# ASSOCIANDO PESQUISA E INTERVENÇÃO EM UMA DISCIPLINA DE INTRODUÇÃO AO CÁLCULO

*Valéria Moura da Luz*[1]
*Colégio Militar do Rio de Janeiro*
*profvaleria.luz@gmail.com*

*Ângela Rocha dos Santos*[2]
*Universidade Federal do Rio de Janeiro*
*angela@im.ufrj.br*

**Resumo**
Esta pesquisa teve por objetivo investigar uma proposta de intervenção em uma disciplina de Introdução ao Cálculo, que aconteceu concomitantemente com as aulas tradicionais de Cálculo I, em um curso de graduação da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Na disciplina de Introdução ao Cálculo foram abordados conceitos sobre funções elementares desenvolvidos sob a perspectiva da Resolução de Problemas, em um ambiente computacional. Neste estudo, buscou-se investigar como o uso da abordagem por resolução de problemas, utilizando como recurso a visualização e a coordenação de múltiplas representações, proporcionadas pelo ambiente informatizado, pode contribuir para o enriquecimento das imagens de conceitos dos estudantes. A análise final sugere que a visualização e a articulação das múltiplas representações proporcionadas por um ambiente em que as interações entre os participantes e as mídias foram constantes, podem favorecer o enriquecimento das imagens de conceito dos estudantes relativos aos objetos sobre os quais se está operando.

**Palavras chave:** Introdução ao Cálculo; Resolução de Problemas; Tecnologia da Informação e Comunicação; Visualização; Registros de Representação Semiótica.

## 1. Introdução

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral vem se configurando, ao longo dos anos, praticamente em todas as Instituições do Ensino Superior do país, dentre aquelas que mais reprovam. Muitos pesquisadores brasileiros se preocuparam com os altos índices de reprovação dos alunos em Cálculo (BARUFI, 1999; REIS, 2001; REZENDE, 2003; OLÍMPIO JÚNIOR, 2006; PEREIRA, 2009; etc.). As dificuldades dos alunos universitários na aprendizagem de Cálculo também têm sido o foco de diversas pesquisas nacionais e internacionais (TALL, 1989; GIRALDO, 2004).

[1] Mestre em Ensino de Matemática (IM/PEMAT/UFRJ) e professora do Colégio Militar do Rio de Janeiro.
[2] Doutora em Matemática (IM/UFRJ), professora da Universidade Federal do Rio de Janeiro e orientadora da dissertação de mestrado, finalizada em 2011, da primeira autora desse artigo.

Com base na problemática aqui citada, surgem algumas perguntas: Qual é razão de tantas reprovações? O problema se concentra no professor e na sua metodologia de ensino? Ou no aluno que chega aos “bancos” universitários com muitas deficiências na matemática do ensino básico? Ou ambas as possibilidades são facetas, causa e consequência, de um mesmo problema? (Rezende, 2003).

De um modo geral, os discursos dos professores universitários remetem a críticas em relação à qualidade de ensino nos níveis Fundamental e Médio (BARRETO, 1995, apud REIS, 2001). De fato, concordamos que a formação matemática dos alunos da escola básica é muito deficiente, como comprovam os dados estatísticos de avaliações institucionais, tais como o Sistema de Avaliação de Educação Brasileira (SAEB), a Prova Brasil, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA). No entanto, temos um importante ponto que não devemos e nem podemos desconsiderar: ainda que fossem propostas alterações significativas nos níveis fundamental e médio, teríamos toda uma geração de estudantes em déficit com a aprendizagem. Nesse sentido, aliamo-nos a Gomes et al. (2005, p.7), quando esses, ao se reportarem ao aluno iniciante de cursos superiores, da área de Ciências Exatas, especialmente de Engenharia, comentam: “É certo que uma reforma deveria ser iniciada nos ensinos fundamental e médio, no entanto, esse aluno está chegando ao curso superior e nós, professores universitários, não podemos enviá-los de volta”. Por outro lado, na visão dos estudantes, o problema está relacionado à forma como o professor conduz sua prática pedagógica (CABRAL, 1992, apud REIS, 2001).

Fato é que independende do ângulo por que se enxerga a questão, o problema existe e muitas respostas e encaminhamentos têm sido apresentados, em vários países, por diversos e importantes pesquisadores da área, no âmbito de solucioná-lo.

Segundo Rezende (2003), uma solução bastante usual nas instituições de ensino superior em nosso país para o enfrentamento dos resultados catastróficos no ensino de Cálculo é a realização de cursos preparatórios para um curso inicial de Cálculo I. Tais cursos têm como objetivo, em geral, possibilitar ao aluno rever conceitos importantes da matemática da escola básica, reconstruindo-os quando necessário, e, consequentemente, aprofundá-los.

No presente trabalho, trazemos um recorte de nossa pesquisa de mestrado (LUZ, 2011), que teve por objetivo investigar uma proposta de intervenção em uma disciplina de Introdução ao Cálculo, oferecida concomitantemente com as aulas de Cálculo Diferencial e

Integral I, em um curso de graduação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). O público alvo foram alunos recém-egressos do vestibular de 2010, no curso de Bacharelado em Ciências Matemáticas e da Terra. A disciplina de Introdução ao Cálculo foi desenvolvida sob a perspectiva da Resolução de Problemas, em um ambiente computacional, intensamente utilizando a coordenação de múltiplas representações semióticas (Duval, 2009) de um mesmo objeto matemático.

Vale ressaltar que o nosso objetivo foi elaborar uma proposta que transformasse as aulas, da disciplina de Introdução ao Cálculo, em encontros mais dinâmicos e diferenciados se comparados às tradicionais aulas de Cálculo I, que aconteciam concomitantemente. Assim, optamos passar de uma organização em que o professor é o cerne do processo ensino-aprendizagem para outra, em que os alunos interagem com os outros estudantes, o professor e as mídias[3], de forma a facilitar a construção do conhecimento. Dentro dessa perspectiva, algumas possibilidades de abordagem para um curso de Introdução ao Cálculo puderam ser encontradas na nossa revisão bibliográfica (LUZ, 2011). Destacamos a metodologia via resolução de problemas (ONUCHIC, 1999; ALLEVATO, 2005; etc.), a aprendizagem em pequenos grupos (NASCIMENTO, 2000) e o uso de tecnologias no ensino (VILLARREAL, 1999; BORTOLOSSI, 2010; entre outros). Algumas pesquisas (NASCIMENTO, 2000; DOERING et al., 2004) apontaram também para a necessidade de um conhecimento mais aprofundado das dificuldades ou barreiras que se interpõem à aprendizagem da disciplina do cálculo que poderá contribuir para a elaboração de estratégias didáticas mais efetivas; como também a importância que deve ser enfatizada sobre a abordagem dos pré-conceitos do Cálculo em detrimento dos procedimentos técnicos (NASCIMENTO, 2000; REZENDE, 2003).

Na disciplina objeto da intervenção, os assuntos e atividades desenvolvidos abordaram conceitos relativos às funções elementares. Assim, a partir do nosso objetivo, nos propusemos investigar como o uso da abordagem por resolução de problemas, utilizando fortemente como recurso a visualização e, também, a coordenação de múltiplas representações (DUVAL, 2009) proporcionadas pelo ambiente informatizado pode contribuir para o enriquecimento das imagens de conceitos (TALL & VINNER, 1981) dos estudantes envolvidos na pesquisa. Para isso, desenvolvemos – em parceria com a

[3] Nesse presente estudo, designaremos por mídias lápis, papel e o computador.

professora[4] da disciplina de Introdução ao Cálculo (IC) – uma proposta de ensino na qual o ambiente tecnológico ofereceu contexto propício para a realização de atividades voltadas para a visualização e a coordenação de múltiplas representações semióticas, referentes aos conceitos supracitados. Entretanto, é importante destacar que esta parceria professor/pesquisador presente durante toda a fase de planejamento, sofreu mudança durante a fase de intervenção na sala de aula. Ou seja, foi atribuída à professora da disciplina a tarefa de aplicar o roteiro de atividades, e, consequentemente, promover de forma efetiva a interferência no contexto educacional. Por outro lado, à pesquisadora coube a tarefa de fazer o relato de tal experiência, por meio da modalidade de estudo de caso de observação (BIKLEN & BODGAN, 1994).

## 2. Opções Metodológicas

Optamos por utilizar duas metodologias organizadas da seguinte forma: [I] Para a aplicação da intervenção: abordagem por Resolução de problemas, em um ambiente computacional; [II] Para coleta dos dados da pesquisa: estudo de caso de observação.

Para aplicação da primeira metodologia, buscamos escolher problemas (ou atividades) nos quais a visualização e a coordenação entre as múltiplas representações (numérica, algébrica e geométrica), proporcionadas pelo ambiente computacional, se complementassem, no sentido de estimular, nos alunos, a capacidade de explorar, conjecturar, refutar, concluir e demonstrar. Vale ressaltar que tais atividades foram baseadas no tripé “explorar-conjecturar-concluir/demonstrar” promovendo, dessa maneira, uma mudança no esquema tradicional “definição - teorema - demonstração-corolário (aplicação)” (SANTOS, KUBRUSLY & BIANCHINI, 2004).

Em nossa pesquisa, ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas se constituiu em um caminho para se aprender Matemática de forma mais significativa (ONUCHIC, 1999; ALLEVATO, 2005). Ou seja, segundo Onuchic (1999), o problema é visto como um elemento que dispara um processo de construção do conhecimento tendo o professor como guia e os alunos como coconstrutores. Assim, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático, então, começa com um problema que expressa aspectos-chave e técnicas matemáticas que deverão ser desenvolvidas na busca por respostas razoáveis ao problema proposto (ALLEVATO, 2005).

[4] A professora da disciplina de Introdução ao Cálculo foi também a regente do curso de Cálculo Diferencial e Integral I. No entanto, em nossa pesquisa, pesquisamos somente o curso de IC.

Já a segunda metodologia empregada foi embasada em uma abordagem qualitativa que objetivou avaliar os resultados da pesquisa em si, por meio do possível enriquecimento das imagens de conceito dos estudantes envolvidos. Além disso, a opção pela metodologia de estudo de caso possibilitou também uma visão ampla e profunda do fenômeno estudado podendo ser de muita valia para outros cursos de "Introdução ao Cálculo" ou "Pré-Cálculo", não importando o nome que se dê a esses cursos, levantando a seguinte questão: "o que eu posso (ou não aplicar) deste caso na minha situação?" (LUDKE & ANDRÉ, 1986). Para dinamizar a metodologia de trabalho ensino-aprendizagem de matemática por meio da resolução de problemas em sala de aula, seguimos uma organização didática sugerida por Onuchic (1999): [a] Formar grupos: propor uma atividade cujos participantes organizados em grupos tentarão resolver o problema proposto; [b] O papel do professor: o professor faz a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários; [c] Resultados na lousa: anotar ou comentar os resultados obtidos pelos grupos quer sejam certos ou errados e aqueles feitos por diferentes caminhos; [d] Plenária: assembleia com todos os grupos, onde os alunos procuram defender seus pontos de vista e participam; [e] Análise dos resultados: nesta fase são trabalhados os pontos de dificuldade e os problemas secundários, além disso, o aspecto exploração é bastante considerado nesta análise; [f] Consenso: com a devida retirada de dúvidas, busca-se um consenso sobre o resultado pretendido; [g] Formalização: faz-se uma síntese daquilo que se objetivava "aprender" a partir do problema e são colocadas as devidas definições, identificadas as propriedades e feitas as demonstrações.

Ao adotarmos essa organização didática, tivemos como meta desenvolver nos alunos a capacidade de justificar procedimentos e estratégias usadas na resolução de problemas, incentivando, também, a oralidade e a escrita.

O público alvo foi formado pelos alunos que ingressaram no curso de Ciências Matemáticas e da Terra da UFRJ pelo Concurso Vestibular de 2010. Todas as aulas desse curso de IC aconteceram no Laboratório de Ensino e Programação (LEP n.02) do Centro de Ciências Matemáticas (CCMN) e da Natureza da UFRJ, utilizando *mathlets*[5]. Nesse laboratório contávamos com dois projetores multimídias e 40 computadores. Os encontros transcorreram em quatro horas/aula semanais. Participaram desta pesquisa inicialmente 34

[5] Pequenas atividades interativas desenvolvidas dentro de um ambiente computacional.

alunos, entretanto, após algumas reclassificações no vestibular daquele ano este número atingiu a marca de 52 estudantes.

## 3. Referencial Teórico

O referencial teórico fundamentou a análise dos dados coletados, sob a perspectiva dos alunos, e foi composto por duas teorias[6], a saber: a teoria das Imagens de Conceito (TALL & VINNER, 1981) e, também, pela teoria dos Registros das Representações Semióticas (DUVAL, 2009).

### 3.1 Representações Matemáticas em uma Perspectiva Semiótica e sua relação com a Visualização

Em nossa visão, não é possível conceber a abordagem das representações matemáticas por meio de um ambiente computacional sem trazer ao debate a necessidade de se utilizar elementos visuais, o que implica dar à visualização um significado no processo de compreensão e interpretação dos conceitos matemáticos.

Segundo Borba & Villarreal (2005), "a abordagem visual de um conceito ou objeto, em Matemática ou em qualquer outra área do conhecimento, pode ser considerada hoje, como um dos elementos que caracterizam novos estilos de construção do conhecimento".

Arcavi & Hadas (2000), por exemplo, afirmam que os ambientes de geometria dinâmica constituem verdadeiros laboratórios virtuais em que os estudantes podem investigar e aprender matemática. Os autores enumeram uma série de características que esses laboratórios têm a possibilidade de desenvolver, desde que acompanhados de materiais curriculares e práticas de ensino em sala de aula. Tais características são: visualização, experimentação, surpresa, resposta da máquina e necessidade de demonstração. Em relação à visualização, especificamente, Arcavi & Hadas, citando Fishbein (1987)[7], afirmam que a concretude de imagens visuais é um fator essencial para criar o sentimento de autoevidência e, portanto, não apenas organiza informações em estruturas munidas de significado, como também é um importante fator conduzindo o desenvolvimento analítico de uma solução.

[6] Optamos por utilizar essas duas fundamentações teóricas por acreditarmos fortemente, em concordância com Quintaneiro (2010), que as teorias de imagem de conceito e os registros de representações semióticas possam ser complementares no sentido de a primeira direcionar o foco nas imagens mentais que o indivíduo tem de objetos matemáticos, e a segunda teoria tratar do que entendemos como a mediação entre o objeto e o indivíduo: as múltiplas representações.

[7] E. Fishbein. Instituiton in Sicience and Mathematics: An Education Approach. Reidel, 1987.

Em nossa investigação, consideramos que a visualização é um processo importante na elaboração de conjecturas, que podem ser refutadas, testadas, interpretadas, reinterpretadas e, finalmente, demonstradas. Assim, a possibilidade de integração das representações gráficas, algébricas e numéricas com a oralidade e a escrita e a nova forma de interação com as imagens, que passam a ser tratadas de forma dinâmica, colocam o processo de ensino-aprendizagem da matemática sob uma nova perspectiva, desempenhando um papel essencial na compreensão dos conceitos envolvidos.

Segundo Machado (2009), Raymond Duval estudou as diversas representações mobilizadas pela visualização matemática. Esta autora ainda acrescenta:

> Na perspectiva de Duval, uma análise do conhecimento matemático, é essencialmente, uma análise do sistema de produção das representações referentes a esse conhecimento. [...]
> A maneira matemática de raciocinar e de visualizar está intrinsecamente ligada à utilização das representações semióticas, e toda comunicação em matemática se estabelece com base nessas representações. (p.9)

A diversidade de representações semióticas se apresenta como um papel primordial na compreensão da matemática, nas premissas de Duval. Assim, ele introduziu um termo específico para designar os diversos signos utilizados para representar o conhecimento matemático, os Registros de Representação Semiótica.

Em matemática há uma grande variedade de registros de representações, tais como: os variados sistemas de numeração, as variadas formas de visualização (gráficos, diagramas e os esquemas), as escritas algébricas ou mesmo a linguagem natural.

Conforme Duval (2009), as transformações de representações semióticas podem ser efetuadas de dois modos: *tratamento* – não ocorre mudança no sistema de representação, correspondendo aos processos de justificação; e *conversão* – envolve a troca do sistema de representação.

De forma geral, acredita-se que a compreensão de um dado objeto deve ser puramente mental, independendo de suas representações semióticas. Entretanto, Duval defende, e nós também, que a compreensão em matemática está intimamente ligada ao fato de existir mais de uma representação para um objeto e que a articulação entre elas – que ocorre durante as *conversões* – é uma condição primordial de acesso à compreensão de um determinado conceito.

## 3.2 Imagem de Conceito e Definição de Conceito

Segundo Tall & Vinner (1981), *imagem de conceito* é definida como:

> [...] a estrutura cognitiva total associada ao conceito, que inclui todas as figuras mentais, processos e propriedades associados. Ela é construída ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (p.152, tradução nossa)

Para Giraldo (2004, p.8): “A imagem de conceito compõe de atributos de diferentes naturezas e graus de generalidade, e que podem ser representações visuais, bem como coleções de impressões ou experiências”. Assim, incluem-se na imagem de conceito de um indivíduo todos os atributos associados ao conceito em questão. Entretanto, a imagem de conceito de um indivíduo não é uma estrutura estática: ela sofre transformações de acordo com o desenvolvimento cognitivo do sujeito, podendo ter atributos incluídos, excluídos ou modificados no decorrer de suas experiências cognitivas (Ibidem).

Para Tall & Vinner (1981), a *definição do conceito* é um arranjo de palavras usadas para especificar este conceito. Esta sentença pode tanto ser simplesmente decorada como aprendida de forma mais significativa pelo estudante, podendo, inclusive, ser uma construção pessoal do próprio aluno, por meio de uma adaptação de palavras usadas por ele para explicar o conceito segundo a sua compreensão, utilizando para isso de sua imagem de conceito. Nesse caso, uma definição de conceito pessoal pode diferir da definição formal[8] aceita pela comunidade da área de estudo.

## 4. Exemplo de uma atividade desenvolvida: o problema da caixa

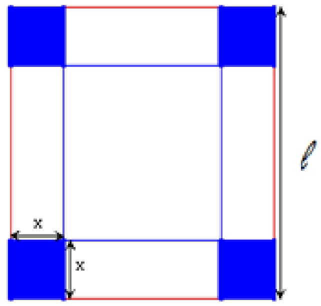
Vale ressaltar que vamos reproduzir, aqui, só a primeira atividade desenvolvida na disciplina de IC, no laboratório de ensino e programação, no CCMN, da UFRJ, que aconteceu no dia 28 de março de 2010, das 13h30min às 16h30min. Tínhamos presentes 28 alunos, organizados em sete (7) grupos, que denominamos por 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

O quadro (Quadro 1) a seguir sintetiza as mídias utilizadas, os objetivos específicos e o problema proposto, respectivamente:

*Quadro 1* : O problema da Caixa

| |
|---|
| **Mídias utilizadas:**<br>• Lápis, papel e lousa;<br>• site: http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/index.htm |
| **Objetivos Específicos**:<br>• Analisar um problema que envolve máximo e/ou mínimo de uma função, que aparecem comumente no |

[8] Entendemos aqui por definição formal aquela largamente aceita pela comunidade acadêmica matemática em geral, em um dado contexto histórico e social.

<table>
<tr><td colspan="2">nosso dia, por meio dos conhecimentos matemáticos de que alunos dispõem até a presente data;<br>• A abordagem do roteiro didático consiste que o aluno entenda duas etapas importantes para resolver um problema como este: (1) modelar o problema por meio de uma função volume relacionando a variável dependente $V = V(x)$ em função da variável independente ($x$); (2) determinar os pontos onde existe uma reta tangente horizontal ao gráfico da função encontrada no primeiro passo.</td></tr>
<tr><td>Problema: Um pedaço de folha de plástico quadrada de lado igual a $\ell$ deve ser transformada em uma caixa de água, sem tampa superior, cortando-se quadrados em seus quatros cantos e levantando-se os quatros retângulos resultantes para formar as laterais da caixa. O problema é descobrir como se deve cortar os cantos desta folha de modo a formar, quando completamente cheia, uma caixa de maior volume possível.</td><td></td></tr>
</table>

Dividimos a aplicação da atividade em dois momentos: [i] resolução do problema sem o auxílio do computador: os alunos buscaram uma possível solução para o problema dialogando em grupo e com a professora de IC; [ii] resolução do mesmo problema, com o auxílio de um roteiro didático[9] utilizando *mathlets*: os estudantes interagiam entre si, com a professora de IC e as mídias.

## 5. Resultados da Pesquisa

Como esperado, no primeiro momento de aplicação, nenhum dos grupos conseguiu resolver o problema proposto com a matemática que eles conheciam até àquela data. Dessa forma, tal problema foi utilizado para enfatizar que o conhecimento da matemática que esses alunos traziam da escola básica era insuficiente para resolvê-lo. Ademais, na busca por uma solução, o problema sugerido disparou um processo de construção de novos conhecimentos, como nos sugeriu Onuchic (1999), além de ressaltar fortemente a importância e a necessidade dessa construção.

Com relação às soluções apresentadas, no primeiro momento, cinco grupos, denominados por 2, 4, 5, 6 e 7, conseguiram a partir do volume do paralelepípedo chegar à sentença matemática que modela o problema, mostrando que a maioria conseguiu fazer a conversão do registro da língua natural para a linguagem algébrica em que a letra $x$ aparece como estatuto de variável independente e $V$ como a variável dependente. Por exemplo, os grupos 5 e 6 chegaram à relação $V=(l - 2x)^2 \cdot x$. Entretanto, os grupos 2 e 4 precisaram atribuir um valor para o lado do quadrado ($l$ =10), particularizando a situação desde o início (ver figura 1), para que pudessem determiná-la mais facilmente. Esses fatos em si

[9] Esse roteiro se encontra nos anexos.

sugerem que esses estudantes tinham uma imagem conceitual de função desenvolvida, de acordo com a definição de conceito de função citada por Sierpinska (1988)[10].

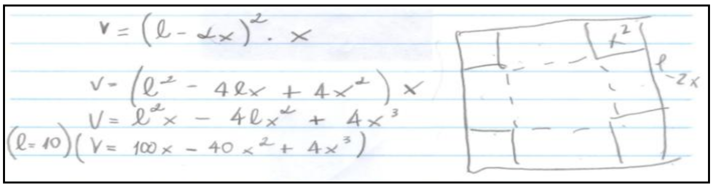


*Figura 1*: Exemplo de tentativa de solução do grupo 4 – o problema da caixa

Apesar do grupo 7 ter conseguido modelar a função $V=(x - 2y)^2 \cdot y$, ocorreu um conflito em relação à variável independente (ver figura 2), pois ao atribuírem $x$ para o lado do quadrado e $y$ para o corte não conseguiram identificar o que estava variando, se $x$ ou $y$. Esse fato sugere que suas imagens de conceito sobre a noção de variável pode ser deficiente, e, provavelmente, a de função também.

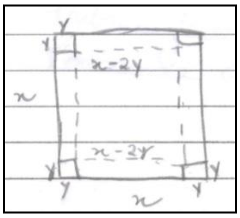


*Figura 2*: Tentativa de solução do grupo 7 – o problema da caixa

No grupo cinco (5), um aluno que já tinha estudado cálculo I usou as técnicas de derivação de forma correta, não concluindo efetivamente a atividade devido a equívocos cometidos em suas contas. Entretanto, o fato em si não nos permitiu esclarecer se ele tinha a compreensão conceitual sobre o que estava fazendo, pois esse aluno confundiu o ponto máximo com o ponto de inflexão, sugerindo que pode haver um conflito entre a definição de máximo/mínimo de uma função e o ponto de inflexão, ou ser um resultado tecnicamente decorado.

Já o grupo 2 nos chamou a atenção pela forma convicta a qual afirmou, que o cubo seria o sólido com volume máximo (ver figura 3), mesmo não apresentando uma prova para tal argumento. Essa atitude sugere que esse fato pode ter sido simplesmente decorado durante a sua passagem pelo ensino médio, ou, ainda, ter sido aceito por estar em acordo com a sua intuição. Ainda sobre esse grupo, evidenciamos em sua segunda tentativa de resposta um conflito após determinarem a função cúbica. Este grupo "pensou" em usar

[10] Segundo Sierpinska (1988), "A mais fundamental concepção de função é a de uma relação entre magnitudes variáveis [...]".

relações (relações de Girard)[11] entre os coeficientes da função de terceiro grau e as suas raízes, visando determinar as possíveis raízes da função supracitada e, em seguida, segundo eles, o valor do corte. Esse fato nos indica que esses alunos pensaram em determinar o ponto máximo da referida função de forma análoga como é tradicionalmente feito no ensino básico para função quadrática, por meio do ponto médio das raízes e, consequentemente, esse seria o valor procurado.

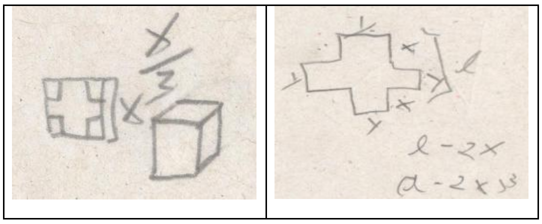


*Figura 3*: Primeira tentativa de solução do grupo 2 – o problema da caixa

Dois grupos, que denominamos por 1 e 3, não conseguiram determinar a função que modela o problema. O grupo 1, por exemplo, não foi capaz de realizar a conversão da tabela (ver figura 4) para a relação de dependência entre duas magnitudes variáveis, revelando que a sua imagem conceitual de variável é fortemente restrita, assim como o de função. Já o grupo 3, durante as discussões em grupo, apresentou dificuldades com os conceitos de área e volume, impedindo-os de modelar a função, revelando que esses estudantes traziam algumas deficiências em conceitos da escola básica.

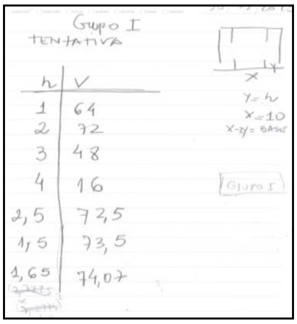



*Figura 4*: Tentativa de solução do grupo 1 – o problema da caixa

Por fim, a maioria dos grupos (*5/7 do total*) argumentou que não conseguiu terminar o problema já que a função era do 3ª grau. Entretanto, segundo esses grupos, se a função em questão fosse uma polinomial do 2º grau, eles afirmaram que conseguiriam finalizar o problema pelo vértice da parábola. Ora, essa associação nos parece natural, uma vez que esses alunos, tradicionalmente, só se depararam com a noção do máximo (ou

[11] As relações de Girard são estudadas, tradicionalmente, no final do ensino médio e é um tópico que se encontra dentro da teoria das Equações Polinomiais.

mínimo) de uma função no caso desta ser uma função polinomial do 2º grau, o que por si só justifica o vértice da parábola ter sido evocado de suas imagens de conceito.

Já com relação ao segundo momento, as intervenções[12] da professora foram mais constantes e intensas, e, mesmo assim, os alunos não conseguiram terminar o exercício dentro do tempo de aula, ficando combinado que todos trariam as suas soluções na próxima aula.

Devemos lembrar que os estudantes envolvidos nessa pesquisa estavam assistindo as aulas de Cálculo concomitantemente com o curso de IC, e, portanto, as suas imagens de conceito estavam em constante mudança (atributos eram incluídos, excluídos ou modificados). Assim, na próxima aula de IC, dos 28 alunos, 21 conseguiram terminar o problema da caixa usando a derivada da função polinomial. Entretanto, os demais resolveram o problema utilizando o registro numérico (tabela), apesar de toda a discussão que confirmou a imprecisão do método. Além do mais, todos os alunos que conseguiram terminar o problema fizeram a conversão do registro figural para a linguagem algébrica, além dos tratamentos necessários para determinar as raízes da função derivada.

## 6. Considerações Finais

Concluímos que o processo de visualização, não estando subordinado à Álgebra, proporcionado pelo uso de roteiros didáticos apropriados em um ambiente em que as interações entre os participantes e as mídias foram constantes, teve um papel de destaque no enriquecimento da imagem de conceito dos estudantes envolvidos. Tal processo foi importante também ao ser empregado na análise da validade ou mesmo da correção de concepções que os alunos possuíam a respeito de determinados conceitos matemáticos ou conjecturas, contrariando, inclusive, em alguns momentos, as suas intuições, (VILLARREAL, 1999; ALLEVATO, 2005). Dessa forma, mostramos que os aspectos visuais, algébricos, tabulares (numéricos) e verbais se complementaram no processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Introdução ao Cálculo. Somando-se a esses fatores está a importante atuação da professora na mediação pedagógica, auxiliando os alunos a interpretar da melhor forma os gráficos projetados na tela do computador e a coordenar os diversos tipos de registros de representações semióticas. A presente abordagem também

[12] Importante destacar, aqui, também, que tais intervenções foram importantes sob dois aspectos: enfatizar a importância das novas técnicas que estavam sendo aprendidas no curso de cálculo, concomitantemente com a disciplina de IC, e correlacioná-las com a solução do problema da caixa.

estimulou a participação do aluno no seu processo de aprendizagem de forma participativa, crítica e criativa.

## 7. Referências

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador à resolução de problemas fechados**: análise de uma experiência. 2005. Tese (Doutorado. em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

ARCAVI, A.; HADAS, N. **Computer mediated learning**: An exemple of an approach. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5: 25-45, 2000.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integra***l*. São Paulo. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 1999.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. 99p. (Coleção em Tendências da Matemática).

BORTOLOSSI, H. J. Cálculo a Uma Variável: Diferenciando Problemas e Integrando Ações. In: **V Encontro Estadual de Educação Matemática do Rio de Janeiro**, 2010.

DOERING, C. I; NÁCUL, L. B. C.; DOERING, L. R. O programa Pró-Cálculo da UFRGS. In: CURY, H. N. (Org) **Disciplinas matemáticas em cursos superiores***:* reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 201-223.

DUVAL, R. Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machadado, S. D. A. (Org). **Aprendizagem em Matemática –** Registros de Representação Semiótica**,** Campinas, Editora Papirus, 2009. p. 11-33.

GIRALDO, V. **Descrições e conflitos computacionais***:* o caso da derivada. Tese (Doutorado em Ciências) – COPPE. Rio de Janeiro: UFRJ, 2004.

GOMES, G. H.; LOPES, C. M. C.; NIETO, S. S. Cálculo zero: uma experiência pedagógica com calouros nos cursos de engenharia. In: Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 33, 2005, Campina Grande. **Anais**... Campina Grande: UFPB, 2005. CD-ROM.

LUZ, V. M. **Introdução ao Cálculo***:* Uma Proposta Associando Pesquisa e Intervenção. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

MACHADO, S. D. A. (Org). **Aprendizagem em Matemática***:* Registros de Representação Semiótica. Campinas, S.P: Papirus, 2009.

NASCIMENTO, J. L. Uma Proposta metodológica para a disciplina de Cálculo I. **VI Encontro de Educação em Engenharia**, UFRJ. 2000. Disponível em: <http://www.dee.ufrj.br/VIIEEE/VIEEE/artigos/4/04.doc>. Acesso em: 3 set. 2010.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.(Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. Cap. 12, p.199-220.

OLIMPIO JUNIOR, A. **Compreensões de Conhecimentos de Cálculo Diferencial no primeiro ano de Matemática** – Uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

PAIXÃO, V. C. P. S. **Mathlets***:* Possibilidades e Potencialidades para uma Abordagem Dinâmica e Questionadora no Ensino de Matemática. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

PEREIRA, V. M. C. **Cálculo no Ensino Médio***:* Uma proposta para o problema da variabilidade. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

QUINTANEIRO, W. **Representações e definições formais em trigonometria no ensino médio.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

REIS, F. da S. **A Tensão entre o Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise***:* A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos. Tese de Doutorado em Educação. Campinas: UNICAMP, 2001.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SANTOS, A. R.; KUBRUSLY, R. S.; BIANCHINI, W. Mathlets: Applets Java para o Ensino de Matemática*;* **Anais II HTEM***;* UERJ: Rio de Janeiro, 2004.

SIERPINSKA, A. Epistemological remarks on functions. **Proceedings of 12th Annual Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education**, Vesprem, Hugary, 1988. p. 568-575.

TALL, D.; VINNER, S. **Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity.** Educational Studies in Mathematics, Dordrecht, 1981. Vol. 3, n. 12, p. 151-169.

TALL, D. **Concept Images, Generic Organizers, Computers, and Curriculum Change**. For the Learning of Mathematics, 1989. p.37-42.

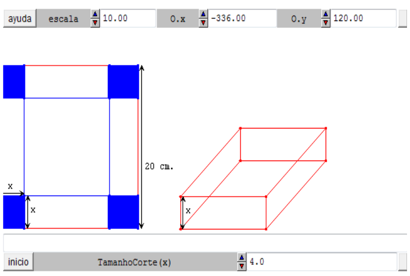
VILLARREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas**. 402f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

## 8. Anexos

Neste anexo podemos observar como se dá a utilização dos *mathlets* em um exemplo real. O roteiro didático abaixo está disponível na internet[13] e faz parte do *Projeto Novas Tecnologias no Ensino* – Santos, Kubrusly & Bianchini (2004). Ele refere-se ao problema conhecido “O Problema da Caixa”.

### 8.1 Modelando o problema da caixa (1)

*Imagine que cortamos um quadrado de lado x em cada canto de um pedaço de plástico para construir uma caixa sem a tampa superior. A cena abaixo simula a situação descrita. Você pode modificar o tamanho do corte (x) clicando nas setinhas do campo correspondente.*



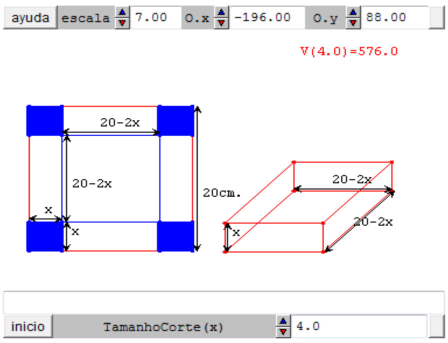

(a) Modifique o tamanho do corte e observe o que ocorre para distintos valores de x.
(b) Se o corte for grande, como será a forma da caixa resultante? O seu volume será grande ou pequeno?
(c) Se o corte for pequeno, como será a forma da caixa resultante? O seu volume será grande ou pequeno?
(d) Qual o maior comprimento possível para o corte? Qual o volume da caixa resultante neste caso?
(e) Qual o menor comprimento possível para o corte? Qual o volume da caixa resultante neste caso?
(f) Descreva as diversas situações possíveis com suas próprias palavras.
(g) Você é capaz de escrever uma sentença matemática que expresse cada uma das dimensões da caixa construída em função do tamanho x do corte efetuado?

### 8.2 Modelando o problema da ca

*A cena abaixo permite que você observe, em conjunto, a variação das dimensões da caixa construída e a variação das dimensões dos recortes feitos na folha de plástico. Clicando nas setinhas da caixa correspondente, varie o tamanho do recorte (x) e observe como estas dimensões dependem desse tamanho.*

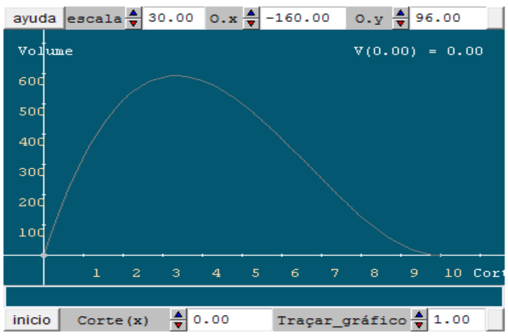
*(a) Entre que valores, pode variar o tamanho do corte?*
*(b) Para um corte de tamanho igual a 4 cm, quais as dimensões (comprimento e largura da base e altura) da caixa resultante? E para um corte de 7 cm? E para um corte de 3 cm? E para um corte de comprimento genérico igual a x cm?*
*(c) Você é capaz de encontrar uma expressão matemática que forneça o volume da caixa em função do corte x?*
*(d) Construa uma tabela de valores que relacione o tamanho do corte x com o volume V da caixa obtida.*
*(e) Para que valor de x você imagina que o volume da caixa seja máximo?*

[13] http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/pro



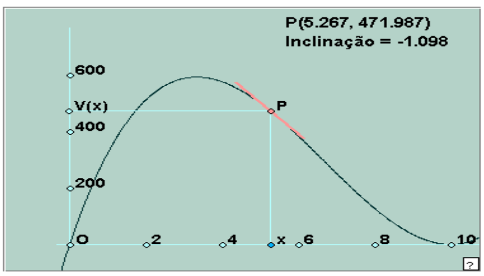

## 8.3 Modelando o problema da caixa (3)

*Podemos construir um gráfico para relacionar o tamanho do corte com o volume da caixa construída. Mostrar como é possível obter este gráfico é o objetivo desta atividade. Como já vimos, para cada valor do corte obtemos uma caixa com um determinado volume que sabemos calcular. No quadro abaixo, variando o valor do corte, pontos são marcados no sistema de coordenadas cartesianas fixado. Experimente! Qual o significado físico das coordenadas dos pontos marcados no quadro?*




*(a) Altere o valor do parâmetro Traçar_ gráfico de 0 para 1 e pressione o botão direto do mouse sobre o quadro. O que representa cada ponto do gráfico mostrado na tela?*
*(b) Modifique, novamente, o valor do corte e observe como varia o volume da caixa correspondente. Como é possível obter um gráfico a partir de uma tabela de valores?*
*(c) Descreva com suas palavras as características de crescimento e decaimento do gráfico obtido.*
*(d) Entre que valores varia o volume da caixa? Este gráfico tem um valor máximo? E um mínimo? Em caso afirmativo, tente determinar estes valores máximo e mínimo.*
*(e) Entre que valores de x, você acredita que o volume máximo ocorra? Você é capaz de determinar precisamente qual o tamanho do corte para que a caixa resultante tenha volume máximo?*

## 8.4 Retas Tangentes e Valores Extremos




*(a) Observe a animação.*
*(b) Agora, movimente o ponto x e observe como varia a inclinação da reta tangente ao gráfico da função.*
*(c) Conclua: Qual a inclinação da reta tangente a esta curva no seu ponto de máximo?*
*(d) Esta conclusão vale qualquer que seja os pontos de máximo ou de mínimo de uma curva?*
*(e) Qual o volume máximo da caixa? Quais as dimensões da caixa de volume máximo?*