Não obstante aos conhecimentos levantados, serão considerados também, outros olhares mais atuais sobre a Trigonometria, a fim de enriquecer os conhecimentos sobre o tema e sua importância na atualidade.

Com relação à utilização do diagrama, quando iniciar um conteúdo matemático, sugerimos que o professor adote a seguinte sequência de apresentação: 1) iniciar com a apresentação do personagem em foco; 2) apresentar o tema; 3) incluir a linha do tempo que irá referenciar o período histórico escolhido; 4) apresentar o cenário mundial da época e sua possível influência na compreensão e no desenvolvimento do tema; 5) apresentar em ordem cronológica os contemporâneos do personagem em foco e suas contribuições; 6) apresentar cada um dos personagens que contribuíram para a evolução do tema; e por fim, 7) apresentar a importância do tema em pesquisas científicas mais atuais.

Este diagrama pode ser utilizado pelo professor quando for ministrar Trigonometria para alunos do 2º ano do Ensino Médio, como recurso pedagógico. Ao iniciar a aula, o professor pode comentar a necessidade inerente ao ser humano em compreender fenômenos naturais que os cerca e que essa curiosidade, própria de nossa espécie, foi decisiva para o desenvolvimento da ciência em vários momentos de nossa história. Como exemplo, pode citar que a observação do céu sempre fascinou o homem e este fascínio, desencadeou o início do desenvolvimento da Astronomia e da Trigonometria.

A partir daí o professor pode comentar cada tópico importante do tema em questão, enquanto vai construindo uma visão geral do diagrama no quadro, ou projetando paulatinamente sua imagem, com o auxílio de um computador. Ressalte-se neste momento, que a evolução do conhecimento humano muitas vezes não acontece de forma linear ou proporcional ao tempo, isto é, uma determinada teoria pode ser aceita como verdade por um longo período de tempo, até que seja refutada por uma teoria mais consistente.

Assim, com o auxílio do diagrama, é possível mostrar aos alunos, que a evolução histórica de determinado conhecimento é caracterizada por períodos de avanços, mas também por períodos de grande estagnação, que certamente retardaram em alguns períodos, o desenvolvimento das ciências. É fundamental que o aluno conheça esses aspectos, que devem ser reforçados pelo professor em sala.

Após explanação geral do diagrama adaptado neste trabalho, seguimos com o texto complementar que retratará o cenário mundial da época, iniciado pelo Renascimento.

O Renascimento

O Renascimento foi um período de grandes transformações ocorridas na Europa Ocidental entre o início do século XIII e o final do século XVI, caracterizada inicialmente, pela transição de uma sociedade feudal para uma sociedade semi-capitalista. Esta transição desencadeou nos séculos seguintes, uma série de profundas transformações no âmbito social, político, filosófico, religioso, cultural e técnico e científico da Europa.

De acordo com Rosa (2012, p. 329), o renascimento científico verificado neste período, pode ser compreendido em duas fases. Na primeira, entre os séculos XIII e XIV, houve a renovação cultural do ocidente latino após séculos de relativa estagnação, incentivados por debates filosóficos a partir da introdução de obras da Filosofia e da Ciência grega, que haviam sido traduzidas para o latim; São Tomás de Aquino formularia a nova Doutrina Cristã, influenciando a mentalidade da sociedade católica; a necessidade de compreender o mundo extrapola os domínios da Igreja e passa alcançar as universidades e os meios culturais.

Na segunda fase, entre os séculos XV e XVI há um considerável desenvolvimento do conhecimento científico, pois contou com condições sociais, políticas econômicas e culturais bem favoráveis. Nessa fase, inicia-se o método científico como forma de validar um conhecimento que antes era referendado somente por autoridades e que muitas vezes mostravam-se equivocados.

A ciência ganha força. Esta rápida evolução, fez com que a sociedade europeia ocidental fosse pioneira nas investigações sobre Matemática, Astronomia, Óptica, Mecânica, Botânica, Zoologia, e Anatomia humana, superando o nível cultural das civilizações chinesas, árabes, hindu e bizantina que eram contemporâneas. O desenvolvimento técnico necessário para superar novos desafios, estimulou a produção de novos instrumentos.

Assim foi criada a Bússola magnética, fundamental nas grandes navegações; a pólvora que influenciaria o poder militar; o relógio mecânico; o papel, que substituiria o papiro e o pergaminho; e a descoberta de novas fontes de energia, dentre outras grandes inovações tecnológicas da época. Ainda segundo Rosa (2012), nesse contexto, surge o novo Homem renascentista, consciente de sua capacidade, de sua competência e de sua criatividade, refletindo os ideais de uma nova classe burguesa que se opunha a velha estrutura feudal.

A Reforma Religiosa

O processo das reformas religiosas teve início no século XVI. Durante esse período, o processo de centralização monárquica, em andamento na Europa desde o final da Idade Média, tornou tenso o relacionamento entre os reis e a igreja, até então detentora de sólido poder temporal. Assim, além do domínio espiritual sobre a população, os membros do clero detinham o poder político administrativo sobre os reinos.

Ao mesmo tempo, a expansão capitalista encontrava alguns entraves nas pregações da igreja, que condenava a usura, ou cobrança de juros ou empréstimos, e defendia o "justo preço" das mercadorias, ou seja, produção e comercialização sem direito a lucro. Não encontrando mais na igreja a satisfação de suas necessidades espirituais, os membros da burguesia enfrentavam uma crise de religiosidade.

Um ingrediente poderoso na crise religiosa que se delineava foi a desmoralização do clero. Os abusos e o poder excessivo de seus membros (alto e baixo clero) contradiziam abertamente suas pregações moralizadoras. Embora condenasse a usura e o desconfiassem do lucro, os membros da igreja praticavam-nos de forma desenfreada. O comércio de bens eclesiásticos, o uso da autoridade para garantir privilégios, o desrespeito ao celibato clerical e até a venda de cargos eclesiásticos não eram raros na igreja até o final da Idade Média.

O maior escândalo talvez fosse o da venda de indulgências, isto é, do perdão dos pecados cometidos pelos fiéis em troca de pagamentos a religiosos, incluindo o papa. Nas universidades, o movimento de crítica ganhava vulto, principalmente em Oxford, Inglaterra, porém, o grande rompimento iniciou-se na Alemanha, região do Sacro Império Romano-Germânico.

A Alemanha era ainda basicamente feudal, agrária, com alguns enclaves mercantis e capitalistas ao norte. A igreja era particularmente poderosa no Sacro Império, onde possuía cerca de um terço do total das terras. A nobreza alemã, por essa razão, encontrava-se ansiosa por diminuir a influência da instituição, além de cobiçar suas propriedades, o que estimulou ainda mais o rompimento.

A reforma teve início com Martinho Lutero (1483 - 1546), membro do clero e professor da Universidade de Wittenberg. Crítico, pregava a teoria agostiniana da predestinação, negando os jejuns e outras práticas comuns apregoadas pela igreja.

A crise do Absolutismo

O processo de formação das monarquias centralizadas no final da Idade Média ocorreu em grande parte pela aproximação entre monarcas e burguesia, na busca da superação dos entraves políticos e econômicos derivados das estruturas feudais. O monarca extraia força econômica da burguesia e buscava também manter ligações com a nobreza, garantindo-lhe privilégios em troca de apoio político para manter-se no poder.

Entre os séculos XV e XVIII, o absolutismo foi o sistema político e social que vigorou na maior parte da Europa. Também denominado Antigo Regime, consistia na centralização do poder político nas mãos do monarca. Além dele, apenas a nobreza, detentora de terras, possuíam algum poder e prestígio social. As classes sociais do absolutismo eram, o Rei – que tinha o poder absoluto; o 1º estado (Clero), o 2º estado (Nobreza) , o 3º estado (Burguesia e o resto da população), os burgueses enriqueciam por meio de atividades como o comércio e indústria.

Embora estivessem acumulando crescente poder econômico, não tinham o poder político, por isso o antigo regime passou a ser contestado, visto que os indivíduos não eram avaliados por seus méritos ou conhecimentos, mas pelo seu berço. Os títulos de nobreza passavam de pai para filho, desta forma um plebeu nunca poderia se tornar nobre.

Na França, após a morte de Luiz XIV, o rei Sol, a opinião pública passou a se modificarem relação ao regime político e autoritário em vigor. Os filósofos iluministas influenciaram para o fim do absolutismo através de seu lema: Liberdade, igualdade e fraternidade. Os burgueses foram os principais interessados nesta filosofia, pois, apesar do dinheiro que possuíam, eles não tinham poder em questões políticas devido a sua forma participação limitadas.

Ao final do século XVIII, foi desencadeado na Europa, o processo de queda do Antigo Regime. Tal processo pode ser caracterizado pelo colapso do Estado moderno absolutista e sua substituição por um novo tipo de Estado, plenamente controlado pela burguesia, o chamado Estado liberal.

Nesse processo, os últimos resquícios do feudalismo foram eliminados, e uma série de privilégios associados à velha aristocracia desapareceu. Foi possível assistir, portanto, à emergência de um novo mundo, marcado pelo sucesso burguês e o desenvolvimento máximo do capitalismo com a industrialização.

As grandes navegações

As grandes navegações ocorreram entre os séculos XV e XVII em um momento de grandes descobertas científicas decorrentes do movimento renascentista em toda a Europa. O desenvolvimento da Astronomia e da Trigonometria foram essenciais para as grandes navegações, pois com o estabelecimento do pensamento científico, adotou-se que a terra era redonda e aceitou-se a teoria heliocêntrica do sistema solar proposta pelo Astrônomo e Matemático polonês, Nicolau Copérnico.

Esses conhecimentos motivaram a ideia de se explorar rotas oceânicas alternativas para se chegar às índias e revolucionar o comércio de especiarias, que nessa época dava-se somente pelo mar mediterrâneo, por meio de embarcações simples que não exigiam muitos recursos náuticos e favoreciam cidades portuárias italianas como Pisa, Florença, Veneza, Milão.

Figura 2: **Mar Mediterrâneo**

Fonte: https://www.google.com.br/maps/@42.7412913,11.6767759,4z

Com o surgimento da Burguesia em decorrência do acúmulo de capital nas grandes cidades da Europa e da necessidade de se expandir o seu território pelo mundo, países como Portugal, Espanha, França, e Holanda protagonizaram uma verdadeira corrida ao mar, desencadeando a fase das grandes navegações. Assim, aproveitando-se de sua localização geográfica privilegiada, Portugal e Espanha se destacaram nessas explorações, realizando muitas expedições mar afora. Como resultado, descobriram um novo caminho para as Índias e outros continentes que foram considerados colônias imperiais, fornecedoras de ouro, prata e madeira para países da Europa.

Dessa forma, constituiu-se um novo cenário político e econômico na Europa, e assim Lisboa e Sevilha tornaram-se cidades muito importantes economicamente, superando as cidades italianas há muito tempo detinham essa hegemonia. Segundo Rosas (2012, p. 378) as grandes navegações, sobretudo as realizadas entre 1488 e 1521, influenciaram em diversos domínios, caracterizando um novo período da História europeia. Da mesma forma, em pouco tempo o comércio transatlântico superaria, em valor, quantidade e diversidade aquele praticado no Mediterrâneo favorecendo a formação das companhias de comércio (França, Holanda, Inglaterra, Espanha, Portugal), o surgimento dos bancos e bolsas de valores, dos títulos e letras de câmbio, de modo que o crescente volume de negócios realizados, em decorrência das grandes navegações, inflacionaria o mercado daquela época.

O cenário religioso, também sofreu influencia das grandes navegações, pois com a conquista de novos continentes era evidente o grande desafio de levar o Cristianismo também para esses lugares recém descobertos. Outra questão importante, é que com o avanço e comprovação de conhecimentos geodésicos, alguns dogmas da Igreja, começaram a ser questionados. Da mesma forma, os conhecimentos da Geografia, Cosmologia, Astronomia e das Ciências Naturais, teria que ser repensado e reestudado.

Ao abordar em linhas gerais, o Renascimento, as Reformas Religiosas, a queda do Absolutismo e as Grandes Navegações que certamente, foram eventos de grande influência na Europa do século XVI, é possível ter ideia dos acontecimentos que caracterizaram esse período de grandes transformações.

Para melhor precisar o recorte histórico, serão apresentados alguns personagens brilhantes e contemporâneos a Viète, que se destacaram com exímias contribuições, para o desenvolvimento da humanidade nos mais variados segmentos. Dentre esses personagens contemporâneos a Viète, podemos citar: Leonardo da Vinci, Martinho Lutero, Christopher Clávius, William Shakespeare e Galileu Galilei, que serão apresentados a seguir.

Leonardo da Vinci (1452 – 1519)

Nascido em Vinci, próximo a Florença em 1452, Leonardo da Vinci foi considerado em pouco tempo, o maior pintor de sua época, sendo protegido e adulado nas principais cortes europeias. Escultor, músico, arquiteto, engenheiro civil e militar, extraordinário inventor, deixou cerca de seis mil páginas dessa prodigiosa obsessão nas quais encontra-se praticamente de tudo.

Geometria, Anatomia, Geologia, Botânica, Astronomia, Óptica, Mecânica dos Sólidos, Mecânica dos Fluidos, Balística, Hidráulica, magníficos desenhos preparatórios e exaustivos desenhos de perspectivas, considerações teóricas sobre artes, além da mais fantástica coleção de invenções e soluções de engenharia já imaginadas por um único homem, tais como: esboços de helicópteros, submarinos, para-quedas, veículos, embarcações automotoras, máquinas voadoras, tornos, turbinas, teares, máquinas hidráulicas, canhões, metralhadoras, etc.

Leonardo da Vinci teve grande influência no desenvolvimento da Matemática. Repudiava todas as ideias que não partissem da observação. Para ele, contudo, uma simples observação não era suficiente, porque só se tornaria útil quando fosse realizada sobre um projeto hipotético, cujas hipóteses devem ser confirmadas pela experiência. Deste modo, afirmava que onde houvesse verificação experimental, haveria razão, isto é, ponto de partida para a interrogação, e onde há razão, há a possibilidade de precisão Matemática. Para Leonardo, a Matemática é o ponto de união decisivo, entre a mente humana e a realidade da natureza. Sua perda em 1519 provocou uma dor extraordinária em todos aqueles que o conheciam.

Martinho Lutero (1483 – 1546)

Precursor da Reforma Protestante na Europa durante o século XVI, Martinho Lutero nasceu em 1483 na cidade de Eisleben, Alemanha. Como era comum na época, foi alvo de uma disciplina rígida. Aprendeu, entre outras coisas, a orar aos santos, realizar boas obras e reverenciar o papa e a igreja. Pouco tempo após iniciar seus estudos de Direito, Lutero resolveu tornar-se monge e entrou no Mosteiro Agostiniano de Erfurt. Em 1507, ele foi ordenado padre, mas devido as suas ideias que eram contrárias as pregadas pela igreja católica, ele foi excomungado. Em seguida, deixou o Mosteiro para ensinar filosofia moral na Universidade de Wittenberg.

Certo tempo depois ele passou por uma angústia que pode ser sintetizada em uma pergunta: se o coração da pessoa é governado pelo pecado, como pode esperar salvação diante de Deus? Por causa do que havia aprendido, procurou resposta – e paz – através de boas obras, incluindo jejuns e autoflagelação. Por fim, a incapacidade de sentir paz diante de Deus o levou às portas do desespero. A aflição de Lutero somente encontrou resposta no dia em que encontrou na Bíblia a certeza de que não há como alguém merecer o favor de Deus por causa de alguma coisa que faz; que a única forma de alguém obter o favor Deus é através da fé em Jesus Cristo; que é através da fé em Jesus que os pecados são perdoados por Deus. Esse juízo, conhecido como a doutrina da justificação pela fé, tornou-se um dos pilares do pensamento religioso de Lutero.

Sua doutrina, salvação pela fé, foi considerada desafiadora pelo clero católico, pois abordava assuntos considerados até então pertencentes somente ao papado. Contudo, esta foi plenamente espalhada, e suas inúmeras formas de divulgação não caíram no esquecimento, ao contrário, suas ideias foram levadas adiante e a partir do século XVI, foram criadas as primeiras igrejas luteranas.

A Igreja Romana da época costumava dizer que algumas pessoas possuíam mais méritos do que tinham necessidade para serem salvas. Por isso, o "mérito extra" dessas pessoas poderia ser transferido – especialmente através de pagamento – para pessoas cuja salvação era duvidosa. Lutero protestou contra esta prática, chamada de indulgência. Em 31 de outubro de 1517, Lutero afixou uma série de críticas – que se tornaram conhecidas como 95 Teses – na porta da Igreja do Castelo de Wittenberg. As Teses eram um protesto contra o abuso da autoridade do Papa, especialmente no sentido de desafiar o Papa a esvaziar de graça o purgatório, já que diz controlá-lo. Lutero também negou o ensino do "mérito extra" que estava por trás das indulgências.

Apesar do resultado, inicialmente o reformador não teve a pretensão de dividir o povo cristão, mas devido à proporção que suas 95 teses adquiriram, este fato foi inevitável. Para que todos tivessem acesso às escrituras que, até então, encontravam-se somente em latim, ele traduziu a Bíblia para o idioma alemão, permitindo a todos um conhecimento que durante muito tempo foi guardado somente pela igreja. A Igreja Romana ordenou que Lutero se apresentasse em Roma para responder às acusações de heresia. Lutero se recusou a mudar de opinião. A resposta do Papa à situação foi uma bula (ordem papal), ameaçando Lutero de excomunhão, caso não se retratasse. Em protesto, ele queimou publicamente a bula e foi excomungado em janeiro de 1521.

Publicou cerca de 400 obras durante a sua vida, incluindo comentários bíblicos, catecismos, sermões e tratados. Também escreveu hinos para a Igreja. Parte de suas obras estão publicadas em diversas línguas modernas. Lutero faleceu de derrame cerebral em 1546, aos 63 anos de idade, em sua cidade Natal, Eisleben.

Christopher Clavius (1537 - 1612)

Christopher Clavius nasceu em Bamberg, Alemanha, em 1537 e faleceu em Roma em 1612. Embora tenha contribuído pouco para a matemática, é provável que nenhum intelectual alemão do século XVI fez mais do que ele para a promoção dessa ciência. Era um professor inspirado e escreveu textos de aritmética e álgebra dignos de respeito. Em 1574, publicou uma edição dos Elementos de Euclides, especialmente valiosos pelos seus escólios. Também escreveu sobre trigonometria e desempenhou um papel importante na reforma gregoriana do calendário.

William Shakespeare (1564 – 1616)

Nasceu em 1564, na pequena cidade de Stratford-Avon, Inglaterra. É considerado um dos mais importantes poetas, dramaturgos e escritores de todos os tempos. Suas obras que permaneceram ao longo dos tempos consistem de 38 peças, 154 sonetos, dois poemas de narrativa longa, e várias outras poesias. Suas obras são mais atualizadas do que as de qualquer outro dramaturgo e são consideradas quase todas obras-primas, dentre elas: Romeu e Julieta, Hamlet, Ricardo III, O rei Lear, Otelo, Macbeth, O mercador de Veneza, Júlio César, Muito barulho por nada, Antônio e Cleópatra, Coriolano, entre outros.

Embora seus sonetos sejam até hoje considerados os mais lindos de todos os tempos, foi na dramaturgia que ganhou destaque. No ano de 1594, entrou para a Companhia de Teatro de Lord Chamberlain, que possuía um excelente teatro em Londres. Neste período, o contexto histórico favorecia o desenvolvimento cultural e artístico, pois a Inglaterra vivia os tempos de ouro sob o reinado da rainha Elisabeth I. O teatro deste período, conhecido como teatro elisabetano, foi de grande importância. Escreveu tragédias, dramas históricos e comédias que marcam até os dias de hoje o cenário teatral.

Os textos de Shakespeare fizeram e ainda fazem sucesso, pois tratam de temas próprios dos seres humanos, independentemente do tempo histórico. Amor, relacionamentos afetivos, sentimentos, questões sociais, temas políticos e outros assuntos, relacionados a condição humana, são constantes nas obras deste escritor. No ano de 1610, retornou para Stratford, sua cidade natal, local onde escreveu sua última peça, A

Tempestade, terminada somente em 1613. Em 23 de abril de 1616 faleceu o maior dramaturgo de todos os tempos.

Galileu Galilei (1564 – 1642)

Filho de um nobre fiorentino empobrecido, Galileu Galilei nasceu em 1564, na cidade de Pisa, Itália. Foi a primeira pessoa a utilizar um telescópio para observar o Sol, a lua e os planetas, no qual denominou, radicalmente de ciência astronômica. Também é conhecido pelas suas contribuições na Física. Faleceu em 1642, aos 77 anos de idade.

Vincenzino Galilei, pai de Galileu, pertencia a uma família da qual outrora seus membros haviam sido senhores em Florença, mas naquele tempo as coisas não estavam bem. E apesar de seu pai ser matemático e músico, a infância de Galileu testemunhou certa pobreza. Daí talvez venha o motivo de Vincenzino ter sempre sonhado com um filho médico e nunca o ter incentivado e nem visto com bons olhos as tendências de seu filho para a Matemática e Astronomia.

Como sua família não era rica, Galileu tinha que receber uma educação que lhe permitisse ganhar a vida. Por isso, foi enviado para a Universidade de Pisa, para que estudasse Medicina, com seu pai suportando o pesado encargo da manutenção da universidade. No entanto, no segundo ano do curso, que jamais concluiu por falta de interesse, Galileu descobriu a Matemática e a Física, e o encontro com a verdadeira vocação levou-o a abandonar a Universidade, apesar do descontentamento do pai.

Foi nesse período que Galileu realizou sua primeira observação fundamental e deu sua primeira contribuição à Ciência. Certo dia, no interior da Catedral de Pisa, olhando atentamente para um lampadário, ou um pêndulo suspenso no teto, percebeu que este, devido uma rajada de vento, começou a balançar, então colocou a mão direita sobre o pulso esquerdo e marcou o tempo de oscilação, ou seja, ele estava contando, ou melhor, marcando o tempo com a sua pulsação.

Essa simples observação para Galileu fez a diferença, pois o levou a verificar que o período de oscilação do lustre, era independente da amplitude do movimento. A partir daí, surgiram então as leis do pêndulo, ou leis do isocronismo das oscilações, que mais tarde viria a contribuir para o estudo das oscilações em geral, tanto existentes na natureza, quanto produzidas pelo homem, como na Música e na Medicina com a construção do pulsillogium, uma espécie de relógio que mede as pulsações cardíacas, e finalmente possibilitando a construção de relógios.

Neste cenário, disseminou-se uma nova perspectiva de homem e de mundo. Houve uma vasta produção de conhecimentos, produzidos por grandes pensadores. Esta época de grande efervescência política, social e científica, caracterizou o período vivido na Europa pelo francês François Viète (1540 - 1603), personagem em foco. Portanto, neste trabalho foi dado maior enfoque à Viète, em função de suas relevantes contribuições para o desenvolvimento do tema, nesse período.

François Viète (1540 – 1603)

Considerado o maior matemático francês do século XVI, François Viète, frequentemente conhecido por Franciscus Vieta, seu nome semilatinizado, nasceu em Fontenay, na França, em 1540. Filho de advogado, seguiu a profissão do pai, estudou Direito e foi membro do parlamento provincial da Bretanha, porém, abandonou a profissão quatro anos depois.

A possibilidade de resolver equações de terceiro e quarto graus deram um incentivo poderoso ao desenvolvimento da Álgebra. A Álgebra Moderna deve muito àquela desenvolvida no século XVI por pessoas como Bombelli, Recorde, Stevin, dentre outros, mas principalmente a um grande personagem do início do Renascimento: François Viète.

De acordo com Eves (2004, p. 308), existem algumas anedotas curiosas sobre Viète. Uma delas, a história do embaixador dos Países Baixos que se gabava ao rei Henrique IV de que a França não tinha nenhum matemático capaz de resolver um problema proposto em 1593 por seu conterrâneo Adrianus Romanus (1561 - 1615) e que requeria a resolução de uma equação de grau quarenta e cinco ($x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - \cdots - 3795x^3 + 45x = K$).

Convocado, logo ao ver a equação, Viète percebeu ligações trigonométricas subjacentes e, em poucos minutos, conseguiu descobrir duas raízes e, posteriormente encontrou mais vinte e uma. As raízes negativas lhe escaparam. Viète, por sua vez, desafiou Romanus a resolver com os instrumentos euclidianos o problema de Apolônio; o matemático dos Países Baixos, porém não deu conta da tarefa. Quando lhe foi apresentada a elegante solução de seu desafiante, Romanus fez questão de viajar até Fontenay para conhecê-lo.

Segundo Contador (2006, p.58), Viète também adquiriu fama e sucesso ao conseguir decifrar um código secreto usado pela Espanha durante a guerra que durou cerca de dois anos entre esses países. O código era formado de aproximadamente seiscentos caracteres e, desta maneira, deu uma certa vantagem para a França. Tanta era a certeza do rei da Espanha Filipe II de que o código era indecifrável, o levou a se queixar ao papa de que a França estava usando magia contra seu país e acusou Viète de ter um pacto com o demônio.

Dedicava a maior parte de seu tempo de lazer à Matemática. Consta que quando Viète se engolfava no estudo da Aritmética, era capaz de ficar dias seguidos trancado em seu gabinete. Foi responsável pelo uso de frações decimais ao invés de frações sexagesimais.

Sobre a evolução do tema

De acordo com a proposta sugerida anteriormente no diagrama, será apresentada a seguir, a evolução da Trigonometria constituída dentro de um recorte histórico que vai de Eratóstenes (275 a.C.- 194 a.C.) à Ludolph Van Ceulen (1540 - 1610), destacando além destes, as importantes descobertas de Al-Battani, Ghyath Al-Kashi e Georg Joachim Von Lauchem Rheticus apresentadas de forma cronológica, visando constituir um enredo histórico que mostre o desenvolvimento da Trigonometria, a partir de suas contribuições.

Eratóstenes (275 a.C - 194 a.C.):

Nascido em Cirene, uma antiga colônia grega onde hoje é a Líbia, na costa sul do Mar Mediterrâneo, Eratóstenes passou boa parte de sua juventude em Atenas, e quando tinha cerca de 40 anos de idade, foi convidado por Ptolomeu III do Egito para mudar-se para Alexandria e ser tutor de seu filho. Conseguiu proeminência em vários campos do conhecimento como poesia, astronomia, história, atletismo e matemática.

Hoje, Eratóstenes é lembrado como sendo "o medidor da Terra", já que ele foi o primeiro a fazer medições da circunferência de nosso planeta. Ele observou que, ao meio-dia no dia solstício de verão, o Sol brilhava diretamente para dentro de um poço profundo em Siene. Em Alexandria, verificou que os raios solares formam com a vertical um ângulo de 7,2° que é igual ao ângulo que se forma no centro da Terra com o prolongamento dos raios de Siene.

Como 7,2° é 1/50 de 360°, a distância de Alexandria a Siene corresponde a 5000 estádios (onde 1 estádio é aproximadamente igual a 0,1575 km), isto é, 1/50 da circunferência da Terra, que ao multiplicar por 50 a dita distância, obtém-se a medida da circunferência da Terra, assim como é possível deduzir seu diâmetro. Os resultados de Eratóstenes foram de aproximadamente 250.000 estádios (ou seja, aproximadamente 39.375 km) para a circunferência da Terra. Os cálculos foram impressionantes e certeiros, se considerarmos o nível de tecnologia da época. Hoje, se calcula que o comprimento da circunferência da Terra é em torno de 40.008 km.

Al-Battani (858 - 929):

Al-Battani nasceu em 858 na cidade de Harran, às margens do rio Balikh, na antiga Mesopotâmia, atual Turquia. Descendente de uma família de sabianos, uma seita religiosa de adoradores da estrela de Harran, teve grande motivação para o estudo de Astronomia. Era filho de um habilidoso fabricante de instrumentos astronômicos, Jabir Sinan Al-Harrani, de quem herdou e aprendeu estas habilidades.

Al-Battani é considerado o mais importante astrônomo e matemático árabe de sua época. Foi responsável por inúmeras descobertas importantes na Astronomia, sendo uma delas - a mais notável - a determinação exata do ano solar como sendo de 365 dias, 5 horas, 46 minutos e 24 segundos, o qual é muito próximo das últimas estimativas.

Anos mais tarde, através do matemático persa Abn-Nasr, Al-Battani teria uma motivação especial para o estudo da astronomia, demonstrou que a distância mais longa do Sol e da Terra varia e, consequentemente, os eclipses do sol são possíveis assim como os eclipses totais.

Na Matemática, em especial na Trigonometria, também deixou importantes contribuições. Tem o mérito de ter empregado pela primeira vez, depois dos hindus, os senos ao invés das cordas. Além disso, na tradução latina de suas obras, fez a primeira aparição do termo sinus (seno) e o teorema dos senos $\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{Sen C}}$ aplicado por Al-Battani.

Ghiyath Al-Kashi (1350 - 1439):

Ghiyat Al-Kashi ou Al-Kashani nasceu na cidade de Kashan, situada em um deserto no sopé oriental, na faixa central do Irã. Dedicou-se aos estudos da Astronomia e Matemática, tendo como uma das grandes contribuições o desenvolvimento do uso do sistema sexagesimal (base de numeração 60), que foi utilizado pelos astrônomos babilônicos.

Além disso, é atribuído a ele o cálculo da constante 2π com nove casas sexagesimais, o equivalente a dezesseis casas decimais. Esta conquista foi muito importante, pois ultrapassou a quantidade de casas decimais obtidos pelos gregos antigos e pelos chineses (que atingiram seis casas decimais no século V). Cerca de 200 anos depois, Ludolph Van Ceulen viria superar Al-Kashi, ao calcular com vinte casas decimais. Também foi responsável por generalizar o Teorema de Pitágoras ao desenvolver o Teorema dos Cossenos (conhecido por lei dos cossenos), posteriormente expresso por Viète na forma $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$.

Georg Joachim Von Lauchen Rheticus (1514 - 1576)

Nascido em Feldkirch, na Áustria, Georg Joachim Rheticus foi matemático e astrônomo. Filho de um médico de Feldkirch, Georg Iserin e da mãe italiana Thomasina de Porris e, por isso nascido Georg Joachim Iserin, foi educado pelo pai até os primeiros 14 anos da vida, quando esse foi condenado e decapitado por feitiçaria (1528). Obrigado oficialmente a mudar de nome, se tornou o Georg Joachim de Porris que ele traduziu o nome da mãe em italiano para o alemão von Lauchen, passando a Georg Joachim von Lauchen. Depois adicionou Rheticus em homenagem à província romana de Rhaetia.

Rheticus dedicou doze anos de sua vida, auxiliado por calculadoras remunerados, à construção de duas tábuas trigonométricas notáveis e ainda úteis hoje. Uma delas envolve as seis funções trigonométricas, calculadas com dez casas, para intervalos de 10” de arco; a outra é uma tábua de senos, com quinze casas, para intervalos de 10” de arco, juntamente com a primeira, a segunda e a terceira diferenças. Foi o primeiro a definir as funções trigonométricas como razões entre lados de um triângulo retângulo. Pelos cálculos das tábuas trigonométricas, foi responsável pelo empregou as seguintes identidades:

$$\mathrm{sen}\ m\,a = a\ \mathrm{sen}\ (m-1)a \cdot \cos a - \mathrm{sen}\ (m-2)a$$

$$\cos m\,a = a \cos\ (m-1)a \cdot \cos a - \cos\ (m-2)a$$

O texto que mostra as tábuas de funções trigonométricas foi completado e publicado em 1596.

Ludolph Van Ceulen (1540 - 1610)

Ludolph Van Ceulen foi um matemático holandês, nascido em 1540 na cidade de Hildishein e faleceu em 1610 em Leinden. Foi professor e é conhecido principalmente por ter calculado o valor do número pi (π) com uma aproximação de 35 algarismos. Ele teve muitas contribuições na área da Geometria e Trigonometria.

Van Ceulen tomou como base de seus cálculos a descoberta da fórmula da bissecção de arcos, e mediante sucessivas bissecções, partindo de um pentágono regular, chegou a calcular o perímetro de um polígono de 10.485.760 lados, obtendo assim o valor de π com onze casas decimais. Do mesmo modo, partindo sucessivamente primeiro de um quadrado, depois triângulo equilátero e, finalmente, de um pentadecágono regular, chegou a calcular o perímetro de um polígono regular de mais de 32 mil lados, o qual obteve o valor de π com dezenove algarismos.

Outra contribuição de Van Ceulen foi a introdução das identidades para um arco metade

$$\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

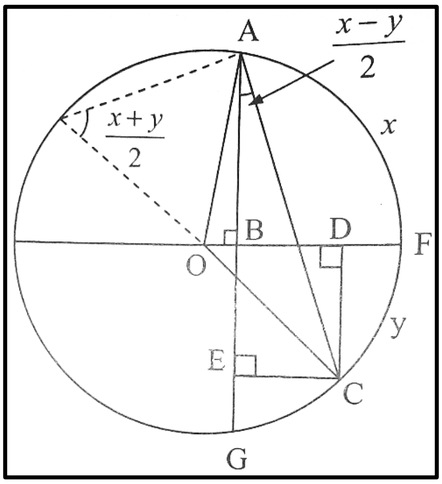
François Viète (1540 – 1603)

A vasta obra de Viète compreende trabalhos de trigonometria, álgebra e geometria, sendo os principais: Canon mathematicus seu ad triangula (1579), In artem analytican isagoge (1591), Supplementun geometriae (1593), De numerosa potestatum resolutione (1600) e De aequation recognitione et emendatione (publicado postumamente em 1615).

Era profundo conhecedor de trigonometria. Na sua obra Canon mathematicus seu ad trangula há contribuições notáveis. Trata-se talvez, do primeiro livro na Europa Ocidental a desenvolver sistematicamente métodos para resolver triângulos planos e esféricos com o auxílio das seis funções trigonométricas. Obteve expressões para $\cos n\theta$ como função de $\cos\theta$ para $n = 1, 2, \dots, 9$ e posteriormente sugeriu uma solução trigonométrica para o caso irredutível das cúbicas.

Foi responsável pela dedução de muitas das relações trigonométricas que conhecemos hoje, tais como transformação de soma e produto, arco duplo e arco triplo. Apresentaremos a seguir, a título de curiosidade, a dedução geométrica de algumas fórmulas, seguindo o diagrama criado por Viète.

Na transformação de soma em produto, considere o círculo de Centro O e raio r = 1.



Pela figura, temos arco $\mathrm{AF} = \mathrm{x}$, arco$\mathrm{FC} = \mathrm{y}$ e $\mathrm{G\hat{A}C} = \frac{\mathrm{x-y}}{2}$.

$\operatorname{sen} x = AB, \operatorname{sen} y = CD$ $\qquad \cos x = OB, \quad \cos y = OD$

$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = AB + CD,$ $\qquad \cos x - \cos y = OB - OD$

$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = AE,$ $\qquad \cos x - \cos y = -BD = -EC$

Logo, $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$ e

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

Viète também teve um grande destaque no desenvolvimento da Álgebra. O mais famoso trabalho é a sua obra In artem, ao qual contribuiu de forma singular ao apresentar uma nova nomenclatura para equações algébricas, introduzindo na Álgebra o emprego sistemático das letras para representar valores numéricos, que tornou possível a noção de fórmula geral. Nesse texto, ele introduziu a prática de se usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes.

A convenção atual de se usar as últimas letras do alfabeto para indicar as incógnitas e as primeiras para as constantes foi introduzida por Descartes em 1637. Antes de Viète era comum usarem letras ou símbolos diferentes para as várias potências de uma quantidade. Viète usava a mesma letra, adequadamente qualificada; assim, o que hoje se indica por x, x^2, x^3, ele expressava por A, A quadratum, A cubum; mais tarde alguns escritores abreviaram essa notação para A, A q, A c. Viète adotava os coeficientes de uma equação polinomial de modo a torná-la homogênea e usava os símbolos atuais + e –, mas não tinha o símbolo para a igualdade. Assim, o que escreveríamos $5BA2 - 2CA + A3 = D$. Enquanto que para ele seria B 5 in A quad $-$ C plano 2 in A $+$ A cub aequatur D solido.

François Viète foi um algebrista excelente, considerado como "o pai da Álgebra", de modo que não é de se surpreender que ele tenha aplicado a álgebra à trigonometria e à geometria. Ele deu sua parcela de contribuição aos três problemas famosos da Antiguidade ao mostrar que tanto o problema da trissecção como o da duplicação dependem da resolução de uma cúbica, assim como o cálculo de π e seu interessante produto infinito convergente para 2π. Não há dúvidas de que François Viète é considerado o maior matemático de sua época.

Olhares atuais sobre a trigonometria

Para finalizarmos este trabalho, apresentaremos alguns comentários sobre o tema trigonometria, com base em pesquisas mais recentes, a fim de se ter visões que norteiam o assunto abordado. Elegemos para análise e comentários os trabalhos de Emerson Carlos Castelo Branco, sob o título "A importância das deduções das fórmulas trigonométricas para a construção de uma aprendizagem significativa", datada de 2013, e de Carlos André Carneiro de Oliveira, intitulado "Trigonometria: o radiano e as funções seno, cosseno e tangente", datado de 2014.

Branco (2013) apresenta o desenvolvimento da trigonometria comentando que devido às necessidades da Astronomia, na navegação e da Geografia, os conhecimentos acerca da trigonometria, inicialmente com os triângulos esféricos começaram a ganhar destaque por volta de 300 a.C., a partir de Euclides, que viveu nessa época e desenvolveu em um de seus trabalhos, "O Fenômeno", estudos sobre geometria esférica, passando posteriormente por Aristarco, Apolônio, Teodásio, Hiparco e Ptolomeu, mostrando como as contribuições desses matemáticos formaram o que conhecemos hoje.

Branco (2013) apresenta ainda, comentários sobre a utilidade da trigonometria nas mais diversas civilizações, como por exemplo, os hindus, que tinham por finalidade a Astronomia, a trigonometria para eles era essencialmente aritmética, enquanto que para os gregos, a trigonometria era predominantemente geométrica.

Oliveira (2014) destaca a formação do conceito de radiano, mostrando que o termo radiano (radian) aparece impresso pela primeira vez em 1873, num exame escrito pelo físico James Thonson. O termo radian (radiano) provavelmente foi inspirado pela palavra radius (raio).

Oliveira (2014) discute ainda como se deu o uso da unidade radiano em trigonometria, devido a necessidade de unificar as unidades de medidas do arco e da corda (ou meia corda), e o raio do círculo foi adotado como unidade de medida comum, além da extensão das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente definidas no triângulo retângulo para as funções trigonométricas de domínio real e as demonstrações geométricas das fórmulas da adição e da subtração de arcos das funções seno, cosseno e tangente.

Considerações finais

Com base no diagrama apresentado, foi possível viabilizar a elaboração de um texto sobre o desenvolvimento da Trigonometria dentro de um recorte histórico previamente estabelecido. A construção de um texto com tais características, contempla o objetivo proposto no trabalho que visa fornecer um material didático adequado, para auxiliar o professor nas aulas de Trigonometria, considerando a escassez de textos didáticos que utilizam a História da Matemática, para subsidiar o ensino de Matemática.

Nesse sentido, o presente texto contribui para preencher a lacuna existente entre a necessidade de se abordar a História da Matemática no ensino de Matemática e a falta de material didático específico para esse fim.

Este trabalho, mostra que o desenvolvimento da Trigonometria contou com séculos de estudos e descobertas. A análise do diagrama mostra, por sua vez, produções esparsas dentro do recorte histórico adotado, indicando que o seu desenvolvimento ocorreu mais lentamente em determinado período e avançou significativamente em outros, provavelmente por conta do contexto histórico da época ou por dificuldades na compreensão das etapas necessárias para sua evolução.

Entendemos, portanto, que esses aspectos devem ser considerados no ensino de Matemática, pois geralmente espera-se que o aluno compreenda o assunto em um curto espaço de tempo, ignorando os possíveis obstáculos didáticos presentes em seu desenvolvimento histórico. Dessa forma, com este trabalho sugerimos um texto específico para o ensino de Trigonometria, a ser experimentada e melhorada em futuras pesquisas.

Referências

ASSOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES. **Trigonometria plana y esférica e introducción al cálculo**. Lima, Peru: Lumbreras Editores, 2012.

ASSOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES. **Razonamiento matemático**: propedéutica para las ciencias. Lima, Peru: Lumbreras Editores, 2012.

B.BOYER, Carl. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.

BRANCO, Emerson Carlos Castelo. **A importância das deduções das fórmulas trigonométricas para a construção de uma aprendizagem significativa**. 87 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática -

PROFMAT) - Universidade Federal do Maranhão. 2013. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/dezembro2013/matematica_artigos/dissertacao_emerson_carlos_castelo_branco.pdf>. Acessado em 17 de abril de 2017.

BRASIL. **Ministério da educação e cultura**. Parâmetros curriculares nacionais: Ensino médio. Volume 2: Ciência da natureza, matemática e tecnologia. Brasília: MEC, 2006, p. 75, 76.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve história** – V. 1. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve história** – V. 2. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

GOMES, S. C. **Ensino de trigonometria numa abordagem histórica** - um produto educacional. Holos. v.3, n.31. 2015. Disponível em: <www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/article/download/683/1101>. Acessado em: 11 de abril de 2017.

MENDES, Iran Abreu. CHAQUIAM, Miguel. **História nas aulas de matemática**: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHmat, 2016.

MIGUEL, Antonio. **As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão**: argumentos reforçadores e questionadores. Revista Zetetiké. Campinas (SP): Unicamp - FE - CEMPEM, 1997. p. 73-105. Disponível em: <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/download/2594/2338>. Acessado em: 04 de abril de 2017.

OLIVEIRA, Carlos André Carneiro. **Trigonometria**: o radiano e as funções seno, cosseno e tangente. 85 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal de Campina Grande. 2014. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1183/2012_00965_CARLOS

_ANDRE_CARNEIRO_DE_OLIVEIRA.pdf?sequence=1>. Acessado em 16 de abril de 2017.

OLIVEIRA, Francisco Canindé. **Dificuldades no processo ensino aprendizagem de trigonometria por meio de atividades**. 2006. 74 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2006. Disponível em: <http://www.ppgecnm.ccet.ufrn.br/publicacoes/publicacao_62.pdf>. Acessado em: 10 de abril de 2017.

ROSA, Carlos Augusto de Proença. **História da ciência: da antiguidade ao renascimento científico** / Carlos Augusto de Proença. — 2. ed. — Brasília : FUNAG, 2012. 3 v. em 4; 23 cm. Disponível em: <http://funag.gov.br/loja/download/1019-Historia_da_Ciencia_-_Vol.I_-_Da_Antiguidade_ao_Renascimento_CientIfico.pdf>. Acessado em: 02 de abril de 2017.

VICENTINO, Cláudio. DORIGO, Gianpaolo. **História para o ensino médio**. São Paulo: Scipione, 2001.

GEOMETRIA EUCLIDIANA E NÃO-EUCLIDIANAS
composição histórica

Adan Rodrigo Vale Pacheco
Fábio Barros Gonçalves
Miguel Chaquiam

Introdução

O modo de conceber a aprendizagem, o planejamento e plano pedagógico, os tempos das aprendizagens, as finalidades dos conteúdos, a transposição didática, dentre outros, são fatores que, de alguma forma, estão relacionados com a escolha metodológica do professor no processo de ensino e de aprendizagem.

Essa escolha transcende o simples fato de considerar apenas o conteúdo a ser ensinado, pois é necessário adequá-lo aos sujeitos envolvidos no processo, partindo de uma intencionalidade pré-estabelecida.

Neste sentido, percebe-se que as metodologias têm responsabilidade sobre a aprendizagem, pois influenciam nas representações elaboradas pelos estudantes as quais podem ser de determinismo e/ou de possibilidades, e esse olhar dependerá de como o conhecimento será mediado pelo professor.

Com relação ao processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, não existe um caminho único e melhor. Conhecer variadas possibilidades é essencial para a prática docente visando potencializar esse processo. Dentre elas, compreendemos ser relevante aqui destacar: a História da Matemática, as Tecnologias da Informação e Comunicação, os Jogos, a Resolução de Problemas, a Etnomatemática e a Modelagem Matemática, entretanto, neste trabalho será abordado uma proposta de uso da História da Matemática no ensino.

A História da Matemática, como um recurso pedagógico, permite contextualizar o conhecimento, situando-o e relacionando-o com variados contextos sociais nos quais foram concebidos, afinal, eles geralmente respondem as demandas historicamente situadas num tempo e espaço.

D'Ambrosio (2002) *apud* Almeida (2013), resume de forma clara e concisa essa ideia nos seguintes dizeres:

> [...] em todas as culturas encontramos manifestações relacionadas, e mesmo identificadas, com o que hoje se chama matemática (isto é, processos de organização, de classificação, de contagem, de medição, de inferência), geralmente mescladas ou dificilmente distinguíveis de outras formas [de conhecimento], que hoje são identificadas como Arte, Religião, Música, Técnica, Ciências. Em todos os tempos e em todas as culturas, Matemática, Artes, Religião, Música, Técnicas, Ciências foram desenvolvidas com a finalidade de explicar, de conhecer, de aprender, de saber/fazer e de predizer (artes divinatórias) o futuro. Todas aparecem mescladas e indistinguíveis como forma de conhecimento, num primeiro estágio da história da humanidade e na vida pessoal de cada um de nós.
> (D'AMBROSIO, 2002, p.60 *apud* ALMEIDA, 2013, p.24)

Segundo Almeida (2013, p.24), "todas essas formas de conhecimento são produtos do pensamento racional do ser humano e são consideradas como expressão do comportamento do homem moderno".

Nesse sentido, a História da Matemática como um recurso para o ensino de Matemática, não deve ficar limitada à descrição de fatos ocorridos no passado ou a mera apresentação da biografia de matemáticos importantes. É necessário abordar com os estudantes a história do conhecimento matemático, sua evolução, o contexto histórico, social e político no qual determinado conteúdo matemático emergiu, assim como as principais dificuldades enfrentadas para a formalização e aceitação, pelas sociedades, desse conhecimento ao longo do tempo.

As geometrias não-euclidianas, especificamente a hiperbólica e a elíptica, foi o tema escolhido por nós para ser abordado neste trabalho. Segundo Hansen (1997) *apud* Ribeiro (2012, p.30), "[...] embora a história das geometrias não-euclidianas envolva ideias geométricas e construções importantes e úteis, raramente é considerada no ensino contemporâneo da geometria." Ou seja, raramente é fomentada a discussão em sala de aula com os estudantes da educação básica e até mesmo do ensino superior brasileiro, da existência de outras geometrias diferente da euclidiana.

Além disso, Ribeiro (2012) diz que:

> As pesquisas brasileiras têm apontado como produtiva a possibilidade de uma apresentação simultânea de conceitos básicos de geometrias não-euclidianas e euclidiana na Matemática escolar. Mesmo quando as pesquisas não afirmam objetivamente esta possibilidade dão a entender pelo contexto. Bonete (2000), Pataki (2003), Martos (2002), Reis (2006) e Marqueze (2006) são autores que apresentam em suas dissertações propostas de trabalho com as geometrias não-euclidianas para o público escolar e, em todas elas, são ressaltados aspectos positivos de tais experiências.
> (RIBEIRO, 2012, p. 32)

Desta forma, acreditamos ser relevante levar ao conhecimento dos estudantes da educação básica não só a geometria euclidiana, mas também as geometrias não-euclidianas, pois estas possibilitarão novos olhares e novas interpretações a respeito da geometria euclidiana, assim como de outros contextos.

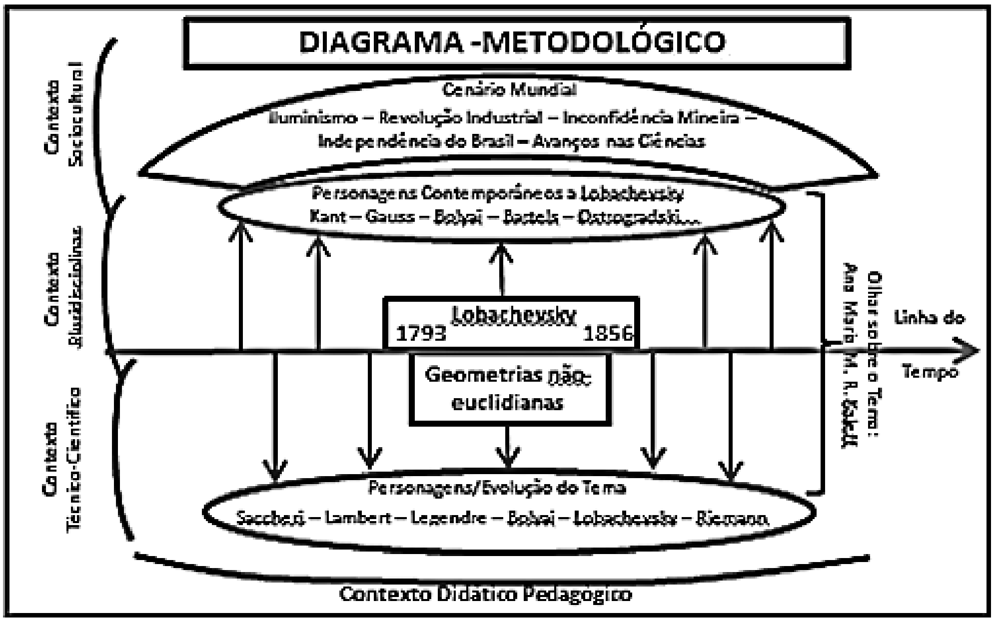
Assim, este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de inserção das geometrias não euclidianas na educação básica, com a utilização da História da Matemática de acordo com o modelo proposto por Chaquiam (2017).

Atualmente são trabalhadas várias propostas de ensino relacionadas à inserção do uso da história da matemática em sala de aula. A abordagem didática adotada neste artigo foi proposta por Mendes e Chaquiam (2016). Nela, os autores, destacam a importância de revisitar os momentos históricos dos personagens que contribuíram para o desenvolvimento das noções matemáticas que se pretende ensinar com a finalidade de promover nos alunos o estímulo para o estudo, pesquisa e criticidade que culminem em produção de conhecimento durante sua atividade escolar.

Tal abordagem pressupõe uma aproximação entre o conteúdo e o cenário mundial da época, contemporâneos do matemático em destaque, assim como daqueles que contribuíram para a evolução das ideias matemáticas em estudo. Portanto, nossa intenção, não é apenas destacar conteúdos matemáticos, nomes e datas, mas fomentar debates sobre as origens, evolução e formalização de conceitos matemáticos como estratégia para o ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos.

A partir desse entendimento, utilizamos a metodologia proposta por Chaquiam (2017) que consistiu na construção de um diagrama que orientou a elaboração de um texto sobre as Geometrias associada a personagens matemáticos, um central, Lobachevsky, e outros que contribuíram para evolução do tema, assim como, contemporâneos do personagem em destaque, Lobachevsky, e o cenário mundial da época conforme Figura 1, a seguir.

Figura 1: **Diagrama-Metodológico – Geometrias**



Fonte: Adaptado de Chaquiam (2016)

Como pode ser observado no diagrama metodológico, seus componentes estão distribuídos em três contextos, quais sejam: sociocultural, pluridisciplinar e técnico-científico.

Dessa forma, o artigo percorrerá a história da humanidade da época, os personagens contemporâneos ao personagem em destaque, o personagem em destaque, personagens que contribuíram para a evolução do tema e suas respectivas contribuições e nosso ponto de vista sobre o personagem em destaque ou tema trabalhado. Essa ordem, segundo Mendes e Chaquiam (2016, p. 99), pode proporcionar uma visão geral que se inicia em um contexto sociocultural, perpassa por um contexto pluridisciplinar e finaliza no contexto técnico-científico, com localização em tempo e espaço do personagem principal e evolução do conteúdo matemático.

Importante destacar, seguindo orientação de Mendes e Chaquiam (2016, p. 95), que a ordem descrita anteriormente para elaboração do texto didático-pedagógico não foi a mesma para a constituição do diagrama metodológico. Neste, iniciamos com a escolha do tema, em seguida, trabalhamos a evolução do tema e identificação dos personagens que contribuíram para o tema; elegemos um personagem principal; identificamos os contemporâneos do personagem evidenciado; fizemos um recorte na história da humanidade para descrever o cenário mundial e finalizamos identificando os pesquisadores que emitiram seu ponto de vista sobre o personagem destacado ou tema.

O personagem destacado será Lobachevsky por ter sido o primeiro a publicar sua teoria sobre Geometria Não Euclidiana em 1829 (EVES, 2004, p.543). Ele viveu no período compreendido entre 1793 e 1856. Por este motivo, faremos um recorte temporal que contemple os séculos XVIII e XIX, mais precisamente do ano 1750 a 1860.

Dessa forma, o passeio pelas geometrias se justifica, segundo Fonseca et al (2009, p.92), por seus aspectos utilitários e formativos. Utilitários porque evidencia os aportes que os recursos geométricos oferecem à resolução de problemas da vida cotidiana, ao desempenho de determinadas atividades profissionais ou à própria compreensão de outros conteúdos escolares. E formativo, porque é relevante assinalarmos o papel da Geometria como veículo para o desenvolvimento de habilidades e competências tais como a percepção espacial e a resolução de problemas escolares ou não, uma vez que ela oferece aos alunos "as oportunidades de olhar, comparar, medir, adivinhar, generalizar e abstrair" (SHERARD III, 1981 apud Fonseca et al, 2009, p. 92).

Mendes e Chaquiam (2016, p. 88) ressaltam que esta abordagem não tem como objetivo apresentar e discutir de forma detalhada e aprofundada indagações acerca de determinado tema ou sobre a história da matemática, mas, subsidiar o leitor com caminhos que possibilitem a construção de uma história, articulada ao desenvolvimento histórico dos conteúdos matemáticos, bem como a demarcação do tempo e espaço na história da humanidade para extrapolar a visão internalista da matemática, tendo em vista sua utilização em sala de aula durante o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos durante a Educação Básica.

Nesse sentido, este artigo servirá como material de apoio à professores de diversas áreas, mas sobretudo de matemática da Educação Básica e os que se encontram em formação. Ele poderá ser utilizado com alunos do Ensino Básico e Superior. Neste último, há a possibilidade de utilização nas disciplinas de História da Matemática e Didática da Matemática dos cursos de licenciatura em matemática como alternativa de ensino e elemento motivador para os alunos na elaboração de outros trabalhos.

Sugerimos aos docentes o uso dessa metodologia em sala de aula como recurso didático a partir da construção do diagrama metodológico obedecendo à ordem de prioridades descritas anteriormente. O texto didático pedagógico servirá de apoio para aprofundamentos, revisão do tema tratado e estudos posteriores.

Vale ressaltar a aplicação das geometrias em outras áreas do conhecimento, como, engenharias, astronomia e navegação. Portanto, a utilização deste material extrapola o campo estritamente matemático.

Neste momento, trabalharemos, como mencionado anteriormente, cada componente do diagrama metodológico nesta ordem, quais sejam: História da Humanidade; personagens contemporâneos à Lobachevsky;

Lobachevsky como personagem principal; personagens que contribuíram para a evolução da Geometria e ponto de vista sobre o tema estudado.

Cenário Mundial

Lobachevsky, personagem central, viveu de 1793 a 1856. Com o objetivo de compreender o contexto mundial em torno dele, assim como, nos situar no tempo e espaço, destacaremos alguns acontecimentos da História da Humanidade no período compreendido entre 1750 a 1860, quais sejam: Iluminismo, Revolução Industrial, Revolução Francesa, Inconfidência Mineira, Independência do Brasil e avanço na Ciência.

Iluminismo

O Iluminismo foi um movimento cultural da elite intelectual europeia do século XVIII que procurou mobilizar o poder da razão a fim de reformar a sociedade e o conhecimento herdado da tradição medieval. Ele também é conhecido como século das Luzes, pois os escritores da época estavam convencidos que emergiriam da escuridão e ignorância para uma nova era, iluminada pela razão, ciência e respeito à humanidade. O centro das ideias e pensadores Iluministas foi à cidade de Paris.

Este movimento aprofundou o processo da transformação social e técnica – em detrimento da metafísica e dos cálculos esotéricos.

Através da popularização da Ciência alcançou-se um grau de desenvolvimento. Ou seja, este foi

> um dos ícones daquele século, que marcou o sucesso definitivo de uma doutrina geral de progresso. O avanço da astronomia – com a perda do privilégio cósmico da Terra – e a necessidade de admitir que podemos não estar sós no universo tiveram uma profunda influência no pensamento humano. O destino universal do homem, defendido pela Igreja, sofreu forte abalo; restava-nos

> perdidos na imensidão do universo, encontrar uma teoria menos grandiosa para iluminar nosso futuro de habitantes desse pequeno planeta.
> (DUPAS, 2006, p. 40 apud Mello e Donato, 2011)

Segundo Mello e Donato, 2011 através de Adorno; Horkheimer, 1985 e Silva, 2005, este processo levou à dissolução dos mitos e a substituição da imaginação pelo saber racional e científico. Dessa forma, terminada a era das explicações metafísicas, a racionalidade acabava por tomar seu lugar com sentido único e absoluto para a validação do conhecimento humano, perdendo a natureza o seu fator de encantamento e receio ao homem e passando a ser sobreposta pelo pensamento racional e técnico da sociedade.

Pacievitch afirma que os iluministas defendiam a criação de escolas para que o povo fosse educado e a liberdade religiosa. Para divulgar o conhecimento, os iluministas idealizaram e concretizaram a ideia da Enciclopédia (impressa entre 1751 e 1780), uma obra composta por 35 volumes, na qual estava resumido todo o conhecimento existente até então.

Os principais pensadores iluministas foram: Montesquieu (1689-1755), Voltaire (1694-1778), Écrasez l'Infâme, Diderot (1713-1784), Rousseau (1712-1778) e D'Alembert (1717-1783).

A partir do iluminismo surgiu outro movimento, de cunho mais econômico e político: o liberalismo, que gerou acumulação de capital e em seguida, uma série de invenções de caráter tecnológico. Essas transformações tecnológicas que impactaram o processo produtivo em nível econômico e social será nosso foco no tópico seguinte.

Revolução Industrial

Segundo Gomes, as máquinas foram inventadas com o propósito de poupar o tempo do trabalho humano. Com isso a produção de mercadorias ficou maior e os lucros também. A consequência deste acontecimento foi o investimento de empresários no setor industrial.

Isso ocorreu entre 1760 a algum momento entre 1820 e 1840, onde os avanços no setor industrial não pararam e as indústrias se espalharam pela Inglaterra ocasionando várias mudanças. Este período de substituição das ferramentas pelas máquinas, da energia humana pela motriz e do modo de produção doméstico pelo sistema fabril recebeu o nome de Revolução Industrial. A revolução teve início na Inglaterra e em poucas décadas se espalhou para a Europa Ocidental e os Estados Unidos, encerrando a transição entre feudalismo e capitalismo.

Os ingleses davam muita importância ao comércio. Entretanto, quanto maior o comércio maior a concorrência. Valorizavam também a educação e os estudos científicos o que favoreceu as descobertas tecnológicas. Dessa forma, os ingleses vislumbraram uma nova possibilidade de ampliarem seus negócios. Começaram então a aperfeiçoar suas máquinas e investir cada vez mais em indústrias.

Essas mudanças não se restringiram à Inglaterra. No século XIX a Revolução Industrial chegou a França. Em 1850, chegou até a Alemanha. Nos EUA, o desenvolvimento industrial se deu na segunda metade do século XIX e na Itália, Rússia e Japão no final deste século.

O Brasil era colônia de Portugal quando iniciou o processo de Revolução Industrial na Inglaterra e, portanto, sofria os efeitos do Pacto Colonial imposto pela Coroa Portuguesa. Dessa forma, o modo de produzir gerado pela Revolução começou a se desenvolver significativamente em nosso país somente no final do século XIX e início do XX. Foram os cafeicultores de São Paulo com excedente de capital originário das exportações de café que começaram a investir no setor industrial.

Nesta fase, as principais atividades industriais era a de produção de tecidos e de processamento de alimentos. Estas indústrias eram de pequeno e médio porte, tocadas pela burguesia industrial que estava em plena ascensão. Concentravam-se, principalmente, nos centros urbanos dos estados da região Sudeste, sendo que a cidade de São Paulo era o grande polo industrial.

O grande desenvolvimento industrial brasileiro aconteceu nas décadas de 1930 e 1940 com o final das Repúblicas das Oligarquias. O governo de Getúlio Vargas, que teve inicio em 1930, incentivou o desenvolvimento do setor industrial nacional no país. Foi a partir da década de 1930 que o Brasil começou a mudar seu modelo econômico de agrário-exportador para industrial. Já no começo da década de 1940, ainda no governo Vargas, houve um forte incentivo industrial patrocinado pelo Estado com a criação de empresas estatais. Estas indústrias atuavam nos setores pesados, pois necessitavam de grandes investimentos. Como exemplos, podemos citar as seguintes empresas estatais que surgiram neste contexto: Companhia Siderúrgica Nacional (CSN), 1940; Companhia Vale do Rio Doce, 1942; Fábrica Nacional de Motores, 1943; Fábrica Nacional de Álcalis, 1943.

Com as transformações citadas houve o aparecimento de uma nova classe social, o proletariado. Mulheres e crianças eram exploradas com trabalhos pesados, salários baixos e jornadas de trabalho que variavam de 14 a 16 horas diárias para as mulheres, e de 10 a 12 horas por dia para as crianças.

Enquanto os burgueses se reuniam em grandes festas para comemorar os lucros, os trabalhadores chegavam à conclusão que teriam que começar a lutar pelos seus direitos. Uma das primeiras formas de luta dos trabalhadores foi conhecida como ludismo. Este movimento foi formado por trabalhadores que invadiam as fábricas e quebravam as máquinas. Além do ludismo, surgiram outras organizações operárias, sindicatos e greves.

Embora tardia, os efeitos da Revolução Industrial no Brasil foram positivas em muitos aspectos: Diminuição da dependência da importação de produtos manufaturados; Aumento da produção com diminuição de custos, barateando o preço final dos produtos; Geração de empregos na indústria; Organização dos trabalhadores da indústria em sindicatos, que passaram a lutar por melhores condições de trabalho, direitos e salários mais justos e Avanços nas áreas de transportes, iluminação urbana e infraestrutura. Entre os efeitos negativos, destacaram-se: Aumento da poluição do ar e dos rios (muitas industriais passaram a jogar produtos químicos e lixo em rios e córregos); Crescimento desordenado dos centros urbanos com o êxodo rural e aumentos da vinda de imigrantes para as grandes cidades e Uso de mão-de-obra infantil (na primeira etapa da industrialização).

Inconfidência Mineira

Segundo Sousa (2017), no século XVIII, a ascensão da economia mineradora trouxe um intenso processo de criação de centros urbanos pela colônia acompanhada pela formação de camadas sociais intermediárias. Os filhos das elites mineradoras, buscando concluir sua formação educacional, eram enviados para os principais centros universitários europeus. Nessa época, os ideais de igualdade e liberdade do pensamento iluminista espalhavam-se nos meios intelectuais da Europa.

Na segunda metade do século XVIII, a economia mineradora dava seus primeiros sinais claros de enfraquecimento. O problema do contrabando, o escasseamento das reservas auríferas e a profunda dependência econômica fizeram com que Portugal aumentasse os impostos e a fiscalização sobre as atividades empreendidas na colônia. Entre outras medidas, as cem arrobas de ouro anuais configuravam uma nova modalidade de cobrança que tentava garantir os lucros lusitanos.

No entanto, com o progressivo desaparecimento das regiões auríferas, os colonos tinham grandes dificuldades em cumprir a exigência estabelecida. Portugal, inconformado com a diminuição dos lucros, resolveu empreender um novo imposto: a derrama. Sua cobrança serviria para complementar os valores das dívidas que os mineradores acumulavam junto à Coroa. Sua arrecadação era feita pelo confisco de bens e propriedades que pudessem ser de interesse da Coroa.

Esse imposto era extremamente impopular, pois muitos colonos consideravam sua prática extremamente abusiva. Com isso, as elites intelectuais e econômicas da economia mineradora, influenciadas pelo iluminismo, começaram a se articular em oposição à dominação portuguesa. No ano de 1789, um grupo de poetas, profissionais liberais, mineradores e fazendeiros tramavam tomar controle de Minas Gerais. O plano seria colocado em prática em fevereiro de 1789, data marcada para a cobrança da derrama.

Aproveitando da agitação contra a cobrança do imposto, os inconfidentes contaram com a mobilização popular para alcançarem seus objetivos. Entre os inconfidentes estavam poetas como Claudio Manoel da Costa e Tomas Antônio Gonzaga; os padres Carlos Correia de Toledo, o coronel Joaquim Silvério dos Reis; e o alferes Tiradentes, um dos poucos participantes de origem popular dessa rebelião. Eles iriam proclamar a independência e a proclamação de uma república na região de Minas.

Com a aproximação da cobrança metropolitana, as reuniões e expectativas em torno da inconfidência tornavam-se cada vez mais intensas. Chegada a data da derrama, sua cobrança fora revogada pelas autoridades lusitanas. Nesse meio tempo, as autoridades metropolitanas estabeleceram um inquérito para apurar uma denúncia sobre a insurreição na região de Minas. Através da delação de Joaquim Silvério dos Reis, que denunciou seus companheiros pelo perdão de suas dívidas, várias pessoas foram presas pelas autoridades de Portugal.

Tratando-se de um movimento composto por influentes integrantes das elites, alguns poucos denunciados foram condenados à prisão e ao degredo na África. O único a assumir as responsabilidades pela trama foi Tiradentes. Para reprimir outras possíveis revoltas, Portugal decretou o enforcamento e o esquartejamento do inconfidente de origem menos abastada. Seu corpo foi exposto nas vias que davam acesso a Minas Gerais. Era o fim da Inconfidência Mineira.

Mesmo tendo caráter separatista, os inconfidentes impunham limites ao seu projeto. Não pretendiam dar fim à escravidão africana e não possuíam algum tipo de ideal que lutasse pela independência da "nação brasileira". Dessa forma, Sousa (2017) afirma que a inconfidência foi um movimento restrito e incapaz de articular algum tipo de mobilização que definitivamente desse fim à exploração colonial lusitana. Entretanto Gomes

(2017) ressalta que entre os objetivos dos inconfidentes estava a Independência do Brasil.

Neste contexto havia dentre outras aspirações e sentimentos: vontade de grande parte da elite política brasileira em conquistar a autonomia política; desgaste do sistema de controle econômico, com restrições e altos impostos, exercido pela Coroa Portuguesa no Brasil e tentativa da Coroa Portuguesa em recolonizar o Brasil. Essas foram algumas causas que levaram à Independência do Brasil.

Independência do Brasil

Segundo Fernandes (2017), a Independência do Brasil, ocorrida em 7 de setembro de 1822, é um dos acontecimentos mais importantes da história do Brasil, haja vista que foi nesse momento que houve uma clara ruptura com as Cortes Portuguesas. Para entendermos bem como se desenrolou o processo de Independência, é necessário que saibamos um pouco do contexto em que tanto Portugal quanto o Brasil estavam inseridos nas primeiras décadas do século XIX.

Sabemos que, em 1808, o Brasil havia sido alçado à condição de Reino Unido, junto a Portugal e Algarves – em decorrência da fuga da Família Real Portuguesa de sua terra, que ocorreu em razão da ofensiva das tropas de Napoleão Bonaparte. Como o Brasil tornou-se a sede desse Reino Unido, muitas transformações de toda ordem (política, cultural, econômica e social) ocorreram por aqui nesse período.

A atuação política de brasileiros, desde os mais radicais até os mais moderados, passou a ter amplo destaque durante a presença do príncipe regente D. João VI e de sua família aqui. Os problemas tiveram início quando, após a queda do Império Napoleônico, em 1815, uma onda de reconfiguração política deslanchou-se por toda a Europa, atingido também Portugal. Em 1820, houve a Revolução Liberal do Porto e, antes disso, a Conspiração de Lisboa, em 1817. A Revolução do Porto teve grande apoio de todas as camadas da população portuguesa, que passaram a exigir a convocação das Cortes para a elaboração de uma nova constituição para o Reino de Portugal.

Os membros da revolução também exigiram a volta da Família Real Portuguesa, que teve de sair do Brasil, deixando Dom Pedro, filho de Dom João VI, como príncipe regente no país. O ano de 1821 foi permeado por intensas discussões nas Cortes de Lisboa. O Brasil, na condição de membro do Reino Unido, também enviou para as Cortes os seus representantes, entre eles, o famoso Antônio Carlos de Andrada, irmão de José Bonifácio de Andrada e Silva, um dos "arquitetos" do Império do Brasil.

Nas discussões das Cortes Gerais Portuguesas, os embates entre brasileiros e lusitanos tornaram-se inevitáveis, sobretudo pelo fato de alguns portugueses desejarem a volta do Brasil à condição de colônia de Portugal. Com a resistência dos brasileiros a essa perspectiva, restava aos portugueses exercer maior pressão. Uma das manobras foram as tentativas de obrigar o príncipe Dom Pedro a regressar a Portugal, deixando então os brasileiros sem representante legítimo em seu solo. O episódio mais emblemático que ilustra essa situação e que se tornou uma espécie de "prólogo da Independência" foi a decisão de Dom Pedro, no dia 9 de janeiro de 1822, em optar por ficar no Brasil. Esse dia ficou conhecido como Dia do Fico.

Nos meses que se seguiram, os conflitos com os portugueses tornaram-se ainda mais intensos. Em 07 de setembro daquele mesmo ano (1822), a Independência foi consumada, como afirma Fernandes (2017):

> Alcançado em 7 de setembro de 1822, às margens do riacho Ipiranga, dom Pedro proferiu o chamado Grito do Ipiranga, formalizando a independência do Brasil. Em 1º de dezembro, com apenas 24 anos, o príncipe regente era coroado Imperador, recebendo o título de dom Pedro I. O Brasil se tornava independente, com a manutenção da forma monárquica de governo. Mais ainda, o novo país teria no trono um rei português. Este último fato criava uma situação estranha, porque uma figura originária da Metrópole assumia o comando do novo país. Em torno de dom Pedro I e da questão da sua

> permanência no trono muitas disputas iriam ocorrer, nos anos seguintes.
> (FERNANDES, 2017, *apud* FAUSTO, 2013, p. 116)

Avanços nas Ciências

O século XIX (de 1801 a 1900) foi um período histórico marcado pelo colapso dos impérios da Espanha, China, França, Sacro Império Romano-Germânico e Mogol. O século também testemunhou o crescimento da influência dos impérios Britânico, Russo, Alemão, Japonês, e dos Estados Unidos, estimulando conflitos militares, mas também avanços científicos e de exploração.

Na medicina, o conhecimento da anatomia humana e a prevenção de doenças foram responsáveis pela rápida aceleração do crescimento populacional no Hemisfério Ocidental. A população europeia dobrou de cerca de 200 milhões para mais de 400 milhões.

O desenvolvimento da medicina se relaciona diretamente com a migração, superlotação das cidades e as precárias condições de vida da classe trabalhadora própria da Revolução Industrial. A sua consequência foi a proliferação das doenças infecciosas (sífilis, tuberculose) ou relacionadas com a má alimentação (pelagra, raquitismo, escorbuto). Esses problemas são cruciais para entender a origem da medicina social de Rudolf Virchow e o sistema de saúde pública de Edwin Chadwick que dariam lugar a atual medicina preventiva. A mesma Revolução Industrial, junto com numerosas guerras e revoluções, gerariam um desenvolvimento científico generalizado que contribuiria com a instauração de condições técnicas para o triunfo da assepsia, da anestesia e da cirurgia.

As Revoluções liberais, promovendo cidadãos livres-pensadores, constroem uma nova medicina científica e empírica, desligada do místico e artesanal. Culmina-se com a opressão dos velhos cânones éticos do absolutismo e o catolicismo instaurando novos cânones, novos calendários. O século XIX verá nascer a medicina experimental de Claude Bernard, a teoria de Omnia cellula a cellula de Rudolf Virchow, a teoria microbiana das doenças, a teoria da evolução das espécies de Charles Darwin, e a genética de Gregor Mendel.

No campo das invenções, em meados do século XIX, destacaram-se: Locomotiva de Richard Trevithick, 1804; Fotografia: Louis Jacques Daguerre, 1816; Anestesia: William Morton, 1846; Lâmpada incandescente: Heinrich Göbel, 1854 e Telefone: Antonio Meucci, 1854.

Quanto às teorias importantes referentes ao período recortado, temos: Teoria dos números: Carl Friedrich Gauss, 1801; Positivismo: Auguste Comte na primeira metade do século XIX; Marxismo: Karl Marx, Friedrich Engels, 1848 e Teoria da Evolução: Charles Darwin, 1859.

A seguir destacamos os contemporâneos ao personagem principal, Lobachevsky, descrevendo seus traços biográficos e trabalhos desenvolvidos.

Emmanuel Kant

Segundo Maciel (2017), o filósofo alemão Emmanuel Kant (1724 – 1804), foi um dos principais pensadores do período moderno da filosofia. Abordando questões que abrangiam desde a moralidade até s natureza do espaço e do tempo, Kant é reconhecido particularmente por promover s reunião conceitual entre o racionalismo, que tem em Descartes seu maior expoente, e o empirismo, tal como apresentado por Hume. Desta forma reunindo o potencial da razão humana e a relevância da experiência no processo de aquisição produção de conhecimento.

Kant comparou a si mesmo com Copérnico, que reverteu a forma como vemos o sistema solar, na medida em que seu trabalho promoveu uma revolução similar na filosofia. Isto ocorreu quando Kant demonstrou como os problemas metafísicos tradicionais poderiam ser superados pela suposição de que a concordância entre os conceitos que usamos para conceber a realidade e a própria realidade surge da conformação desta realidade a mente humana, de modo ativo e de forma que todos os humanos possam experimenta-la, e não porque nossos conceitos mentais passivamente reflitam a realidade, sem nada adicionar. Destarte, para Kant, a experiência era de extrema importância, mas a mente humana era a condição de possibilidade para qualquer experiência. A mente humana é o que nos permite transcender a mera atitude passiva em relação a realidade e termos experiências genuínas.

Em sua Crítica da Razão Pura, de 1781, Kant leva este trabalho a cabo e busca afastar o ceticismo de filósofos como David Hume, promovendo a dissolução do impasse entre racionalistas e empiristas. Sua posição não implica em relativismo da realidade, de fato Kant defende uma realidade objetiva, para a qual cunhou o termo "*coisa em si*", porém, se não pelas configurações específicas da mente humana a experiência da coisa em si é impossível, de modo que só temos acesso ao resultado de nossos conceitos aplicados sobre s realidade, para o que utilizou o termo "fenômeno". Desta forma, não temos acesso a coisa é si, mas a mente humana não altera s realidade, enquanto coisa em si, ela altera a nossa experiência da realidade, o fenômeno, em última instância, a mente humana torna possível a experiência.

Devido a estas mesmas configurações, conceitos como espaço e tempo são compartilhados por todas as mentes, de modo a tornar possível a comunicação, o conhecimento e a moral.

Em ética, seu principal legado é o conceito de imperativo categórico, que utilizou para afastar a visão utilitarista.

Em termos de filosofia politica, Kant foi uma expoente da ideia de que a *Paz Perpétua* seria o resultado da história universal, sendo atingida, em algum momento, e garantida sem um planejamento racional, mas pela cooperação internacional. O autor defendeu um estado baseado na lei, ou uma reunião de indivíduos sob a lei, com um governo republicano. Kant recusou a democracia direta, pois esta oferece risco a liberdade individual, comparando a democracia com o despotismo, uma vez que esta estabelece um poder executivo que pode governar contra a liberdade dos indivíduos que discordam da maioria. Criticou ainda que a democracia é normalmente identificada com a ideia de que todos governam, mas de fato o "todo" não é a totalidade. O autor propunha um governo misto, composto de elementos da democracia, aristocracia e monarquia, o que deveria servir para evitar as suas formas degeneradas, respectivamente anarquia, oligarquia e tirania.

As posições e teorias de Kant continuam a ser estudadas ativamente, em campos clássicos como a política e a metafísica, assim como em campos contemporâneos como a ciência cognitiva e filosofia da psicologia. Entre seus maiores críticos encontramos os filósofos Arthur Schopenhauer e Johann Georg Hamann.

Carl Friedrich Gauss

De acordo com Amaral (2017), Carl Friedrich Gauss nasceu em 1777 e viveu até 1855. É considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Gauss teve a estatura de Arquimedes e de Newton, e seus campos de interesse excederam os de ambos. Gauss contribuiu para todos os ramos da Matemática e para a Teoria dos Números. Seu pai era jardineiro e assistente de um comerciante, e enquanto criança mostrou grande talento para a matemática. Sua produção intelectual foi precoce; existe um conto que ilustra como Gauss deduziu a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética. Diz a história que sua professora primária para manter a classe ocupada, lhe passou a tarefa de fazer uma soma de 1 a 100, tarefa que Gauss cumpriu quase que de imediato com a utilização da fórmula da PA.

Amigos de seu professor o apresentaram ao Duque de Brunswick, quando tinha 14 anos. O Duque passou a financiar sua educação e posteriormente suas pesquisas científicas. Gauss ingressou na universidade em outubro de 1795. Em seu primeiro semestre na universidade fez uma brilhante descoberta que o homem buscava a mais de 2000 anos como construir com compasso e esquadro. Esta descoberta foi comemorada com o início de seu diário que durante os próximos 18 anos foi testemunha de muitas de suas descobertas. Dentre suas descobertas nos tempos de estudante as mais significativas são a do método dos mínimos quadrados, a prova da reciprocidade quadrática na teoria dos números.

Até a idade de 20 anos Gauss teve um grande interesse por idiomas e quase se tornou um filologista. Posteriormente, literatura estrangeira e leituras sobre política eram seus passatempos, ambos com tendências conservadoras. Aos 28 anos, quando atingiu uma condição financeira confortável ele se casou com Johanne Osthof, sendo muito feliz. Teve com ela tres filhos. Porém, depois do nascimento do terceiro filho, em 1809, sua esposa faleceu. Depois ele se casaria novamente e teria mais tres filhos, no entanto sua vida não foi mais a mesma, e voltou-se cada vez mais para a pesquisa matemática.

Gauss obteve seu doutorado com a defesa de uma tese intitulada New Demonstration of the Theorem that Every Rational Integral Algebric Function in Variable Can be Solved Into Real Factors of First or Second Degree.

Em 1798 Gauss retornou a Brunswick, onde ele viveu sozinho e continuou seu intensivo trabalho. No próximo ano com a quarta prova do teorema fundamental da álgebra, concluiu seu doutorado em 1801. A criatividade dos anos que se precederam se refletiram em duas descobertas :"Disquesitiones Arithmeticae" e o cálculo da órbita do planeta Ceres que havia sido recentemente descoberto.

A teoria dos números é um ramo da matemática que caminha para generalizações, entretanto é cultivada desde a antiguidade. O final do século XVIII foi considerado uma grande coleção de resultados isolados . Em sua Disquesitiones Gauss sumarizou seu trabalho anterior de forma sistemática, e solucionou algumas das mais difíceis questões, simulou conceitos e questões que serviram de guia para o século e ainda são significantes hoje. São alguns destes trabalhos, a prova da lei da reciprocidade quadrática, o desenvolvimento da teoria da composição de formas quadráticas, e completou a análise da equação ciclotômica.

Em janeiro de 1801 G.Piazzi observou e perdeu um novo planeta. Durante o restante do ano astrônomos tentaram em vão relocalizar o novo planeta. Em setembro, com o término de sua obra Disquesitiones, Gauss decidiu assumir mais este desafio. Para isso ele aplicou duas das mais apuradas teorias de órbitas e improvisou métodos numéricos. Em dezembro a tarefa estava cumprida e o planeta foi encontrado na órbita pré-calculada. Este feito de localizar um corpo celeste pequeno e distante com informações visuais insuficientes pareceu sobre-humana, principalmente porque Gauss não revelou seus métodos. Juntamente com o Disquesitiones Gauss firmava sua reputação de matemático e cientista genial. Esta década que começava com o Disquesitiones e Ceres foi decisiva para Gauss. Cientificamente este foi o principal período de exploração de idéias, foi o ponto de partida para a próxima década, terminando com a publicação da Theoria Motus Couporum Coilestium In Sectionibus Conics Solem Ambientum, em que Gauss desenvolveu sistematicamente seus métodos de cálculo de órbitas incluindo a teoria e o uso de quadrados mínimos.

Profissionalmente esta foi uma década de transição para a matemática astronômica apesar disso Gauss estava bem com seu patronado do duque, entretanto se sentia inseguro e precisava de um posto mais sólido. No entanto, Gauss sentiu muito quando o Duque foi morto na Batalha de Jena (1806) em combate a Napoleão. A astronomia acabou sendo a opção mais interessante. Gauss assumiu o posto de direção do observatório de Göttingen sendo que nesta época já era afiliado à London Royal Society e às academias russa e francesa.

Após a metade da década de 1820 Gauss se rendeu às pressões financeiras, e aos problemas de saúde e de família. Os estudos de Gauss tiveram seu início formal em 1829 com estudos sobre o campo magnético terrestre, porém Gauss mostrou pouca experiência para realizar medições, o que tornou valiosa a colaboração de Weber, um jovem e brilhante fisico. Em outubro deste ano Gauss voltou-se a estender seus conhecimentos no campo da física, começando a trabalhar em problemas de física teórica, especialmente em mecânica, capilaridade, acústica, óptica e cristalografia, tendo como primeiro fruto destes trabalhos o "Uber Ein Neues Allgemeines Grundgesetz Der Mechanik".

Em 1830, Gauss publicou o "Principia Generalia Theoriare Figurae Fluidorum En Statu Aequilibrii" que foi uma importante contribuição para o campo da capilaridade e teve um importante papel no cálculo de variações, pois foi a primeira solução envolvendo integrais duplas, condições de contorno e limites variáveis.

Em 1832 Gauss apresentou à Academia o "Intensisitas Vis Magnecticae Terrestris Ad Mensuram Absolutam Revocata", em que aparece pela primeira vez o primeiro uso sistemático de unidades absolutas (distância, massa, tempo) para medir grandezas não mecânicas.

Juntamente com Weber, em 1833, Gauss chegou às leis de Kirchoff e antecipou várias descobertas na eletricidade, estática, térmica e da fricção, porém não publicaram resultados, pois seus interesses estavam voltados ao eletromagnetismo terrestre, sendo que a publicação de maior relevância neste campo foi "Allgemeine Theorie Des Ermagnetismus (1839)" no qual Gauss expressa o potencial em qualquer ponto da superfície da terra como uma série infinita de funções esféricas, juntamente com dados experimentais.

Gauss terminou suas pesquisas no campo da física com a publicação de "Allgemeine Lehrsatse In Beziehung Auf Die Im Verkehrten Verhaltnisse Des Quadrats der Entfernung Wirkenden Anziehungs Und Abstossungskrafte (1840)". No mesmo ano Gauss terminou o 'Dioptrische Untersuchungen (1841), no qual ele analisa o caminho da luz através de um sistema de lentes e mostrou entre outras coisas, que qualquer sistema é equivalente à escolha correta de uma única lente. Gauss dizia que esta teoria era de seu conhecimento a quarenta anos, porém ele as considerava muito elementares para serem publicadas, sendo que esta teoria foi tida como um de seus melhores trabalhos, por parte de um de seus biógrafos.

Com o aparecimento dos trabalhos sobre superfícies curvas o clima do mundo da matemática começou a mudar. Um dos mais significativos aspectos desta mudança foi a fundação de um novo periódico científico. A iniciativa prévia de manter um periódico matemático foi da Escola Politécnica, quando esta começou a publicar sua revista. Pouco tempo depois, em 1810, o primeiro periódico matemático foi publicado: era o Annales De Math&eacutematiques Pures Et Aplique&eacutes. Dentre estes novos periódicos que surgiam, Gauss participou com dois pequenos artigos no Journal Fur Die REINE Und Angerandle Mathematich. Um destes artigos foi uma prova do teorema de Hariot na álgebra, enquanto o outro continha o princípio de Gauss da restrição mínima.

Durante os últimos 20 anos de sua vida Gauss publicou artigos de grande interesse para a matemática. Um destes foi a quarta prova do teorema fundamental da álgebra que ele realizou na época de seu doutorado (1849), 15 anos depois da publicação de sua primeira prova. A outra foi um texto sobre teoria potencial em 1840 em um dos volumes de "Geomagnétic Results", que foi co-editado com seu jovem amigo o físico Wilhelm Weber. O geomagnetismo ocupou grande parte do tempo de Gauss na década de 1830. A maioria de suas publicações na última década de sua vida no observatório astronômico, faziam menção aos planetas recém descobertos, como Netuno.

A matemática gaussiana, serviu de ponto de partida para muitas das principais áreas de pesquisa da matemática moderna. As anotações de Gauss mostraram posteriormente que ele antecipou a geometria não-Euclidiana, 30 anos antes de Bolyai e Lobachevsky. Descobriu o teorema fundamental de Cauchy da análise complexa 14 antes. Descobriu os quaternios antes de Hamilton e antecipou muitos dos mais importantes trabalhos de Legendre, Abel e Jacobi. Se Gauss tivesse publicado todos os seus resultados, teria feito avançar o progresso da Matemática em mais de 50 anos.

Janos Bolyai

Segundo material encontrado na biblioteca matemática da Universidade de Coimbra, János Bolyai foi um matemático húngaro, conhecido pelo seu trabalho na geometria não-Euclidiana.

Bolyai nasceu no ano de 1802 em Kolozsvár, Transylvania, Reino da Hungria, Império Habsburgo, hoje Cluj-Napoca, Roménia, filho de Zsuzsanna Benko e de Farkas Bolyai, famoso matemático, mas logo foi para Marosvásárhely Farkas, onde o seu pai ensinava matemática, física e química no Colégio Calvinista, pois Farkas Bolyai sempre quis que o seu filho fosse um matemático.

Estava claro desde o início, porém, que János era uma criança extremamente inteligente e atenta: ... aos quatro anos ele sabia distinguir certas figuras geométricas, sabia sobre a função seno, e sabia identificar as constelações conhecidas. Aos cinco anos tinha aprendido, praticamente sozinho, a ler. Aos 13 anos, tinha dominado as formas de cálculo e outros tipos de mecânica analítica. O seu pai tinha uma obsessão com o famoso postulado da paralela de Euclides, tendo dedicado a sua vida a tentar provar isso. Apesar das advertências de seu pai que iria arruinar sua saúde, paz de espírito e felicidade, Janos também começou a trabalhar sobre este axioma, até que, por volta de 1820 ele chegou à conclusão de que não podia ser provado. Passou a desenvolver uma geometria consistente em que o postulado das paralelas não é utilizado, estabelecendo assim a independência do axioma.

Entre 1820 e 1823 preparou um tratado sobre um sistema completo de geometria não-euclidiana. O trabalho de Bolyai foi publicado em 1832 como um "apêndice" a um ensaio de seu pai. Gauss, após ler o "apêndice", escreveu a um amigo dizendo: "Eu considero este jovem geómetra Bolyai um génio de primeira ordem".

Além do seu trabalho em geometria, Bolyai desenvolveu um rigoroso conceito geométrico dos números complexos com pares ordenados de números reais. Apesar de nunca ter publicado mais de 24 páginas do "apêndice", ele deixou mais de 20000 páginas de manuscritos matemáticos. Estes podem ser encontrados na Biblioteca Bolyai-Teleki em Morosvásáhely, actual Târgu-Mures, Roménia.

Personalidade singular foi um hábil violinista e exímio espadachim. Foi um linguista, conseguindo falar nove idiomas, incluindo chinês e tibetano. Morreu com 58 anos de idade, em Janeiro de 1860.

Johann Christian Martin Bartels

De acordo com Connor e Robertson (2017), quando Martin (1769-1836) nasceu, o mercado de estanho tinha caído acentuadamente com os produtos de barro e porcelana. Os Bartels viveram em Brunswick, que hoje é a cidade de Braunschweig na Alemanha, e sua casa estava no Wendengraben (hoje Wilhelmstrasse) ao lado de um canal do mesmo nome. Martin Bartels mostrou um interesse considerável na matemática como um rapaz, mas, em 1783, com a idade de 14 anos, ele foi empregado como professor de escola primária na Katherinen-Volksschule que estava perto de sua casa. Lá ele era um assistente do professor Büttner e logo Bartels começou a ensinar um menino que, como ele, viveu no Wendengraben. Esse jovem garoto foi Carl Friedrich Gauss que começou a estudar na Katherinenschule em 1784.

> Por sorte o professor Büttner tinha um assistente, Johann Martin Bartels, um jovem com paixão pela matemática, cujo dever era ajudar os principiantes por escrito e cortar suas canetas para eles. Entre o assistente de dezessete e o aluno de dez [Gauss] surgiu uma amizade calorosa que durou a vida de Bartels. Eles estudaram juntos, ajudando uns aos outros sobre dificuldades e amplificando provas em seu livro comum sobre álgebra e os rudimentos da análise. Desse primeiro trabalho desenvolveu-se um dos interesses dominantes da carreira de Gauss [álgebra]. ... Bartels fez mais por Gauss do que induzi-lo aos mistérios da álgebra. O jovem professor conhecia alguns dos homens influentes de Brunswick. Ele agora se interessava por esses homens em seu achado [Gauss].
> (E.T. BELL, *apud* ROBERTSON, 2017)

Em particular, Bartels informou Eberhard August Wilhelm Zimmermann (1743-1815) que havia sido professor de matemática, física e história natural no Collegium Carolinum em Brunswick desde 1766. Isso foi extremamente valioso para o jovem Gauss, mas este encontro notável de mentes entre Gauss E seu jovem professor Bartels levou Bartels a tornar-se determinado a prosseguir o seu estudo da matemática. Devemos notar, no entanto, que em Dick apresenta uma visão diferente da aceita que nós demos acima. Ele sugere que Bartels tinha maiores tarefas a fazer do que ensinar cálculo na escola, que não se sabe se Bartels ensinou o cálculo de Gauss e que não está claro se Bartels usou sua influência para ajudar Gauss a continuar sua educação em outros estabelecimentos.

A associação de Bartels com o Collegium Carolinum foi formal a partir de 23 de agosto de 1788, quando ele se tornou um visitante lá. Então, em 23 de outubro de 1791, ele entrou na Universidade de Helmstedt, onde estudou com o professor de matemática Johann Friedrich Pfaff. Em seguida, mudou-se para a Universidade de Göttingen, onde seus professores incluíram Abraham Gotthelf Kästner, o professor de matemática e física. No entanto, a matemática não foi o único assunto que Bartels estudou, pois no semestre de inverno de 1793-4 estudou Física Experimental, Astronomia, Meteorologia e Geologia.

Em 1800, Bartels foi nomeado para ensinar matemática em Reichenau, uma cidade suíça perto da cidade de Chur. Ele conheceu Anna Magdalena Saluz de Chur e eles se casaram em 1803; Sua filha Johanna Henriette Francisca Bartels (nascida em 1807) casou-se com o astrônomo Wilhelm Struve em fevereiro de 1835. No entanto, em 1801 Bartels se mudou para Aarau, no norte da Suíça, onde lecionou na escola cantonal. A partir de 1803 voltou à Alemanha ensinando na Universidade de Jena e, lá em 1807, recebeu um convite de Stepan Rumowski para ser professor de Matemática na Universidade Estadual de Kazan. Esta universidade tinha sido fundada em 1804, o resultado de uma das muitas reformas do imperador russo Alexander I, e abriu no ano seguinte. Rumowski foi responsável pela criação da universidade e a maioria dos professores que ele havia convidado a ir lá eram da Alemanha. Bartels assumiu seu posto de professor de matemática em Kazan em 1808 e, durante os doze anos seguintes, lecionou sobre a História da Matemática, Cálculo Aritmético Superior, Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Trigonometria, Trigonometria Esférica, Mecânica Analítica e Astronomia.

> Nos primeiros anos, a atmosfera no Departamento foi bastante favorável. Os alunos estavam cheios de entusiasmo. Eles estudavam dia e noite para compensar a falta de conhecimento. Os professores, principalmente convidados da Alemanha, se mostraram excelentes professores, o que não era comum.
>
> (VINBERG, *apud* CONNOR e ROBERTSON, 2017)

Em 1808, Nikolai Ivanovich Lobachevsky teve a sorte de estudar com Bartels na Universidade de Kazan pouco tempo depois de assumir o seu cargo lá. Não só Bartels ajudou Lobachevsky com seus estudos, mas também cuidou de seu jovem aluno, apoiando-o quando ele entrou em apuros com as autoridades (o que aconteceu muitas vezes!) Quando Lobachevsky estava para se formar era Bartels que passou três dias de lobby Os outros professores para lhe conceder um mestrado. As autoridades universitárias não queriam dar um diploma a Lobachevsky por causa de seu mau comportamento. Bartels ganhou o argumento e Lobachevsky foi concedido um grau de mestre. Depois de se formar em 1811, Lobachevsky permaneceu em Kazan para estudar com Bartels que guiou sua leitura de Disquisitiones Arithmeticae de Gauss e Mécanique Céleste de Laplace. Em 1814 foi principalmente devido a Bartels que Lobachevsky foi nomeado como professor assistente. Devemos notar que Lobachevsky tomou o curso de Bartels sobre a História da Matemática que, seguindo Montucla, considerou em detalhes os Elementos de Euclides e sua teoria de linhas paralelas. Foi este curso que fez Lobachevsky pensar sobre a geometria não euclidiana.

Quando Bartels estava prestes a deixar Kazan em 1820 ele escreveu sobre seu tempo lá, dando uma impressão semelhante àquela na citação de Vinberg:

> Fiquei muito feliz em encontrar lá [Kazan], apesar do pequeno número de alunos, um monte de entusiasmo para o estudo das ciências matemáticas. Em minhas palestras sobre análise mais elevada, eu poderia ter pelo menos vinte ouvintes, de modo que pouco a pouco uma pequena escola de matemática surgiu.
>
> (CONNOR e ROBERTSON, 2017)

Em 1821 Bartels moveu-se para a universidade em Dorpat (agora Tartu em Estónia). Dorpat tinha sido parte da Polônia, depois da Suécia, mas em 1704 foi anexado à Rússia por Pedro o Grande. A universidade de Dorpat tinha sido fundada em 1632 por Gustavo II Adolphus de Sweden em 1632. Contudo fechou em 1710 e remanesceu vazio por quase 100 anos antes de reabrir em 1802 como o Kaiserliche Universität zu Dorpat. Bartels fundou o Centro de Geometria Diferencial em Dorpat, e permaneceu lá até sua morte em 1836.

Bartels fez a maior parte de suas contribuições para a pesquisa matemática depois de ser nomeado para a Universidade de Kazan. No entanto, ele não publicou suas descobertas até depois que ele se mudou para Dorpat e mesmo assim ele não publicá-los todos. Alguns só sabemos porque seus alunos incluíram os resultados em seu próprio trabalho reconhecendo que Bartels lhes tinha dado em seus cursos de palestra. Um desses resultados é o famoso Frenet-Serret fórmulas que foram descobertos primeiro por Bartels. Ele introduziu o método de mover triedros. A cada ponto de uma curva espacial Bartels associou um triedro, que mais tarde se chamou o triedro Frenet, e Bartels obteve as fórmulas agora conhecidas como as fórmulas Frenet-Serret. Só sabemos disso desde que eles foram publicados em um trabalho premiado por seu aluno Carl Eduard Senff em teoremas principais da teoria das curvas e superfícies em 1831, com o devido reconhecimento a Bartels. Frenet deu seis das fórmulas em 1847 e mais tarde Serret deu todos os nove.

Note-se que Bartels correspondia com Gauss desde o tempo em que trabalhava na Suíça. A correspondência continuou ao longo dos anos que ele trabalhou em Kazan e durante os primeiros anos que ele estava em Dorpat. Depois que Gauss tornou-se famoso, um gracejo rodou que Bartels era o melhor matemático na Alemanha porque Gauss era o melhor matemático no mundo.

Dois anos depois de Bartels se mudar para Dorpat, ele se tornou um Conselheiro Privado em 1823. Ele foi homenageado com a eleição para a Academia de Ciências de São Petersburgo. Morreu em 1836.

Mikhail Ostrogradski

Segundo Connor e Robertson (2017), Ostrogradski (1801-1862) nasceu em uma cabana coberta de palha na terra de seu pai. Como a maioria das crianças, ele mostrou grande curiosidade no mundo ao seu redor, mas, ao contrário da maioria, ele obteve grande prazer de medir objetos. Não só mediu as dimensões de seus brinquedos, mas também mediu a profundidade dos poços e dos comprimentos dos campos. Ele sempre carregava uma pedra no bolso, que tinha um longo pedaço de fio amarrado ao redor dele para que ele pudesse medir a profundidade de qualquer poço que ele encontrou. Ele também ficou fascinado por moinhos, sentados durante longos períodos observando as velas girarem, girando a roda da água e girando a pedra do moinho para triturar o grão.

Ele freqüentou o Poltava Gymnasium escola secundária, começando a sua educação lá em 1809. Ele embarcou em uma casa que ofereceu alojamento para a "educação dos filhos de nobres empobrecidos". Seu tutor foi Ivan Petrovych Kotlyarevsky (1769-1838), que fez um nome para si mesmo como escritor, poeta e ativista social. O Ostrogradski não brilhou em seus assuntos acadêmicos no Ginásio. Quando chegou a hora de partir, Ostrogradski expressou o desejo de ter uma carreira militar. Quase certamente Kotlyarevsky influenciou-o nesta decisão desde que tinha servido no exército imperial russo, lutando na guerra russo-turca. No entanto, a família de Ostrogradski não era rica e, apesar de suas tradições militares, sentia-se que o salário de um soldado não era bom o suficiente. Eventualmente, decidiu-se que ele deveria assumir uma carreira na função pública e, a fim de obter uma posição de alta posição de uma educação universitária era necessário. No entanto, ele não tinha os conhecimentos necessários para iniciar os estudos universitários, então ele participou de palestras e estudou por conta própria para obter os conhecimentos necessários

Ostrogradski entrou na Universidade de Kharkov em 1816 e, após um ano preparatório, começou a estudar física e matemática em 1817. Inicialmente, não tinha sido particularmente interessado em estudar na universidade e abordou seus estudos com considerável relutância. No entanto, Andrei Fedorovich Pavlovsky (1789-1875) foi um dos seus professores e ele notou a extraordinária capacidade do jovem e foi capaz de despertar nele um interesse pela ciência. Outro que influenciou Ostrogradski neste tempo era Timofei Fedorovic Osipovsky que era um professor de matemática eo reitor da universidade de Kharkov. Em 1820

Ostrogradski levou e passou os exames necessários para o seu grau, mas o ministro de assuntos religiosos e educação nacional se recusou a confirmar a decisão e exigiu-lhe para retomar os exames. O problema parece ter sido o seu professor de matemática Osipovsky, no ano de 1820, foi suspenso de seu cargo por motivos religiosos. Os oficiais que tomaram esta decisão fizeram o pupilo de Osipovsky sofrer demasiado. Vamos dar mais detalhes sobre este episódio. Em 1816 o Príncipe Aleksandr Nikolaevich Golitsyn (1773-1844) foi nomeado Ministro da Educação e Ministro de Assuntos Religiosos. Realizou uma cruzada religiosa contra "tendências ímpias e revolucionárias", exigindo que a ciência fosse ensinada a partir de princípios cristãos. Kharkov, como outras universidades, recebeu instruções sobre como ensinar de um ponto de vista cristão, demonstrando a onisciência de Deus. Em 1820, seguindo a orientação de Golitsyn, Osipovsky foi demitido pelo Curador da Universidade de Kharkov, Zakharii Iakovlevich Karneev (1747-1828), por causa de uma alegada falta de fervor ao dizer "Deus vive" durante um exame oral de um aluno de pós-graduação. Isto teve uma conseqüência bastante séria para Ostrogradski que tinha sido examinado por Osipovsky em 1820, porque, após a demissão de Osipovsky, o ministério da instrução recusou confirmar a concessão do doutorado de Ostrogradski. Eles exigiram que ele retomasse os exames (oficialmente com base em que ele não tinha assistido a palestras sobre filosofia e teologia), mas, sabendo que a verdadeira razão era que ele tinha sido examinado por Osipovsky, ele se recusou a retomar os exames e nunca recebeu a grau.

O principal centro matemático do mundo nessa época era Paris e Ostrogradski tomou a decisão corajosa de estudar lá, chegando em maio de 1822. Tinha sido uma decisão difícil, já que sua família não aprovava e tinha dificuldades financeiras. Para piorar as coisas, ele foi roubado na viagem. Entre 1822 e 1827, ele participou de palestras na École Polytechnique, na Sorbonne e no Collège de France, sobre matemática, física, mecânica e astronomia. Estes foram entregues por Louis Poinsot, por Pierre-Simon Laplace, por Joseph Fourier, por Adrien-Marie Legendre, por Siméon-Denis Poisson, por Jacques Binet e por Augustin-Louis Cauchy. Tornando-se amigável com estes matemáticos líderes, ele fez um rápido progresso e logo começou a publicar artigos na Academia de Ciências de Paris. A primeira delas é Memoir sobre a propagação de ondas em um vaso cilíndrico (1826). Seus trabalhos mostram a influência dos matemáticos em Paris e ele escreveu sobre física e cálculo integral. Por exemplo, ele apresentou seu trabalho Demonstration d'un théorème du calcul intégral à Academia de Ciências de Paris em 13 de fevereiro de 1826. Neste artigo Ostrogradski afirma e prova o teorema de divergência geral. Gauss, sem saber sobre o papel de Ostrogradski, provou casos especiais do teorema da divergência em 1833 e 1839 eo teorema é agora muitas vezes chamado de Gauss. Victor Katz apud Connor e Robertson (2017):

> Ostrogradski apresentou novamente esse teorema em um artigo em Paris, em 6 de agosto de 1827, e finalmente em São Petersburgo, em 5 de novembro de 1828. Essa última apresentação foi a única publicada por Ostrogradski, que apareceu em 1831 em Note sur la Théorie de la Chaleur 1831). As duas apresentações anteriores sobreviveram somente em forma de manuscrito, embora tenham sido publicados em tradução russa.
>
> (VICTOR KATZ, *apud* CONNOR e ROBERTSON, 2017)

De fato, muitos dos papéis de Ostrogradski que escreveu em Paris foram incorporados mais tarde em um trabalho principal na hidrodinâmica com ele publicou em Paris em 1832. Outros resultados que obteve neste tempo na teoria do resíduo apareceram em trabalhos de Cauchy. Seu tempo em Paris, no entanto, teve seus problemas. O pai de Ostrogradski, infeliz que seu filho estava gastando tanto tempo no exterior, parou de lhe enviar dinheiro. Ostrogradski, incapaz de pagar as contas por sua acomodação, acabou ficando mal endividado. Ele foi levado a tribunal por falta de pagamento, mas Cauchy, ouvindo as dificuldades de Ostrogradski, pagou todas as suas dívidas. Cauchy então conseguiu obter Ostrogradski uma posição ensinando no Collège Henri IV (hoje chamado Lycée Henri-IV) para que ele pudesse continuar vivendo em Paris. Kenneth May apud Connor e Robertson (2017) explica que o papel:

> ... descreve quatro manuscritos datados da residência de Ostrogradski em Paris (1822-1827) e descobertos por Yushkevich nos arquivos da Academia Francesa em 1963. Os dois primeiros manuscritos (1824) estão em integrais definidas e documentam o papel de Ostrogradski no desenvolvimento de Cauchy Método dos resíduos. ... o terceiro e o quarto manuscritos (1826 e 1827) foram traduzidos ... Elas incluem um caso especial do teorema de Green, um desenvolvimento geral (o primeiro tal, de acordo com Yushkevich) do método de separação de variáveis , Ea primeira solução do problema de difusão de calor em um prisma triangular.
>
> (KENNETH MAY, *apud* CONNOR e ROBERTSON, 2017)

Ostrogradski deixou a França e foi para São Petersburgo, chegando na primavera de 1828. Embora chegasse a São Petersburgo cheio de entusiasmo procurando criar um ambiente de pesquisa como tinha experimentado em Paris, no entanto, ele foi olhado com desconfiança e suspeita pelo local Policiais que o colocaram sob vigilância. No entanto, foi recebido com entusiasmo pelos matemáticos de São Petersburgo. Ele foi nomeado como professor na Academia Naval (na verdade, chamado Corpo Naval neste momento) em 1828. Mais tarde ganhou postos de professor adicionais, no Instituto de Meios de Comunicação, começando em 1830 e, dois anos depois, começou a ensinar em O Instituto Pedagógico Geral. Ele teve uma segunda visita a Paris em maio de 1830 estando na cidade no momento em que havia desordens de rua e barricadas foram erguidos. Esta foi a revolução de julho de 1830 e Ostrogradski danificou seriamente um de seus olhos no final de sua visita. Parece que isso não foi como resultado de quaisquer distúrbios, mas sim que ele foi descuidado com uma partida de fósforo. Ele ficou cego em seu olho direito. Casou-se com Maria em 1831; Eles tiveram três filhos, duas filhas e um filho. Ostrogradski gostava de brincar com seus filhos, pulando e correndo com eles de uma maneira infantil.

Em São Petersburgo, ele apresentou três importantes artigos sobre a teoria do calor, as integrais duplas e a teoria potencial à Academia de Ciências Imperial (São Petersburgo). Em grande parte pela força desses papéis ele foi eleito um acadêmico na seção de matemática aplicada da

Academia. Ele foi eleito acadêmico junior em dezembro de 1828, promovido a acadêmico associado em 1830, e finalmente se tornou um acadêmico completo em 1832. Ostrogradski apontou alto em sua pesquisa e seu objetivo era fornecer uma teoria combinada de hidrodinâmica, elasticidade, calor e eletricidade. Ele apresentou um relatório à Academia Imperial de Ciências, em 1830, que contém o seguinte objetivo notavelmente ambicioso:

> Os seguidores de Newton desenvolveram a grande lei da gravitação universal em detalhes e aplicaram a análise matemática a numerosos problemas importantes na física geral e na física das substâncias sem peso. A coleção de suas obras sobre o sistema do universo forma os folios imortais de "Mecânica Celestial", da qual os astrônomos levarão os elementos para suas mesas por um longo tempo. No entanto, as teorias físicas e matemáticas ainda não estão unificadas; Eles são distribuídos em numerosas coleções de memórias acadêmicas e são investigados por métodos diferentes, muitas vezes muito duvidosos e imperfeitos; Além disso, existem teorias desenvolvidas mas nunca apresentadas. Eu estabeleci como meu objetivo combinar estas teorias, apresentá-las usando um método uniforme, e indicar suas aplicações mais importantes. Já coletei os materiais necessários sobre o movimento e o equilíbrio dos corpos elásticos, a propagação das ondas na superfície dos líquidos incompressíveis e a propagação do calor dentro dos corpos sólidos e, em particular, no interior do globo. No entanto, estas teorias constituirão apenas uma parte necessária de todo o trabalho, que abrangerá também a distribuição de eletricidade e magnetismo em corpos capazes de serem eletrificados ou magnetizados por influência eletrodinâmica, movimento de fluidos elétricos, movimento e equilíbrio de líquidos, ação de capilaridade , Distribuição de calor em líquidos e teoria de probabilidade; Nesta última parte, vou me debruçar sobre várias questões em que o famoso autor de "Celestial Mechanics" estava aparentemente errado.
>
> (CONNOR e ROBERTSON, 2017)

Claro que isso era muito além do que poderia ser alcançado por qualquer homem, mas, ao visar um grande esquema, ele fez grandes desenvolvimentos em uma ampla gama de áreas. Ele submeteu Mémoire sur le Calcul des Variations des Integrales Multiples Ⓣ à Academia de Ciências de São Petersburgo em 24 de janeiro de 1834. Este é um trabalho importante na teoria de equações diferenciais parciais e foi reimpresso no Diário de Crelle em 1836 e uma tradução em Inglês foi feita Por Todhunter e publicado em 1861. Em 1840 escreveu em balística que introduz o tópico a Rússia. Seu importante trabalho sobre equações diferenciais ordinárias considerou métodos de solução de equações não-lineares que envolveram expansões de séries de potência em um parâmetro alfa. Liouville tinha produzido resultados semelhantes. Também alguns de seus resultados em calor foram semelhantes aos resultados produzidos por Lamé e por Duhamel. Ele deve ser considerado como o fundador da escola russa de mecânica teórica. Além de suas contribuições importantes para equações diferenciais parciais, ele fez avanços significativos para a teoria da elasticidade e álgebra publicação de mais de 80 relatórios e dar palestras. Seu trabalho sobre álgebra foi uma extensão do trabalho de Abel sobre funções algébricas e suas integrais.

A partir de 1847 foi inspetor-chefe para o ensino de ciências matemáticas em escolas militares. Escreveu muitos livros finos e estabeleceu as condições que permitiram a escola de Chebyshev florescer em São Petersburgo. No entanto, essa enorme contribuição tomou muito do seu tempo que ele poderia ter sido capaz de se dedicar a fazer maiores progressos na física matemática. Chebyshev escreveu o seguinte sobre Ostrogradski:

> Um homem, sem dúvida, de mente brilhante, não conseguiu nem metade do que poderia ter feito se não estivesse "atolado" com trabalhos pedagógicos permanentes e cansativos.
>
> (CHEBYSHEV)

Victor Katz apud Connor e Robertson (2017):

> Infelizmente, algumas das descobertas mais importantes de [Ostrogradski] parecem ter sido totalmente ignoradas, pelo menos na Europa Ocidental. Não só deu a primeira generalização do teorema da mudança de variável a n variáveis, como também provou e, mais tarde, generalizou o teorema da divergência, escreveu integrais de n-formas sobre "hipersuperfícies" n-dimensionais e ... Deu a primeira prova do teorema da mudança da variável para integrals dobro usando conceitos infinitesimal. Todos esses resultados foram eventualmente repetidos por outros matemáticos sem crédito para Ostrogradski.
>
> (VICTOR KATZ, *apud* CONNOR e ROBERTSON, 2017)

Ostrogradski era um homem alto e alto, com uma voz alta. Sua aparência era formidável, especialmente com a perda de seu olho direito, mas tinha um caráter alegre e uma mente excepcionalmente aguda. Apaixonadamente amou sua terra natal, seu povo e sua cultura. Ele amava a literatura clássica francesa e russa, embora sua língua de escolha quando em casa era sempre ucraniano. Ele adorava recitar os monólogos de Molière e Corneille, mas seu escritor favorito era Taras Hryhorovych Shevchenko, o poeta e escritor ucraniano. Ostrogradski conhecia muitas das obras de Shevchenko de cor e freqüentemente as recitava. Ostrogradski encontrou-se com Shevchenko em 1858 quando o poeta veio permanecer com ele.

Por fim, vamos mencionar o trabalho notável que Ostrogradski fez no final de sua vida. As circunstâncias são interessantes e foram descritas por Aleksei Nikolaevich Krylov Apud Connor e Robertson (2017):

> Em 1856, de acordo com o tratado de Paris, a Rússia foi privada do direito de ter uma frota no Mar Negro. Um grande número de trabalhadores de escritório teve que ser ateado fogo e, para melhorar suas circunstâncias, foi decidido estabelecer um fundo de aposentadoria no departamento naval, e começar pagar pensões em 1859. O seguro de vida era então uma novidade, e cálculos conectados com O trabalho dos fundos de aposentadoria, ou com a determinação do montante das pensões de

> acordo com as deduções pertinentes de salários eram conhecidos ainda menos. Por esta razão, ambos os matemáticos que eram membros da Academia de Ciências de São Petersburgo, Ostrogradski e Bunyakovsky, foram incluídos no comitê encarregado de elaborar uma carta do fundo. Eles realmente fizeram todos os cálculos necessários e forneceram sua justificativa teórica. As transações da comissão foram publicadas sem demora; Eles contêm uma nota notável por Ostrogradski ...
>
> (ALEKSEI NIKOLAEVICH KRYLOV *apud* CONNOR e ROBERTSON 2017)

Observamos que o Tratado de Paris de 1856 terminou a guerra da Criméia que a Rússia travou contra a Turquia apoiada pela Grã-Bretanha e pela França. Era uma guerra famosa pela incompetência de ambos os lados. Deve ter doído Ostrogradski muito para ver a Rússia ea França em lados opostos.

Sempre um ucraniano de coração, Ostrogradski especificou em sua vontade que ele deveria ser enterrado em sua aldeia natal de Pashennaya. No verão de 1861, quando ele estava tomando banho, notou-se que ele tinha um abscesso nas costas. Ele foi operado e o abscesso foi removido, mas sua saúde rapidamente se deteriorou e ele morreu em janeiro do ano seguinte. Observamos que algumas fontes dão sua data de morte como 1861, em vez de 1862, uma vez que a data do calendário estilo antigo era 20 de dezembro de 1861. Seus desejos foram realizados e ele foi enterrado no cofre da família em Pashennaya.

Lobachevsky: personagem em destaque

Nicolai Ivannovitch Lobachevsky (1793 – 1856), é natural da cidade de Gorki na Rússia. Segundo Matos e Neves (2010, p. 82), ele era um dos três irmãos de uma família muito pobre.

Ainda segundo os autores supracitados, em 1800 aos sete anos de idade, seu pai faleceu e sua mãe resolveu se mudar para a cidade de

Kazan, nas proximidades da fronteira com a Sibéria. Foi a partir daí que ele começou seus estudos, financiado sempre por bolsas escolares.

Segundo Eves (2004, p. 542), "Lobachevsky passou a maior parte de sua vida na Universidade de Kazan, primeiro como aluno, depois como professor de matemática e finalmente como reitor."

Roberto Bonola (1954, p.84) em seu livro *Non-Euclidean Geometry,* afirma que

> He took his degree in 1813 and remained in the University, first as Assistant, and then as Professor. In the later position he lectured upon mathematics in all its branches and also upon physics and astronomy.[13]
> (BONOLA, 1954, p.84)

Como podemos perceber, Lobachevsky começou seus estudos tardiamente, entretanto aos vinte anos de idade recebeu seu diploma, equivalente à graduação de hoje, da Universidade de Kazan. Logo depois passou a lecionar matemática, física e astronomia nessa mesma instituição.

Sua vida acadêmica sempre esteve vinculada à Universidade de Kazan, aonde veio ocupar o cargo de reitor de 1827 até 1846. Além dos trabalhos envolvendo as geometrias não-euclidianas, Lobachevsky também desenvolveu trabalhos em álgebra, mas precisamente nas aproximações numéricas às raízes das equações algébricas. Ele faleceu na cidade de Kazan, Rússia, em 1856.

A seguir, iremos retomar o tema proposto para explicar e esclarecer alguns pontos importantes para o melhor entendimento do mesmo. Além disso, iremos traçar o caminho, por nós escolhido, para explicar como se deu a evolução do tema e quais foram os personagens que, de certa forma, contribuíram para tal desenvolvimento.

[13] Ele pegou seu diploma em 1813 e permaneceu na universidade, primeiramente como assistente, e então como professor. Na última posição ele lecionou sobre matemática em todos os seus ramos e também sobre física e astronomia. (Tradução livre)

A evolução dos conteúdos temáticos

Para tratarmos das geometrias não-euclidianas precisamos primeiramente nos reportar à geometria euclidiana, organizada pelo matemático e filósofo grego Euclides por volta do ano 300 a.C. Para Eves (2004, p.167) pouco sabemos da vida e da personalidade de Euclides. Mas, ainda segundo o autor, tudo indica que foi ele o fundador da famosa escola de matemática de Alexandria, da qual foi professor.

Segundo Eves (2004, p.167), Euclides desenvolveu diversos trabalhos, pelo menos dez, entretanto o que lhe trouxe notoriedade foi a obra intitulada "*Os elementos*". Para o mesmo autor,

> Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico. Mais de mil edições impressas dos *Elementos* já apareceram desde a primeira delas em 1482; por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria.
>
> (EVES, 2004, p.167-168)

Na sua estrutura, *Os elementos* de Euclides estão organizados em treze livros os quais tratam de diferentes objetos matemáticos. Os livros I ao VI, trazem a Geometria no seu escopo.

A forma como Euclides organizou a Geometria Plana nos seus livros, está baseada no método axiomático ou postulacional. Este método consiste em aceitar como verdadeiras algumas afirmações, *axiomas ou postulados,* previamente estabelecidos e, a partir desses, demonstrar outras proposições de forma dedutiva.

Segundo Howard Eves,

> Certamente um dos grandes feitos dos matemáticos gregos antigos foi a criação da forma postulacional de raciocínio. A fim de se estabelecer uma afirmação num sistema dedutivo, deve-se mostrar que essa afirmação é uma consequência lógica necessária de algumas afirmações previamente estabelecidas. Estas, por sua

> vez, devem ser estabelecidas a partir de outras também estabelecidas previamente e assim por diante.
>
> (EVES, 2004, p.179)

Segundo Eves (2004, 179), grande parte dos matemáticos gregos antigos diferenciavam "postulado" e "axioma". Há evidências de pelo menos três distinções defendidas por diferentes grupos, como segue:

> 1. Um axioma é uma afirmação assumida como auto-evidente e um postulado é uma construção de algo assumida como auto-evidente; assim, os axiomas e os postulados estão entre si, em grande parte, como os teoremas e os problemas de construção.
> 2. Um axioma é uma suposição comum a todas as ciências ao passo que um postulado é uma suposição peculiar a uma ciência particular em estudo.
> 3. Um axioma é uma suposição de algo que é, ao mesmo tempo, óbvio e aceitável para o aprendiz; um postulado é uma suposição de algo que não é nem necessariamente óbvio nem necessariamente aceitável pelo aprendiz.
>
> (EVES, 2004, p.179)

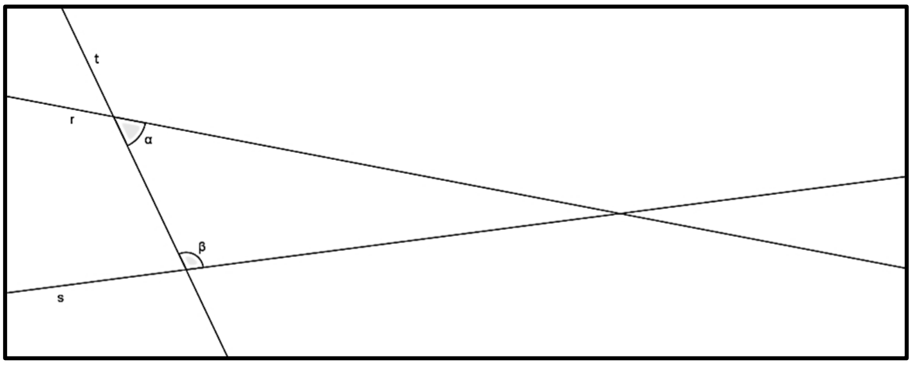
Para o mesmo autor supracitado, há evidências de que Euclides tenha optado pela segunda distinção anterior. Possivelmente ele tenha assumido os equivalentes as dez afirmações seguintes, sendo cinco "axiomas" ou noções comuns e cinco "postulados" geométricos:

> *A1*: Coisas iguais à mesma coisa são iguais entre si.
> *A2*: Adicionando-se iguais a iguais, as somas são iguais.
> *A3*: Subtraindo-se iguais de iguais, as diferenças são iguais.
> *A4*: Coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si.
> *A5*: O todo é maior do que a parte.
> *P1*: É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.
> *P2*: É possível prolongar uma reta finita indefinidamente em linha reta.

> *P3*: É possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
> *P4*: Todos os ângulos retos são iguais entre si.
> *P5*: Se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos.
> (EVES, 2004, p.179-180)

Esses *axiomas* e *postulados* pretendiam deduzir todas as 465 proposições de *Os elementos.* Como podemos observar, o quinto postulado diferencia-se dos demais, seja pela sua extensão ou por não ser tão auto-evidente. A figura a seguir, ilustra o quinto postulado de Euclides. Segundo o postulado se $\alpha + \beta < 180^o$, então as retas *r* e *s* irão se encontrar.

Figura 2: **Quinto postulado de Euclides**



Fonte: Ribeiro (2012)

Segundo Eves (2004, p. 539):

> [...] para os gregos antigos parecia mais uma proposição do que um postulado. Ademais, Euclides não fez nenhum uso desse postulado até alcançar a Proposição I 29. Assim, era natural ter a curiosidade de saber se esse postulado era realmente necessário e cogitar que talvez ele pudesse ser reduzido, como teorema, dos outros nove "axiomas" e "postulados" ou, pelo menos, ser substituído por um equivalente mais aceitável.
> (EVES, 2004, p.539)

Dentre os vários substitutivos encontrados para o quinto postulado de Euclides, o mais conhecido e usado nos tempos modernos foi atribuído ao matemático e físico escocês John Playfair (1748-1819). De acordo com Eves (2004, p. 539), "é o substituto mais comum nos atuais textos elementares de geometria: *Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta."*

Várias foram as tentativas de demonstração do postulado das paralelas de Euclides a partir dos nove "axiomas" e "postulados". Por mais de dois mil anos, diferentes geômetras se ocuparam nessa tarefa. Segundo Eves (2004, p. 539), esse fato contribuiu significativamente para o desenvolvimento da matemática moderna.

O estudo do postulado das paralelas, como ficou conhecido o quinto postulado de Euclides, abriu portas para o surgimento de outras geometrias, as denominadas de geometrias não-euclidianas.

Neste trabalho, apresentamos uma proposta de evolução das geometrias não-euclidianas a partir de alguns personagens que contribuíram de alguma forma para o tema. Os personagens escolhidos neste trabalho para tratarmos do processo evolutivo das geometrias não-euclidianas, foram: Girolamo Saccheri (1667-1733), Johann Heinrich Lambert (1728-1777); Adrien-Marie Legendre (1752-1833); Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856); Janos Bolyai (1802-1860) e Bernhard Riemann (1826-1866).

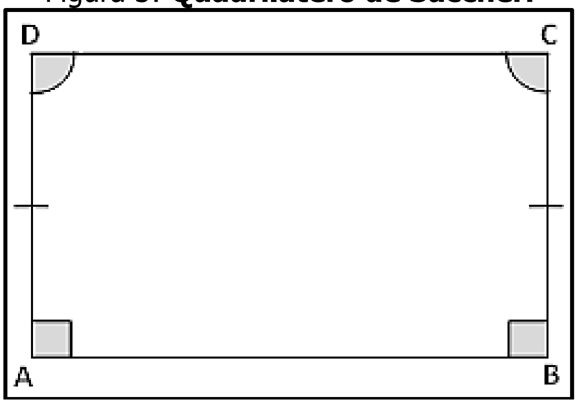
Girolamo Saccheri

Segundo Eves (2004, p. 540), Saccheri nasceu em São Remo, Itália. Aos vinte e três anos concluiu seu noviciado na Ordem Jesuíta e passou o resto de sua vida ocupando cargos de professor universitário. Ele leu a obra *Os Elementos* de Euclides quando ensinava retórica, filosofia e teologia no Colégio Jesuíta de Milão. Saccheri ficou encantado com o método utilizado por Euclides de *reductio ad absurdum* (redução ao absurdo) ao tratamento da lógica formal.

Ainda de acordo com Eves, Saccheri publicou em Turin, quando ensinava filosofia, a obra intitulada *Lógica demonstrativa*. Nessa obra, Saccheri passou a aplicar o poderoso método de redução ao absurdo ao tratamento da lógica formal. Alguns anos depois, ele resolveu aplicar esse método ao estudo do postulado das paralelas de Euclides. Foi então que escreveu um livro intitulado *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides Livre de Toda Imperfeição) que foi publicado em Milão no ano de 1733, alguns meses depois do seu falecimento.

Nesse trabalho sobre o quinto postulado de Euclides, Saccheri construiu um quadrilátero com dois lados opostos congruentes e perpendiculares a mesma base, como mostra a figura a seguir.

Figura 3: **Quadrilátero de Saccheri**

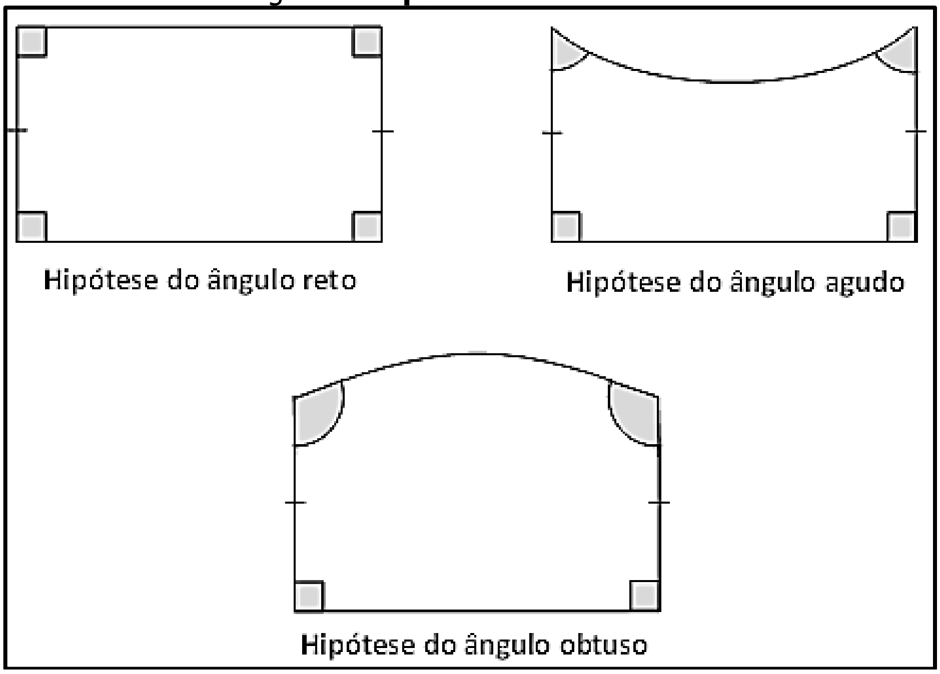


Fonte: Ribeiro (2012)

Esse quadrilátero ficou conhecido como quadrilátero de Saccheri. Traçando as diagonais *AC* e *BD,* Ele mostrou que os ângulos *C* e *D* são congruentes, apoiando-se em algumas proposições de congruências, que estão entre as vinte oito proposições iniciais de Euclides.

De posse dessa conclusão, Saccheri verificou que havia três possibilidades de medidas para os ângulos *C* e *D*: agudos, retos ou obtusos. De acordo com Eves (2004, p.540), essas hipóteses ficaram conhecidas como: *hipótese do ângulo agudo, hipótese do ângulo reto* e *hipótese do ângulo obtuso*. O trabalho de Saccheri consistiu em mostrar que a suposição da hipótese do ângulo agudo e a do ângulo obtuso levavam a uma contradição e, por redução ao absurdo, validava-se a hipótese do ângulo reto, o que mostrou implicar no postulado das paralelas.

Figura 4: **Hipóteses de Saccheri**



Fonte: Ribeiro (2012)

De acordo com Eves (2004), Saccheri eliminou logo a hipótese do ângulo obtuso ao assumir tacitamente a infinitude da reta. Porém, na hipótese do ângulo agudo tornou-se complexo. Eves (2004) diz que:

> Após obter muitos dos teoremas agora clássicos da chamada geometria não-euclidiana, Saccheri, de maneira insatisfatória e inconvincente, forçou uma contradição no desenvolvimento de suas ideias através de noções nebulosas sobre elementos infinitos. Não tivesse ele se mostrado tão ávido de exibir uma contradição e, em vez

> disso, tivesse assumido sua incapacidade de alcançá-la e, sem dúvida, os méritos da descoberta da geometria não-euclidiana caberiam a ele.
>
> (EVES, 2004, p.540)

Ribeiro (2012, p.46), reforça esse fato ao dizer que:

> Mesmo tendo demonstrado muitos teoremas da geometria hiperbólica, Saccheri é reconhecido apenas como precursor das geometrias não-euclidianas, já que não admitiu que tais fatos poderiam ser considerados em outro tipo de geometria, além de não substituir efetivamente o quinto postulado de Euclides por outro. Mas, sem dúvidas, pode-se colocá-lo em um patamar diferenciado dentre os precursores por ser o primeiro a explorar com tanta profundidade as três hipóteses.
>
> (RIBEIRO, 2012, p.46)

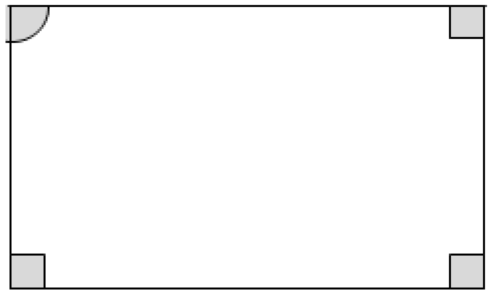
O trabalho de Saccheri não recebeu o devido reconhecimento por seus contemporâneos e ficou por muitos anos esquecido.

Johann Heinrich Lambert

Três décadas depois da publicação da obra de Saccheri, o matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777), fez uma investigação semelhante intitulada *Die Theorie der Parallellinien*, publicada somente após sua morte. (EVES, 2004, p.541)

A partir de um quadrilátero, mas não o quadrilátero de Saccheri, contendo três ângulos retos ele levantou três hipóteses conforme o quarto ângulo fosse agudo, reto ou obtuso.

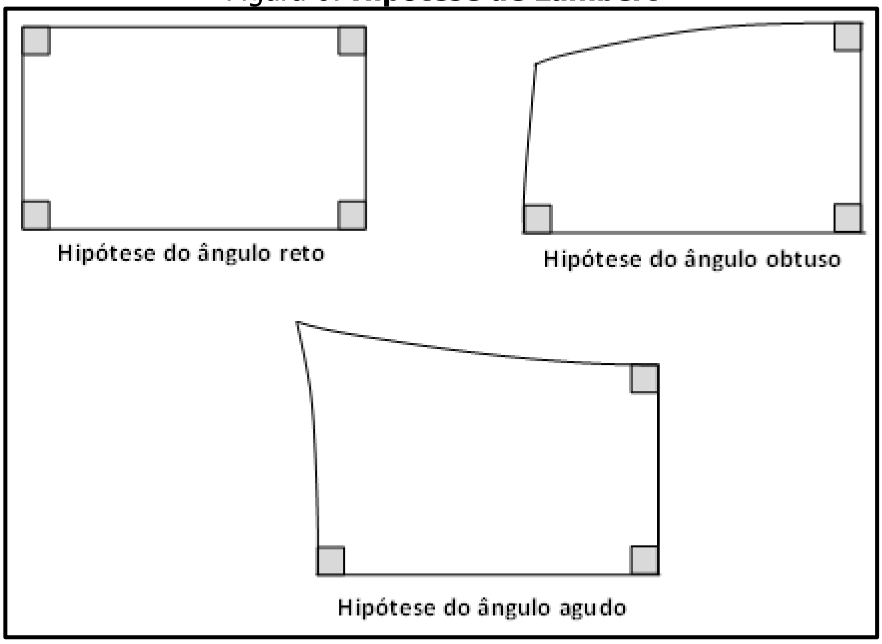
Figura 5: **Quadrilátero de Lambert**



Fonte: Ribeiro (2012)

Hipóteses levantadas por Lambert conforme o quarto ângulo:

Figura 6: **Hipótese de Lambert**



Fonte: Ribeiro (2012)

Segundo Eves (2004, p. 541), Lambert, assim como Saccheri, mostrou que de acordo com as três hipóteses levantadas, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que (hipótese do ângulo agudo), igual a (hipótese do ângulo reto) ou maior que (hipótese do ângulo obtuso) dois ângulos retos, ou seja, 180º.

Lambert eliminou a hipótese do ângulo obtuso pela mesma suposição (infinitude da reta) de Saccheri. Porém, suas conclusões a respeito da hipótese do ângulo agudo, de acordo com Eves (2004, p.541), foram imprecisas e insatisfatórias.

Para Ribeiro (2012, p.48), uma importante contribuição de Lambert para pesquisas futuras das geometrias não-euclidianas, foi a relação estabelecida por ele entre a hipótese do ângulo obtuso com a esfera.

> Lambert percebeu que não seria capaz de encontrar contradição nesta hipótese caso considerasse o círculo máximo de uma esfera como reta (ROSENFELD, 1988, p.100) e chega até mesmo considerar o triângulo esférico como um triângulo que possui propriedades tais como as impostas pela hipótese do ângulo obtuso, já que o defeito deste triângulo é proporcional a sua área.
> (RIBEIRO, 2012, p.48)

Além disso, Lambert "conjecturou que a geometria decorrente da hipótese do ângulo agudo poderia talvez se verificar numa esfera de raio imaginário" (EVES, 2004, p.541), ou seja, antecipou a existência da figura que hoje denominamos de pseudoesfera.

Adrien-Marie Legendre

Adrien-Marie Legendre (1752-1833), matemático francês contribuiu significativamente para a popularização do problema do quinto postulado. Seus esforços foram publicados em várias edições de seus *Éléments de Géométrie*, obra amplamente adotada. (EVES, 2004, p.541)

Segundo Eves (2004, p.541), Legendre começou seu trabalho considerando as hipóteses de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser menor que, igual a ou maior que 180º (dois ângulos retos). Eliminou a terceira hipótese, pela mesma suposição de Saccheri (infinitude da reta). Entretanto, não foi capaz de eliminar a primeira hipótese.

Segundo Eves (2004),

> Não é de se surpreender que não se tenha encontrado nenhuma contradição sob a hipótese do ângulo agudo, pois hoje se sabe que a geometria desenvolvida a partir de uma coleção de axiomas compreendendo um conjunto básico acrescido da hipótese do ângulo agudo é tão consistente quanto a geometria euclidiana desenvolvida a partir do mesmo conjunto básico acrescido da hipótese do ângulo reto, isto é, o postulado das paralelas é independente dos demais postulados e devido a isso não pode ser deduzido dos demais.
>
> (EVES, 2004, p.541)

Para esse autor, os primeiros a suspeitarem desse fato foram: o alemão Gauss, o húngaro Bolyai e o russo Lobachevsky. Todos trabalharam com esse problema considerando o postulado das paralelas de acordo com Playfair, conforme as seguintes possibilidades: "por um ponto dado pode-se traçar mais do que uma, exatamente uma ou nenhuma paralela a uma reta dada." (p.541-542)

De acordo com Eves, provavelmente Gauss tenha sido o primeiro a alcançar resultados contundentes relativos à hipótese do ângulo agudo, porém nunca publicou algo referente a esse assunto. Desta forma, atribui-se a Bolyai e Lobachevsky a descoberta desse tipo de geometria não-euclidiana.

Janos Bolyai

Janos Bolyai (1802-1860) nasceu na Hungria, foi oficial do exército austríaco. Seu pai, Farkas Bolyai, era professor de matemática e amigo de Gauss. Não restam dúvidas de que Bolyai recebeu incentivos de seu pai para estudar o postulado das paralelas, pois em tempos anteriores havia se interessado pelo problema. (EVES, 2004, p.542)

De acordo com Eves, por volta do ano 1823 Janos Bolyai percebeu a dimensão da natureza do problema que tentava resolver. Mas, se mostrou motivado com o seu trabalho, o que fez questão de compartilhar com seu pai através de uma carta escrita ao mesmo naquele ano. Nessa carta, comunicou-o que tinha interesse em publicar seus estudos sobre a teoria das paralelas, mas precisaria de um tempo para organizar seu material. Bolyai exclamou dizendo: "Do nada eu criei um universo novo e estranho."

Seu pai insistiu para que o trabalho fosse publicado como um apêndice de um trabalho, em dois volumes, de matemática elementar desenvolvido por ele. Mas, somente em 1829, Bolyai submeteu seus manuscritos ao seu pai e, em 1832, o trabalho foi publicado como um apêndice de vinte e seis páginas do volume 1 da obra do seu pai.

Ribeiro ratifica esse fato em seu trabalho de pesquisa ao afirmar que Em 1832, Bolyai finalmente publicou seu trabalho intitulado de *Ciência Absoluta do Espaço* como apêndice de um livro de seu pai, intitulado *Tentamen.* (RIBEIRO, 2012, p.54)

Bolyai mostrou que existia uma coleção de proposições que independiam do postulado das paralelas e que, portanto, tinham validade tanto na geometria euclidiana quanto na não-euclidianas.

Segundo Bonola (1912) *apud* Ribeiro (2012, p.54), os principais resultados do trabalho de Bolyai foram:

> - A própria definição de retas paralelas e suas consequências imediatas;
> - o círculo e a esfera com raios infinitos;
> - a trigonometria esférica é independente do quinto postulado;
> - a utilização da trigonometria para o cálculo de áreas e volumes na geometria hiperbólica;
> - a impossibilidade da quadratura do círculo na geometria euclidiana.
>
> (RIBEIRO, 2012, p.54)

Como podemos perceber, Bolyai obteve resultados significativos para o avanço do entendimento da existência de outras geometrias diferentes da euclidiana. A lentidão no processo de publicação do trabalho de Bolyai fez com que o mérito da descoberta da existência de outras geometrias ficasse com Lobachevsky, pois publicou seus trabalhos antes, como veremos a seguir.

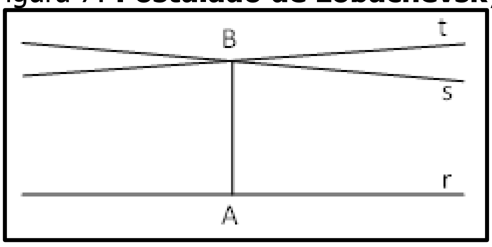
Nicolai Ivanovitch Lobachevsky

Segundo Halsted (1914) *apud* Ribeiro (2012, p.49), Lobachevsky, foi o primeiro a publicar um trabalho de substituía o postulado das paralelas por outro que supunha sua negação e que, não tinha a intenção de mostrar uma inconsistência para então demonstrar o quinto postulado, em 1829.

De acordo com Greenberg (1994) *apud* Ribeiro (2012, p.50), primeiramente Lobachevsky denominou a nova geometria de imaginária e, posteriormente de *pangeometria.* Por ter sido publicada inicialmente em russo, sua obra ficou desconhecida do restante do mundo acadêmico por um longo período. Somente em 1840 esse quadro começou a ser revertido, pois ele publicou um tratado em alemão intitulado *Geometrische Untersuchungen Zur Theorie der Parallellinien* (Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas).

De acordo com Bonola (1912) *apud* Ribeiro (2012, p.50), Lobachevsky considerou o seguinte postulado: por um ponto fora de uma reta dada, passam mais de uma reta que não intersectam a primeira.

Figura 7: **Postulado de Lobachevsky**



Fonte: Ribeiro (2012)

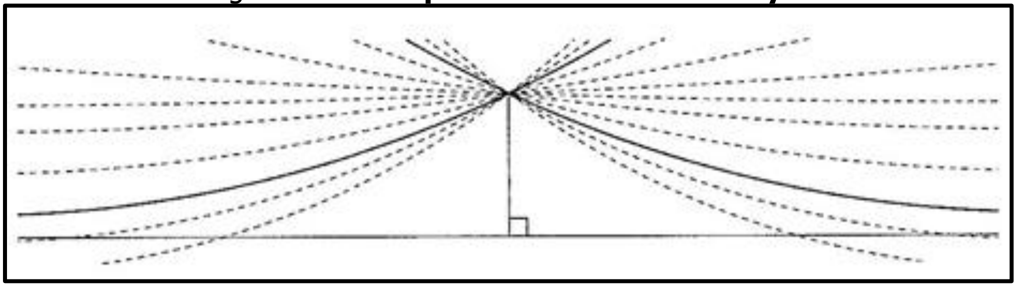
Assim, de acordo com esse postulado, o matemático russo define retas não-secantes e retas paralelas. As não-secantes seriam todas as retas que não intersectam a reta **r** e, reta paralela como a primeira que não a intersecta. (LOBACHEVSKY, 1914, p.13 *apud* RIBEIRO, 2012, p.50)

De acordo com Ribeiro (2012), Lobachevsky definiu da seguinte maneira uma reta paralela:

> Given a line and a point in a plane, I call parallel to the given line drawn from the given point a line passing through the given point and which is the limit between the lines that are drawn in the same plane, that pass through the same point and that, when extended from one side of the perpendicular dropped from that point on the given line, and those that do not cut it.[14]
> (LOBACHEVSKY, 2010, *apud* RIBEIRO, 2012, p. 50)

A Figura 8 representa as retas não-secantes e as concorrentes à reta dada.

Figura 8: **Retas paralelas – Lobachevsky**

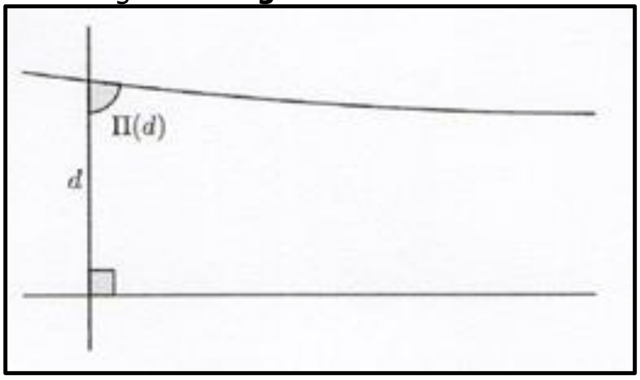


Fonte: Ribeiro (2012)

Segundo Ribeiro (2012), um outro conceito de suma importância utilizado por Lobachevsky em suas análises é o ângulo de paralelismo. Isso nada mais é do que o ângulo formado entre a reta paralela por um ponto à reta dada e a perpendicular a reta dada também traçada por esse ponto. A Figura 9 ilustra melhor essa situação.

[14] Dados uma reta e um ponto no plano, chamo de paralela à reta dada pelo ponto dado uma reta que passa por tal ponto e que seja o limite das retas coplanares que tenham este ponto em comum e que, quando prolongadas a um dos lados da perpendicular que liga o ponto à reta dada, intersectam esta reta e aquelas que não a intersectam. (Tradução, RIBEIRO, 2012)

Figura 9: **Ângulo de Paralelismo**



Fonte: Ribeiro (2012)

Segundo Ribeiro (2012), o ângulo de paralelismo depende da distância *d* do ponto à reta dada. O fato é que quanto maior for a distância *d* menor será o ângulo de paralelismo e, tenderá a 90º quanto mais próximo estiver da reta dada.

Segundo Bonola (1912) *apud* Ribeiro (2012), as principais propriedades as principais propriedades deduzidas por Lobachevsky foram:

> - Se uma reta *s* é paralela a *r* no ponto *P*, então *s* será paralela a *r* em qualquer ponto de *s* na mesma direção;
> - Se *s* é paralela a *r*, então *r* é paralela a *s*;
> - Se *r* é paralela a *r* e *s* é paralela a *t*, então *r* é paralela a *t*;
> - Se *r* é paralela a *s*, então *r* é assintótica a *s*.
>
> (BONOLA, 1912, p.87-88, *apud* RIBEIRO, 2012, p.51)

Além disso, segundo Ribeiro, Lobachevsky apresentou o teorema cuja a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180º e, também, deduções em trigonometria que, de acordo com Bonola (1912), corresponde a uma das partes mais importantes de seu trabalho.

Bernhard Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), nasceu em Hanover na Alemanha e faleceu em Selasca, cidade italiana. Um de seus principais professores foi Gauss. Era de uma família modesta, porém teve boas instruções. Primeiramente em Berlim e mais tarde em Gottingen, onde se tornou Doutor. (MATOS e NEVES, 2010, p.95)

Segundo Ribeiro (2012, p.55), Riemann "surpreendeu a todos com sua teoria que apresentava ao mundo uma ideia muito mais ampla de geometria". Agora, Riemann deu um sentido a hipótese do ângulo obtuso, aproveitando as suposições de Lambert e de Bolyai.

Riemann percebeu que Euclides assumiu sem prova, ou seja, tacitamente, que a reta era ilimitada. Entretanto, ele mostrou que seria possível supor que uma reta pode ser infinita, mas limitada.

Neste sentido, Eves (2004) ratifica esse fato ao dizer que:

> Em 1854, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) mostrou que, descartando-se a infinitude da reta, e admitindo-se simplesmente que a reta seja ilimitada, então, com alguns outros ajustamentos pequenos nos demais postulados, pode-se desenvolver uma outra geometria não-euclidiana consistente a partir da hipótese do ângulo obtuso.
>
> (EVES, 2004, p.544)

Riemann assumiu no lugar do quinto postulado de Euclides o seguinte postulado: "Dada uma reta r e um ponto P que não pertence a r, não existe nenhuma reta paralela a r que passe por P." (RIBEIRO, 2012, p.55)

Segundo Eves (2004, p.544), em 1871 Klein denominou as três geometrias, a de Bolyai e Lobachevsky, a de Euclides e a de Riemann; de geometria hiperbólica, geometria parabólica e geometria elíptica, respectivamente.

O Quadro 1 seguinte sintetiza as principais características de cada geometria para uma melhor compreensão das mesmas.

Quadro 1: **Características de algumas geometrias**

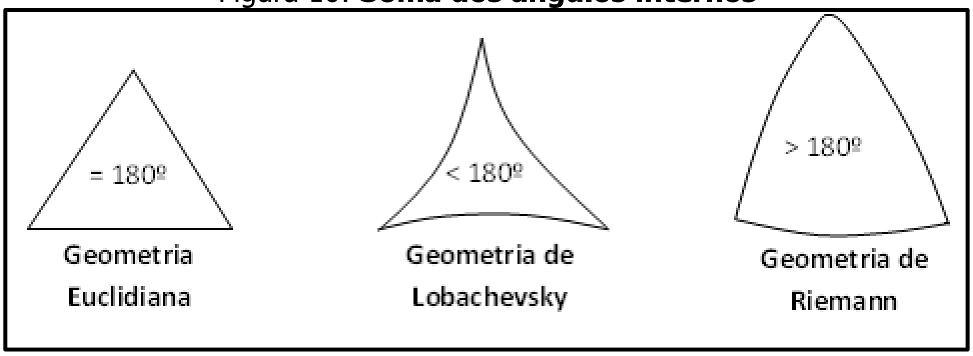
	Geometria Parabólica	**Geometria Hiperbólica**	**Geometria Elíptica**
Dois pontos determinam	Uma reta	Uma reta	Uma ou mais retas
Toda reta é	Infinita	Infinita	Finita
Um ponto e uma distância determinam	Um círculo	Um círculo	Um círculo
Todos os ângulos retos são	Iguais	Iguais	Iguais
Um ponto fora de uma reta determina	Somente uma reta paralela	Mais de uma reta paralela	Nenhuma reta paralela
A hipótese de Saccheri válida é	Ângulo reto	Ângulo agudo	Ângulo obtuso
Duas retas distintas e perpendiculares a uma mesma reta	São paralelas	São paralelas	Interceptam-se
Linhas paralelas	São equidistantes	Nunca são equidistantes	Não existem
Uma linha	É separada em duas partes por um ponto	É separada em duas partes por um ponto	Não é separada em duas partes por um ponto
Dois triângulos que têm ângulos correspondentes congruentes são	Semelhantes	Congruentes	Congruentes
A soma dos ângulos internos de um triângulo é	Igual a 180º	Menor que 180º	Maior que 180º

Fonte: Adaptado de Sá (1997, *apud* Matos e Neves, 2010, p. 98-99)

Duas situações chamam nossa atenção na tabela anterior. A primeira delas diz respeito a questão de que apenas na geometria euclidiana podemos ter dois triângulos semelhantes mas não congruentes, fato que não ocorre nas outras duas geometrias, pois para que os triângulos sejam semelhantes necessariamente eles têm que ser congruentes.

A outra situação refere-se à questão da soma dos ângulos internos de um triângulo. É muito comum o professor de matemática na educação básica se valer do discurso, apoiado inclusive em livros didáticos, de que "a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180º." E como vimos, isso só é válido na geometria plana euclidiana. A Figura 9 a seguir ilustra melhor esse fato.

Figura 10: **Soma dos ângulos internos**



Fonte: A matemática através dos tempos

A seguir mostraremos algumas aplicações do tema abordado e também contribuições em outras áreas do conhecimento.

Outros olhares, análises e interpretações temáticos

A prova de que o quinto postulado de Euclides era independente dos demais, pôs fim a um problema de mais de dois mil anos, culminando na criação de novas geometrias (não-euclidianas).

A possibilidade de ampliação para novas geometrias consistentes, fez com que o homem interpretasse o mundo a sua volta de outras formas. Não queremos com isso dizer que uma geometria é melhor do que a outra. Mas, dependendo do que se esteja trabalhando, os resultados serão mais satisfatórios e eficientes de acordo com o tipo de geometria utilizada para a realização do trabalho.

> Se você for um consultor, um agrimensor ou um carpinteiro do tipo "faça você mesmo", então a geometria euclidiana é a mais simples de usar; funciona para tudo isso. Se você for um astrônomo estudando galáxias distantes, poderia preferir a geometria riemanniana; ela é mais eficiente que a euclidiana para tais coisas. Se você for um físico teórico, a geometria de Lobachevsky poderia ser melhor para você que qualquer uma das outras.
>
> (BERLINGHOFF e GOUVÊA, 2010, p. 202)

A descoberta de novas geometrias, representou um avanço significativo para a matemática. O paradigma de que a geometria euclidiana era uma verdade absoluta foi quebrado. Eves (2004, p.544), refere-se a esse fato como sendo "A libertação da geometria".

Para Kaleff (2010), as novas geometrias possibilitaram aos cientistas buscar novas explicações ao mundo físico que nos cerca, por meio de ferramentas teóricas ligadas à Teoria da Relatividade. Segunda esta autora, "os antigos conceitos geométricos não descreviam tão bem as formas fragmentadas e irregulares, como aquelas normalmente encontradas na natureza."

A autora cita Penrose (1996), dizendo que:

> Foi a partir da descoberta das novas teorias geométricas que os meios científicos buscaram entender a geometria do universo e suas medidas, tentando decifrar os enigmas das formas microscópicas às macroscópicas, para entender melhor as leis que regem o Universo e o Cosmo, a aleatoriedade e o Caos.
>
> (KALEFF, 2010, p.3)

Hoje sabe-se que o estudo das novas geometrias "permitem o estabelecimento de logísticas na engenharia de transportes, tanto em situações relacionadas ao controle do curso de aviões como no estabelecimento de linhas de metrôs, ruas e avenidas nos grandes centros urbanos." (KALEFF, 2010, p.4)

Considerações Finais

Nas últimas décadas observamos um crescimento das pesquisas relacionadas a História das Ciências e em especial a História da Matemática. Mendes e Chaquiam (2016, p. 77) destacam que esse desenvolvimento se constitui em um valioso elemento para a melhoria do ensino e aprendizagem da Matemática nas diferentes áreas e níveis, permitindo compreender as origens das ideias que deram forma a nossa cultura, assim como, observar os diversos aspectos do seu desenvolvimento, e perceber que as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes, resultaram de desafios enfrentados com grandes esforços e, em grande parte, numa ordem diferente daquela apresentada após todo o processo de formalização.

Neste sentido, a utilização da História da Matemática em sala de aula através do diagrama metodológico elaborado por Chaquiam (2016, p 94) se constitui em uma possibilidade para o estudo de Geometria.

A metodologia proposta oferece ao aluno visitar ou revisitar os cenários sociocultural, pluridisciplinar e técnico-científico do período recortado relacionado ao ensino da Geometria e ao personagem destacado, Lobachevsky.

No contexto sociocultural, destacamos a história da humanidade em que viveu Lobachevsky. Os personagens contemporâneos à Lobachevsky estão inseridos no contexto pluridisciplinar. Já os personagens que contribuíram para a evolução da Geometria fazem parte do contexto técnico-científico. As maiores dificuldades que encontramos foi a escassez de literatura nacional sobre alguns componentes do diagrama, sobretudo na obtenção de informações atuais sobre pontos de vista sobre

Lobachevsky e biografia de seus contemporâneos, o que nos impulsionou para alguns sites da internet.

Sugerimos que o professor utilize esta metodologia a partir da construção do diagrama seguindo a ordem de prioridades citada no artigo e em seguida, disponibilize o material escrito como suporte teórico para ensino e aprendizagem de Geometria.

Nosso objetivo foi de contribuir, com aporte matemático e histórico, à formação profissional de professores de diversas áreas no estudo das Geometrias, em especial a não Euclidiana, pois sabemos que seu campo de aplicação não se restringe a Matemática como também a astronomia e navegação por exemplo.

Neste passeio pelas Geometrias, desde Euclides até Riemann, fizemos algumas escolhas vistas durante o artigo que não tornam menos importantes outros matemáticos, personagens contemporâneos ao principal e acontecimentos históricos. Não temos também a pretensão de ter esgotado o assunto.

Logo, sugerimos a construção de outros diagramas metodológicos deste mesmo tema, Geometrias, que envolvam outros personagens e contexto mundial para que tenhamos a perspectiva de aprofundamento deste trabalho o qual acreditamos que não se esgota aqui.

Bibliografia consultada e mencionada

ALMEIDA, Manoel de Campos. **O Nascimento da Matemática: a neurofisiologia e a pré-história da matemática.** 1ª ed. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

AMARAL, Daniel A. **"Carl Friedrich Gauss": Faculdade de Engenharia Mecânica.** Disponível em: http://www.fem.unicamp.br/-em313/paginas/person/gauss.htm. Acesso em 11 de abril de 2017.

BERLINGHOFF, Willian P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A Matemática através dos Tempos: um guia fácil para professores e entusiastas**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.
BONOLA, Roberto. **Non-Euclidean Geometry.** Editora: Dover Science, 1954.

CHAQUIAM, M. Um diagrama, um texto. In: MENDES, I. A.; CHAQUIAM, Ml. **História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores.** Belém: SBHMat, 2016.

CHAQUIAM, Miguel. **História da Matemática nas aulas de Matemática: uma proposta para professores.** Anais do XII Seminário Nacional de História da Matemática. Itajubá (MG): SBHMat, 2017.

CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **"Johann Christian Martin Bartels"**. Disponível em: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Bartels.html. Acesso em 11 de abril de 2017.

CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **"Mikhail Ostrogradski"**. Disponível: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Ostrogradski.html. Acesso em 11 de abril de 2017.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo. Editora da Unicamp, 2004.

FERNANDES, Cláudio. **"Independência do Brasil": História do Mundo.** Disponível em: http://historiadomundo.uol.com.br/idade-contemporanea/independencia-brasil.htm. Acesso em 09 de abril de 2017.

GOMES, Cristiana. **"Revolução Industrial": InfoEscola.** Disponível em:<http:// http://www.infoescola.com/historia/revolucao-industrial/>. Acesso em 09 de abril de 2017.

JANOS BOLYAI. **In: Universidade de Coimbra.** Disponível em: http://www.uc.pt/fctuc/dmat/departamento/bibliomat/servicos/copy_of_matematicos/Bolyai-J. Acesso em 11 de abril de 2017.

KALEFF, Ana Maria M. R. **Geometrias não-euclidianas na educação básica: utopia ou possibilidade?** X Encontro Nacional de Educação

Matemática. Educação Matemática, Cultura e Diversidade. Salvador-BA, Julho de 2010. Disponível em: http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/PA/Palestra21.pdf. Acesso em: 16/04/2017.

MACIEL, Willyans. **"Immanuel Kant": InfoEscola.** Disponível em: http://www.infoescola.com/biografias/immanuel-Kant/. Acesso em 11 de abril de 2017.

MATOS, Edilande Rodrigues; NEVES, Raul Edgar Borges das. **A Geometria Euclidiana e as Geometrias Não-Euclidianas**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – UEPA, Belém, 2010.

MELLO, Vico Denis S. de; DONATO, Manuela Riane A. **"O Pensamento Iluminista e o Desencantamento do Mundo: Modernidade e a Revolução Francesa como marco paradigmático"**. Revista Crítica Histórica, ano II, nº 4, dez. 2011.

MENDES, Iran Abreu; CHAQUIAM, Miguel. **História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores.** Belém: SBHMat, 2016.

PACIEVITCH, Patrícia. **"Iluminismo": InfoEscola.** Disponível em http://www.infoescola.com/historia/iluminismo/. Acesso em 09/04/2017.

RIBEIRO, Renato Douglas Gomes Lorenzetto. **O ensino das geometrias não-euclidianas: um olhar sob a perspectiva da divulgação científica.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

SÉCULO XIX. **In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre.** Flórida: Wikimedia Foundation, 2017. Disponível: https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=S%C3%A9culo_XIX&oldid=48359272. Acesso: 24/03/17.

SOUSA, Rainer Gonçalves. **"Inconfidência Mineira": Brasil Escola.** Disponível em http://brasilescola.uol.com.br/historiab/inconfidencia-mineira.htm. Acesso em 10 de abril de 2017.

Ponderações sobre o diagrama-modelo e a empiria

Concordamos com D'Ambrosio (2013) quando afirma que "a intensão de um curso para Licenciatura não é fazer uma cronologia e nem uma onosmástica comentada, mas com base na historiografia moderna, indicar e sugerir direções e sinalizar indagações e questionamentos sobre o que se lê em diversos textos e estudos que estão disponíveis em livros e artigos".

Ressalta-se a importância de se situar a matemática na História Universal, apresentando o cenário mundial da época em que viveu o personagem principal, tendo em vista a vinculação da História da Matemática com a História da Humanidade e identificar as forças que pode ter impulsionado ou gerado obstáculos para o seu desenvolvimento.

Considerando a apresentação dos seminários e a qualidade dos textos produzidos pelos alunos a partir do diagrama-modelo, ficou evidente que o diagrama, além de suprimir as dificuldades iniciais relativas à produção de textos voltados à História da Matemática em sala de aula, contribuiu para localizar o aluno no tempo e espaço, em um primeiro plano, a partir de um personagem principal e tema/conteúdo elencado e, num segundo plano, com a presença dos contemporâneos e fatos da história universal.

Tendo em vista os resultados obtidos com as experiências aqui descritas, acredito que é possível interrelacionar conteúdos matemáticos e tópicos da História da Matemática, seja na Educação Básica ou Superior, tendo como balizador o diagrama-metodológico para orientar a escrita de um texto par uso nas aulas de matemática.

Embora a experiência apresentada tenha gerado resultados profícuos, entendo que está é mais uma das formas de abordar a História da Matemática ou utilizá-la como recurso pedagógico no processo de ensino da Matemática, principalmente nos cursos de formação de professores de Matemática.

Dentre outros resultados, ficou evidente que conhecendo a História da Matemática é possível perceber que as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes resultaram de desafios enfrentados pelos matemáticos e que foram desenvolvidas com grande esforço, quase sempre, numa ordem bem diferente daquela em que são apresentadas após todo o processo de descoberta.

Embora a proposta apresentada se encontre em fase final de maturação, fundamentação conceitual e epistemológica e foco principal na matemática, vislumbra-se que está proposta pode gerar um exercício de pesquisa investigatório; pode ser um meio de formação conceitual e epistemológica; pode contribuir para explicação e compreensão de fatos praticados pela humanidade; pode constituir práticas viáveis na atualidade; pode contribuir para a ressignificação de informações adaptadas pedagogicamente de acordo com o modelo social e educativo; pode contribuir para a compreensão das linguagens simbólica e materna associadas à matemática; desvendar problemas sociais e históricos que originaram, contribuíram ou foram obstáculos para o surgimento ou desenvolvimento do conhecimento matemático.

Alguns problemas foram identificados a partir da empiria e discussões no grupo de pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (GHEMAZ), dentre elas, destaca-se a fragilidade nos entrelaçamentos entre história geral e história da matemática frente as rupturas textuais.

Observa-se que na apresentação dos conteúdos matemáticos ainda há ressaltos a cada personagem, além disso, faltam atividades que explorem o texto como um todo, principalmente no que tange o tema e os conteúdos matemáticos relacionados a este.

Observa-se que professores das diferentes áreas de conhecimento e dos diversos níveis de ensino passaram a ter mais consciência da importância da História da disciplina que ministram e que essa consciência tem assumido múltiplas formas e dado origem a diversas iniciativas.

As discussões em torno do modelo e os experimentos que estão em andamento nos assinalam inicialmente que o diagrama-metodológico proposto, com as devidas adaptações, pode ser extensivo para outras áreas, com destaque para física, química e biologia.

Bibliografia consultada e referenciada

BASSALO, José Maria Filardo. **La Penha:** Gerador e Gerenciador da Ciência. Revista Ciência e Sociedade do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Rio De Janeiro: CBPF, 1997.

BICUDO, M. A. V., GARNICA, A. V. M. **Filosofia da Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003

BODEI, Remo. **A História tem um sentido?** Tradução Reginaldo Di Piero. Bauru (SP): EDUSC, 2001.

CHAQUIAM, M. Um diagrama, um texto. In: MENDES, I. A.; CHAQUIAM, Ml. **História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores.** Belém: SBHMat, 2016.

CHAQUIAM, Miguel. **História da Matemática nas aulas de Matemática: uma proposta para professores.** Anais do XII Seminário Nacional de História da Matemática. Itajubá (MG): SBHMat, 2017.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática**. In: BICUDO, M. A. V. (org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p. 97-115.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **A Interface entre História e Matemática: Uma Visão Histórico-Pedagógica**. Revista de Matemática, Ensino e Cultura. Natal (RN): EDUFRN, 2013.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Por que e Como Ensinar História da Matemática**. In: FOSSA, J. A. (Org) Facetas do Diamante. Rio Claro – SP: Ed. SBHMat, 2000, p. 241-271.

DYNNIKOV, Circe e SAD, Lígia Arantes. **Uma abordagem pedagógica do uso de fontes originais em História da Matemática**. Guarapuava (PR): SBHMat, 2007.

GASPAR, Maria Terezinha Jesus e MAURO, Suzeli. **Contando histórias da matemática e ensinando matemática**. Coleção História da Matemática para Professores. Guarapuava (PR): SBHMat, 2007.

LOPES, Lidiane Schimitz e FERREIRA, André Luis Andrejew. **Um olhar sobre a história nas aulas de matemática**. Revista Abakós. Belo Horizonte (MG): Ed. PUC Minas, 2013.

MENDES, I. A. **O uso da história no ensino da Matemática:** reflexões teóricas e experiências. Belém (PA): EDUEPA, 2001.

MENDES, Iran Abreu; BRITO, Arlete de Jesus; MIGUEL, Antônio; CARVALHO, Dione Lucchesi de. **História da Matemática em atividades didáticas**. Natal (RN): EDUFRN, 2005.

MENDES, I. A. **História da Matemática no Ensino:** Entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

MENDES, I. A.; CHAQUIAM, Ml. **História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores.** Belém: SBHMat, 2016.

MIGUEL, A. BRITO, A. J. **A História da Matemática na Formação do Professor de Matemática**. Cadernos CEDES - História e Educação Matemática. Campinas (SP): Papirus, n. 40, 1996. p. 47-61.

MIGUEL, A**. As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão**: argumentos reforçadores e questionadores. Revista Zetetiké. Campinas (SP): UNICAMP – FE – CEMPEM, 1997. pp. 73-105.

MIGUEL, A. & MORIN, M. A. **História na Educação Matemática:** propostas e desafios. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte (MG): Autêntica, 2004.

MOTTA, C. D. V. B. **História da Matemática na Educação Matemática:** espelho ou pintura? Santos (SP): Comunicar Editora, 2006.

MOURA, Breno Arsioli; SILVA, Cibelle Celestino. **Abordagem multicontextual da história da ciência:** uma proposta para o ensino de conteúdos históricos na formação de professores. Revista Brasileira de História da Ciência. V. 7, N. 2. Rio de Janeiro: SBHC, 2014. pp. 167-185

OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de; FRAGOSO, Wagner da Cunha. **História da Matemática:** história de uma disciplina. Revista Diálogo e Educação. Curitiba (PR): EDUFPR, 2011.

PACHECO, Edilson, PACHECO, Enilda das Graças. **Uma abordagem pedagógica para a introdução da Histórica da Matemática**. Coleção História da Matemática para Professores. Belém: SBHMat, 2009.

PONTE, João Pedro da; JANUÁRIO, Carlos; FERREIRA, Isabel Calado; CRUZ, Isabel. **Por uma formação inicial de professores de qualidade**. Documento de trabalho da Comissão ad hoc do CRUP para a formação de professores. Portugal, 2000. In: www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte. Acessado em 10 de outubro de 2012.

ROQUE, Tatiana. **Desmascarando a equação. A história no ensino de que matemática?** Revista Brasileira de História da Ciência. V. 7, N. 2. Rio de Janeiro: SBHC, 2014. pp. 167-185.

STAMATO, Jucélia Maria de Almeida. **A Disciplina História da Matemática e a Formação do Professor de Matemática**: Dados e Circunstâncias de sua Implantação na Universidade Estadual Paulista, campi de Rio Claro, São José do Rio Preto e Presidente Prudente. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, 196 p. UNESP, Rio Claro, 2003.

VALENTE, Wagner Rodrigues (org.). **Ubiratan D´Ambrosio:** conversas, memórias, vida acadêmica, orientandos, educação matemática, etnomatemática, história da matemática, inventário sumário do arquivo pessoal. São Paulo: Annablume, 2007.

VIANNA, Carlos Roberto. **Usos didáticos para História da Matemática**. Anais do I Seminário Nacional de História da Matemática. (Org) Fernando Raul Neto. Recife (PE): SBHMat, 1998. pp. 65 – 79.

VIANNA, Carlos Roberto. **História da Matemática, Educação Matemática:** entre o Nada e o Tudo. Revista Bolema. Rio Claro (SP): EDUNESP, 2010.

WEINBERG, S. **Para explicar o mundo**: A descoberta da ciência moderna. São Paulo: Companhia das Letras, 2015.

MIGUEL CHAQUIAM

Licenciado em Ciências pelo Centro de Estudos Superiores do Estado do Pará (1983), Licenciado em Matemática pelo Centro de Estudos Superiores do Estado do Pará (1984), Especialista em Matemática pela UNESPA (1989), Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2001) e Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2012). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Álgebra Linear, Estruturas Algébricas, Análise Real, Matemática Computacional e História da Matemática, e na área de Educação Matemática, com ênfase em Ensino de Matemática e História da Educação Matemática. Foi professor de Matemática da Educação Básica durante 18 anos e é professor no Ensino Superior há mais de 30 anos. Atualmente é professor da Universidade da Universidade do Estado do Pará, vinculado ao Departamento de Matemática, Estatística e Informática e ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática e Coordenador do Grupo de Pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (GHEMAZ).
E-mail: *miguelchaquiam@gmail.com*

COLEÇÃO V

Educação Matemática na Amazônia

AGRADECIMENTO

SBEM
Sociedade Brasileira de Educação Matemática

SBEM PA
Sociedade Brasileira de Educação Matemática/Pará

O autor compartilha os resultados de suas experiências e produções e nos apresenta um modelo que pode ser utilizado na produção de textos para uso em sala de aula, ou seja, um modelo diagramado, uma fonte viável para a produção de atividades estruturadas por esse interessante construto.

A obra fundamentalmente estrutura-se em torno de dois eixos. No primeiro discute o uso da história no ensino onde apresenta ampla argumentação com aporte em diversos autores consagrados enfatizando o contexto da História da Matemática e descreve a estruturação de um modelo que traduz seu olhar como pesquisador sobre a possibilidade da História da Matemática ser utilizada com ênfase didática para o ensino de Matemática. No segundo eixo o autor materializa o uso do seu Modelo - Diagrama Metodológico - exemplificando com a apresentações de textos didáticos que abordam temas da Matemática para sala de aula.

A obra é fruto do labor de um investigador comprometido com a mudança e aprimoramento de sua prática profissional, traz uma construção incomum que passou por várias adaptações e submissão ás criticas de seus pares e enfatiza a contextualização do saber matemático numa dinâmica multifacetada que pode estabelecer conexão entre a amplitude histórica da humanidade a partir da construção de um cenário mundial e as construções próprias da sala de aula, norteadas por contextos técnico-científicos, pluridisciplinar, sociocultural e didático-pedagógico.

ISBN 978-85-98092-35-5