PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM: ESTUDANTES DO CURSO DE GRADUAÇÃO EM PEDAGOGIA RESOLVENDO PROBLEMAS COMBINATÓRIOS

Juliana Azevedo
Universidade Federal de Pernambuco
azevedo.juliana1987@gmail.com

Adryanne Maria Rodrigues Barreto de Assis
Universidade Federal de Pernambuco
adryanne@gmail.com

Rute Elizabete de Souza Rosa Borba
Universidade Federal de Pernambuco
borba@talk21.com

Cristiane Azevedo dos Santos Pessoa
Universidade Federal de Pernambuco
cristianepessoa74@gmail.com

Resumo:
Neste estudo visou-se analisar se estudantes do Curso de Pedagogia reconhecem o *princípio fundamental da contagem (PFC)* como um tipo de representação simbólica para a resolução dos diferentes significados da Combinatória. Para isso foi aplicado um teste, com 20 estudantes, composto por oito situações-problema de múltipla escolha, com justificativa, relativas à Combinatória, com as alternativas indicando o PFC como um tipo de representação simbólica. Foram observados desempenhos fracos dos estudantes no teste, com o maior percentual de acertos nos problemas de *produto cartesiano*, tipo de problema no qual o *princípio fundamental da contagem* é tratado explicitamente no ensino. A maior dificuldade foi reconhecer que nos problemas de *combinação* é necessário dividir pelo número de permutações dos elementos. Torna-se necessário trabalhar em cursos de formação de professores de anos iniciais do Ensino Fundamental a explicitação de que multiplicações, como as indicadas no PFC, são base para a resolução de problemas combinatórios.

Palavras-chave: Combinatória; Princípio Fundamental da Contagem; Curso de Graduação em Pedagogia.

1. Introdução

Na Matemática, os diversos assuntos abordados podem ser trabalhados fazendo uso de diferentes tipos de representação e estratégias. Isso não é diferente com um conteúdo específico – a Combinatória.

Além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – enfatizam que “relativamente à combinatória, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolva combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem." (BRASIL, 1997. p. 36). Embora possa parecer voltada ao ensino de Matemática em anos escolares mais avançados, essa recomendação é referente ao ensino de Combinatória nos anos iniciais de escolarização.

Desse modo, tomando como base o fato de que os estudantes de Pedagogia poderão vir a ser futuros professores de anos iniciais do Ensino Fundamental, e terão que trabalhar com seus alunos problemas combinatórios que envolvam o *princípio fundamental da contagem* (PFC), este estudo visa analisar se os estudantes reconhecem este princípio como um tipo de representação simbólica para a resolução de diferentes significados da Combinatória. Ressalta-se que o PFC é base para a resolução das situações combinatórias trabalhadas na escolarização básica e pode ser um recurso que auxilia na construção das fórmulas utilizadas no aprendizado no Ensino Médio.

Como suporte teórico para a presente pesquisa, foi utilizada a Teoria dos Campos Conceituais na qual é destacada a definição de conceito por Vergnaud (1986).

Buscando investigar o reconhecimento do *princípio fundamental da contagem*, foi aplicado um teste com estudantes de um curso de Graduação em Pedagogia. O teste de múltipla escolha com solicitação de justificativas era composto por diferentes situações que dão significado ao conceito da Combinatória com seus diferentes invariantes objetivando verificar se esses graduandos reconheciam, na escolha das alternativas e por meio de suas justificativas, o *princípio fundamental da contagem* como um tipo de representação simbólica válida para a resolução dos diferentes problemas combinatórios.

2. A formação de professores e o *princípio fundamental da contagem*

Dentro do campo das estruturas multiplicativas (Verganud, 1991), encontramos a Combinatória, a qual segundo Pessoa e Borba (2010) permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, sem necessariamente ter que contá-los um a um. Entende-se, deste modo, o raciocínio combinatório como um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que ultrapassa a ideia de enumeração de elementos de um conjunto.

Apesar das indicações dos PCN (BRASIL, 1997) e pesquisas atuais, como de Pessoa e Borba (2009); Azevedo, Costa e Borba (2011); Borba e Azevedo (2012) apontarem a necessidade da Combinatória ser trabalhada desde os anos iniciais da escolaridade, de um modo geral, essa indicação ainda não é plenamente seguida no trabalho escolar. Diante desta realidade, pesquisas como de Rocha (2011) e Assis e Pessoa (2012), apontam para uma defasagem com relação ao conhecimento deste conteúdo por parte dos professores, o que nos remete a pensar que a falta de domínio da Combinatória pode ser um empecilho para seu ensino.

Vergnaud (1986), em sua Teoria dos Campos Conceituais, afirma que os conceitos estão articulados em campos por proximidade de relações que possuem – comuns ou correlatas. Pessoa e Borba (2009), com base nesta teoria, recomendam que variados problemas combinatórios sejam trabalhados desde os anos iniciais, uma vez que possuem propriedades em comum.

Vergnaud (1986) distingue três dimensões fundamentais de cada conceito: (1) o conjunto de situações que dão *significado* ao conceito (S); (2) as relações e propriedades *invariantes* (I) e (3) o conjunto das *representações simbólicas* utilizadas para a resolução do problema (R). Essas dimensões devem ser consideradas no aprendizado de qualquer conceito.

Pessoa e Borba (2009) sugerem que os problemas que envolvem raciocínio combinatório sejam organizados numa categorização única e não separados por níveis de ensino. Incluem-se, assim, como significados presentes nos problemas combinatórios: produtos cartesianos (explicitamente trabalhados no Ensino Fundamental), arranjos, permutações e combinações (estes três últimos trabalhados explicitamente no Ensino Médio). No Quadro 1 são apresentados os referidos significados e seus respectivos invariantes.

Quadro 1: Significados e invariantes da Combinatória

Produto Cartesiano: (1) dois (ou mais conjuntos) diferentes serão combinados para construir um novo grupo; (2) a ordem dos elementos escolhidos não formará um novo grupo.
Combinação: (1) de um conjunto maior serão selecionados objetos ou situações que constituirão os subconjuntos; (2) a ordem dos objetos escolhidos não gerará novas possibilidades.
Arranjo: (1) de um conjunto maior serão selecionados objetos ou situações que constituirão os subconjuntos; (2) a ordem e a escolha dos elementos geram novas possibilidades.
Permutação: (1) todos os elementos do conjunto dado são utilizados nos subgrupos gerados, cada um, apenas uma vez; (2) a ordem dos elementos do conjunto gera novas possibilidades.

Com relação aos diferentes tipos de representação simbólica, Borba (2010) enfatiza que estudantes de anos de escolaridade distintos utilizavam diversas vezes as mesmas estratégias de resolução: desenhos, listagens, quadros, árvores de possibilidade, multiplicações, *princípio fundamental da contagem*, observação de regularidades e fórmulas.

Pessoa e Borba (2009) observaram diferentes estratégias utilizadas na solução de problemas combinatórios. Como este é um conceito que deve ser trabalhado na escola desde os anos iniciais, é bom que os professores levem os alunos, ao longo dos anos de escolarização, a verificar que é possível resolver tais problemas a partir de diversas formas de procedimento. Em pesquisa anterior, Pessoa (2009) aponta ainda que todos os problemas de Combinatória podem ser resolvidos por meio do *princípio fundamental da contagem*, que é uma estratégia de cálculo que pode ser enunciada da seguinte forma:

> Quando um evento é composto por duas etapas sucessivas e independentes, de tal forma que as possibilidades da primeira etapa é *m e as* possibilidades da segunda etapa é *n, consideramos, então, que o número total de* possibilidades do evento ocorrer é dado pelo produto *m x n.* (NERY E JAKUBOVIC, 1986 apud PESSOA, 2009, p.116)

Este princípio também é válido para três ou mais etapas sucessivas. Assim, para cada significado combinatório pode haver problemas com duas, três, quatro ou mais etapas de escolha de elementos.

Borba (2010) também destaca que estimulando os alunos a pensarem sistematicamente e generalizando esses pensamentos será possível “o reconhecimento da natureza multiplicativa dos problemas de Combinatória, o que facilitará a compreensão de que, nas diversas situações combinatórias, o *Princípio Fundamental da Contagem é válido e que este princípio é base das fórmulas utilizadas na Análise Combinatória”* (p. 14).

Nesse sentido, foi proposto o estudo para verificar se estudantes de Pedagogia, enquanto futuros professores, reconhecem o *princípio fundamental da contagem* como uma representação válida no processo de construção do conhecimento da Combinatória.

3. Objetivos

Geral:

Analisar se estudantes do curso de Pedagogia reconhecem o *princípio fundamental da contagem* como um tipo de representação simbólica para a resolução dos diferentes significados da Combinatória.

Específicos:

- Analisar o desempenho de estudantes nos diferentes significados combinatórios.
- Observar a influência das etapas de escolha nos resultados obtidos nos diferentes significados combinatórios.
- Verificar as justificativas apresentadas pelos estudantes.

4. Método

A presente pesquisa foi realizada com 20 estudantes do curso de Graduação em Pedagogia, de variados períodos. Inicialmente, foi elaborado um teste de múltipla escolha (ver Apêndice), o qual continha oito situações-problema, sendo dois de cada significado combinatório (*produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação*). No teste, cada participante deveria indicar a alternativa correta e justificar sua escolha, sem precisar, necessariamente, ter que efetuar as operações de cálculo.

Das situações-problema elaboradas, quatro delas foram organizadas contendo quatro etapas de escolha e as outras quatro com cinco etapas de escolha. Pontes e Borba (2012) chamam a atenção para a importância de estudos que controlem variáveis que podem influenciar a compreensão dos problemas combinatórios, em particular, as etapas de escolha de elementos.

A análise foi realizada em duas fases. Na primeira foi realizada uma análise quantitativa, por meio do pacote estatístico SPSS - *Statistical Package for the Social Sciences*, verificando o desempenho dos estudantes por significado combinatório e o desempenho por etapas de escolha. Na segunda fase, foi realizada uma análise qualitativa, a partir do exame das justificativas apresentadas pelos estudantes.

5. Apresentação e Análise dos Resultados

5.1 Análise de desempenho dos estudantes por significado combinatório

Na Tabela 1 pode-se observar a média de acertos dos graduandos e verifica-se o melhor desempenho dos estudantes em situações de *produto cartesiano* e a diminuição das médias de acerto para os demais significados, com menor média para as situações de *combinação*. Vale salientar que a pontuação máxima por tipo de problema era de dois pontos, sendo, portanto, oito pontos a pontuação máxima total no teste.

Verificou-se, assim, um baixo índice de média no acerto total dos estudantes do Curso de Pedagogia (3,5 pontos dentre possíveis 8 pontos), revelando um conhecimento fraco sobre esse tipo de questão, uma vez que essa média equivale a apenas 43,75%, ou seja, menos da metade da pontuação total possível no teste. Estes resultados atestam que os estudantes não reconheceram, de modo geral, quais multiplicações (como os produtos indicados pelo *princípio fundamental da contagem*) resolveriam corretamente as situações combinatórias apresentadas.

Tabela 1: Média de acerto dos graduandos, por significado (num total de dois pontos por cada) e média de acerto total (num total de oito pontos).

Significado	Média de acerto
Produto Cartesiano	1,45
Permutação	0,95
Arranjo	0,75
Combinação	0,35
Total	3,50

Na Tabela 2 pode-se verificar que 65% dos estudantes acertaram ambas as situações de *produto cartesiano*, revelando que este tipo de problema foi de mais fácil resolução para os estudantes da presente pesquisa. Destaca-se, ainda, que apenas 20% dos graduandos erraram ambas as situações de *produto cartesiano*. Resultados semelhantes foram encontrados por Pessoa e Borba (2009) e Azevedo, Costa e Borba (2010), quando foi investigada a resolução de problemas combinatórios por crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para os alunos de anos iniciais este foi o tipo de problema de mais fácil resolução e para os graduandos em Pedagogia, foi a situação combinatória na qual foi mais facilmente reconhecida a aplicação do *principio fundamental da contagem*.

Tabela 2: Percentual de acerto dos estudantes por tipo de problema

Significado	Acerto Total*	Acerto Parcial**	Erro***
Produto Cartesiano	65%	15%	20%
Permutação	40%	15%	45%
Arranjo	30%	15%	55%
Combinação	15%	5%	80%

*Acerto Total: acerta os dois problemas do mesmo tipo; **Acerto Parcial: acerta apenas um problema de um mesmo tipo; ***Erro: erram os dois problemas de um mesmo tipo.

O panorama é inverso quando se analisa os percentuais de acerto dos problemas de *combinação*, em que apenas 15% dos alunos acertaram ambas as situações e 80% erraram as duas situações deste significado. Pessoa (2009) enfatiza que, em todos os níveis da escolaridade básica pesquisados em sua tese de doutorado, os problemas de *combinação* indicaram percentuais de desempenho bastante baixos. Semelhantemente, este foi o tipo de problema no qual o reconhecimento da presença do *princípio fundamental da contagem* foi mais fraco entre os graduandos de Pedagogia.

Acredita-se que a maior facilidade nas resoluções de *produto cartesiano* se deve ao fato de que o *princípio fundamental da contagem* é tratado de forma mais explícita nesse significado durante os anos iniciais. Já os outros tipos de problemas combinatórios não são explicitamente tratados nos anos iniciais, embora se façam presentes nos livros didáticos deste nível de ensino (Barreto, Amaral e Borba, 2007) e isso pode explicar a pouca familiaridade dos graduandos com esses problemas e o menor reconhecimento das multiplicações presentes em *arranjos e permutações*. Além disso, a maior dificuldade nas situações de *combinação* pode estar ligada à necessidade de, após o uso do *princípio fundamental da contagem*, dividir o resultado em função do número de casos repetidos, ou seja, pela permutação do número de elementos que deverá ser formado o subconjunto, uma vez que, na *combinação*, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades e subconjuntos com os mesmos elementos não constituem possibilidades distintas.

Para confirmar o indicativo de maior facilidade nas situações de *produto cartesiano* e a maior dificuldade nas situações de *combinação* foi feita uma análise estatística por meio da prova *t-teste de amostras em pares*[1].

Observou-se que os problemas de *produto cartesiano* apresentaram diferenças significativas quando comparados com os problemas de *arranjo* – t(19) = 2,666; p=0,015 – e *combinação* – t(19) = 4,395; p= 0,0001 – mas não apresentou diferenças significativas na comparação com os problemas de *permutação* – t(19) = 1,876; p= 0,076.

Observou-se, ainda, que os problemas de *combinação* foram os mais difíceis, apresentando diferenças significativas com todos os demais tipos de problemas (*combinação* x *produto cartesiano* – t(19) = 4,395; p= 0,0001; *combinação* x *arranjo* – t(19) = 2,629; p= 0,017; *combinação* x *permutação* – t(19) = 2,349; p= 0,030).

5.2 Análise da influência das etapas de escolha no desempenho

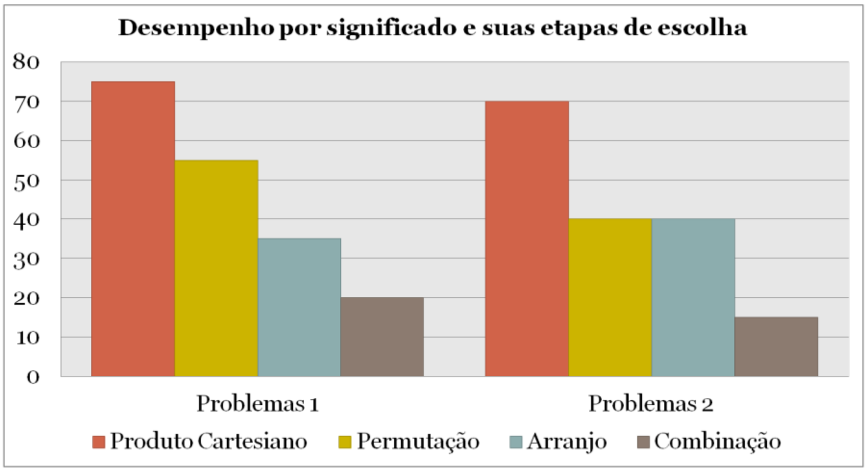
Além da análise quantitativa do desempenho dos estudantes por tipo de problema, foi avaliada também a possível influência das etapas de escolha no desempenho dos graduandos nos diferentes significados da Combinatória. Como a primeira situação apresentada em cada tipo de problema envolvia quatro etapas de escolha e a segunda situação envolvia cinco etapas de escolha, foi realizada a comparação do primeiro problema com o segundo problema de cada significado combinatório.

Pode-se observar no Gráfico 1 que o percentual de desempenho dos alunos foi similar quando comparadas as duas situações de cada significado entre si. Essa similaridade de percentual reflete-se nos resultados da análise estatística *t-teste de amostras em pares*. Foi observado que não há diferenças significativas entre os problemas

[1] Nesta pesquisa foi considerado índice de significância p< 0,05

com quatro ou com cinco etapas de escolha (PC1 x PC2: t (19) = 0,567; p = 0,577; A1 x A2: t (19) = -0,567; p = 0,577; C1 x C2: t (19) = 1,000; p = 0,330; P1 x P2: t (19) = -1,831; p = 0,083).

Gráfico 1: Percentual de desempenho por etapas de escolha e significado.



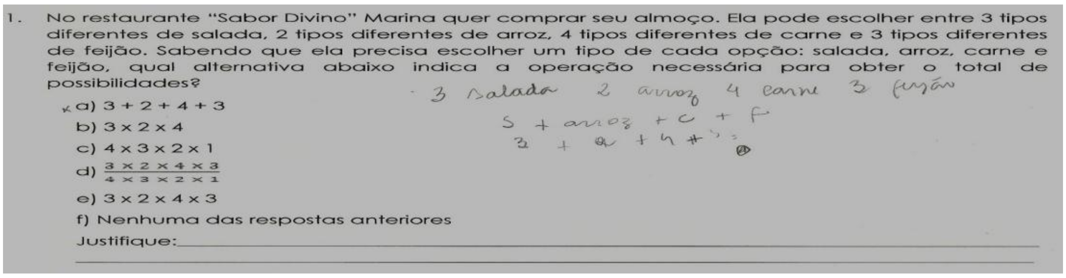
Problemas 1: quatro etapas de escolha; Problemas 2: cinco etapas de escolha

Verificou-se, assim, que para os estudantes de Pedagogia pesquisados, a dificuldade não era aumentada com o aumento de número de etapas de escolha de elementos. O reconhecimento de quais operações resolviam os problemas era o mesmo, independente do número de etapas de escolha. Esse resultado é diferente do apresentado por Pontes e Borba (2012) que, num teste de sondagem com questões abertas em que foi controlado o número de etapas de escolhas (três e quatro etapas) aplicado com crianças de 5º ano do Ensino Fundamental. As autoras enfatizam que "responder problemas do tipo permutação com três etapas de escolha é significativamente mais fácil que responder problemas de quatro etapas para esse grupo de alunos do Ensino Fundamental" (p. 11). Entretanto, nos demais tipos de problemas as autoras supracitadas não encontram diferenças significativas. Ressalta-se que no presente estudo era necessário apenas indicar as operações a serem realizadas e no estudo de Pontes e Borba era necessária a indicação do número total de possibilidades, seja por cálculo formal ou outro procedimento informal.

5.3 Análise das justificativas apresentadas pelos alunos

Posteriormente à análise quantitativa, foi realizada a análise qualitativa, buscando verificar se nas justificativas dos estudantes havia indícios do reconhecimento do *princípio fundamental da contagem* como um tipo de representação simbólica possível de ser aplicado para a resolução dos diferentes significados da Combinatória.

Nesse sentido, foram identificadas justificativas que não relacionavam a situação dada com um pensamento combinatório, principalmente, quando os estudantes justificavam que a situação deveria ser resolvida por meio de uma adição inadequada (ver Figura 1). Semelhantemente ao observado com os graduandos do presente estudo, Pessoa e Borba (2009) também observaram procedimentos de adição (ou subtração) nos quais crianças utilizavam procedimentos aditivos incorretos em problemas combinatórios (como adicionar os números citados no enunciado).

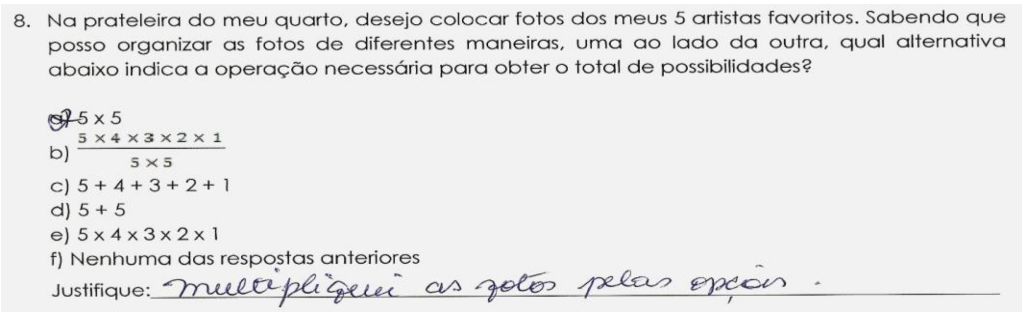

1. No restaurante "Sabor Divino" Marina quer comprar seu almoço. Ela pode escolher entre 3 tipos diferentes de salada, 2 tipos diferentes de arroz, 4 tipos diferentes de carne e 3 tipos diferentes de feijão. Sabendo que ela precisa escolher um tipo de cada opção: salada, arroz, carne e feijão, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

x a) 3 + 2 + 4 + 3
b) 3 x 2 x 4
c) 4 x 3 x 2 x 1
d) $\frac{3 \times 2 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$
e) 3 x 2 x 4 x 3
f) Nenhuma das respostas anteriores
Justifique:

3 salada 2 arroz 4 carne 3 feijão
S + arroz + C + F
3 + 2 + 4 +

Figura 1: Exemplo de justificativa inadequada do Estudante 18 para a primeira situação de *produto cartesiano*

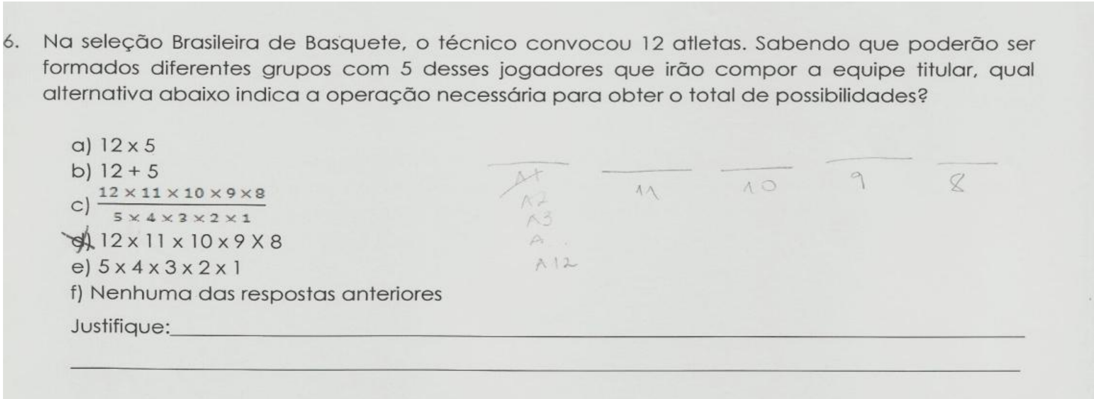
Outro tipo de representação que, apesar do estudante reconhecer que a resolução está relacionada a um produto (multiplicação), não é bem sucedida para a resposta da situação proposta é o uso da multiplicação inadequada. Esse tipo de representação é recorrente nas situações combinatórias, com exceção do significado *produto cartesiano* que é resolvido pela multiplicação direta dos números presentes no enunciado da situação. O uso da multiplicação inadequada também é citada em estudos anteriores, como, por exemplo, o de Pessoa e Borba (2009). Exemplo dessa justificativa pode ser visto na Figura 2.


8. Na prateleira do meu quarto, desejo colocar fotos dos meus 5 artistas favoritos. Sabendo que posso organizar as fotos de diferentes maneiras, uma ao lado da outra, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 5 x 5
b) $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 5}$
c) 5 + 4 + 3 + 2 + 1
d) 5 + 5
e) 5 x 4 x 3 x 2 x 1
f) Nenhuma das respostas anteriores
Justifique: multipliquei as fotos pelas opções.

Figura 2: Exemplo de justificativa inadequada do Estudante 08 para a segunda situação de *permutação*

Como justificativa mal sucedida também foi observado o uso inadequado do *princípio fundamental da contagem*. Na situação da Figura 3 o estudante utiliza o *princípio fundamental da contagem* para resolver uma situação de *combinação*, entretanto ele não percebe que, para esta situação específica, ainda seria necessário dividir o número de possibilidades pelos casos repetidos.

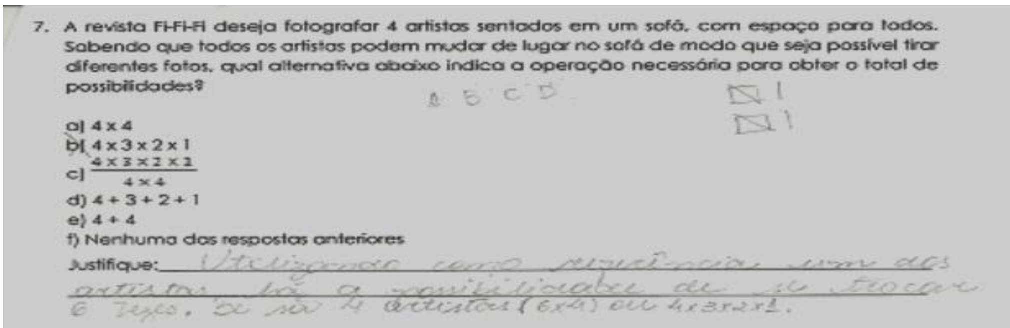

6. Na seleção Brasileira de Basquete, o técnico convocou 12 atletas. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 5 desses jogadores que irão compor a equipe titular, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 12 x 5
b) 12 + 5
c) $\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$
d) 12 x 11 x 10 x 9 X 8
e) 5 x 4 x 3 x 2 x 1
f) Nenhuma das respostas anteriores
Justifique:

A1 A2 A3 A A12   11   10   9   8

Figura 3: Exemplo de justificativa inadequada do Estudante 11 para a segunda situação de *combinação*

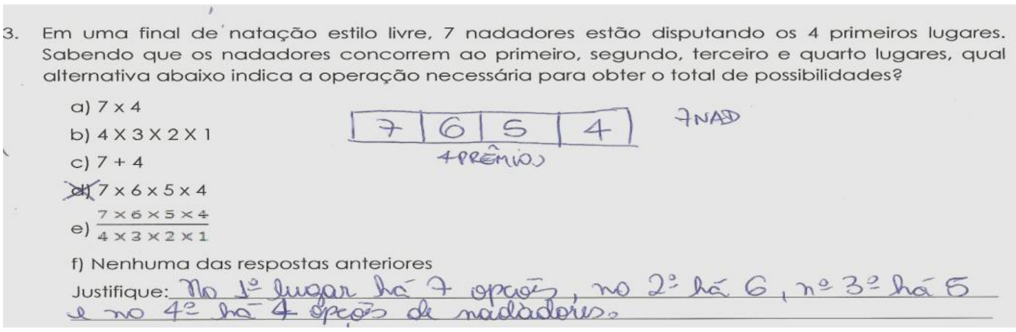
Os estudantes que participaram da pesquisa, quando acertaram os problemas, ao justificar sua resposta o fizeram por meio do *princípio fundamental da contagem*, como é possível ver nas Figuras 4 e 5. Nesses dois exemplos os estudantes marcam a resposta e explicam a utilização do *princípio fundamental da contagem* com as suas palavras. Ressalta-se que nas suas justificativas os estudantes demonstraram compreender os princípios invariantes das situações combinatórias sendo tratadas.


7. A revista Fi-Fi-Fi deseja fotografar 4 artistas sentados em um sofá, com espaço para todos. Sabendo que todos os artistas podem mudar de lugar no sofá de modo que seja possível tirar diferentes fotos, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

A B C D

a) 4 x 4
b) 4 x 3 x 2 x 1
c) $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 4}$
d) 4 + 3 + 2 + 1
e) 4 + 4
f) Nenhuma das respostas anteriores
Justifique: Utilizando como sequência um dos artistas, há a possibilidade de se trocar 6 vezes. Se são 4 artistas (6x4) ou 4x3x2x1.

Figura 4: Exemplo de justificativa bem sucedida do Estudante 01 para a primeira situação de *permutação*


3. Em uma final de natação estilo livre, 7 nadadores estão disputando os 4 primeiros lugares. Sabendo que os nadadores concorrem ao primeiro, segundo, terceiro e quarto lugares, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 7 x 4
b) 4 X 3 X 2 X 1
c) 7 + 4
d) 7 x 6 x 5 x 4
e) $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$
f) Nenhuma das respostas anteriores
Justifique: No 1º lugar há 7 opções, no 2º há 6, nº 3º há 5 e no 4º há 4 opções de nadadores.

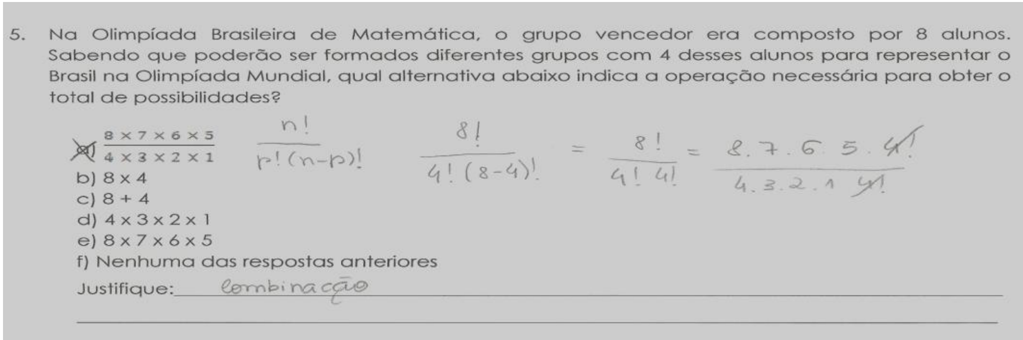
7	6	5	4

7NAD
4PRÊMIOS

Figura 5: Exemplo de justificativa bem sucedida do Estudante 09 para a primeira situação de *arranjo*

Para a resolução dos problemas de *combinação*, foi observado que os alunos tinham dificuldade para justificar a resposta; quando o faziam, se utilizavam dos invariantes de outros tipos de problemas, normalmente, realizando uma multiplicação inadequada.

Apenas um aluno respondeu as situações fazendo uso da fórmula. Esse exemplo pode ser visto na Figura 6.



5. Na Olimpíada Brasileira de Matemática, o grupo vencedor era composto por 8 alunos. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 4 desses alunos para representar o Brasil na Olimpíada Mundial, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ $\quad \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{8.7.6.5.\cancel{4!}}{4.3.2.1\,\cancel{4!}}$

b) 8 x 4

c) 8 + 4

d) 4 x 3 x 2 x 1

e) 8 x 7 x 6 x 5

f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: combinação

Figura 6: Exemplo de justificativa bem sucedida do Estudante 12 para a primeira situação de *produto cartesiano*

Pode-se considerar que os estudantes analisados nesta pesquisa apresentaram dificuldades para justificar suas respostas, sendo considerado, por vezes, os cálculos realizados no decorrer dos testes como justificativas para as situações.

Muitos alunos apresentaram dificuldades em justificar adequadamente as suas escolhas, apesar de alguns estudantes terem dado clara evidência da compreensão das relações e propriedades – os invariantes – dos distintos significados combinatórios. Dessa forma, a análise qualitativa realizada reforça os dados quantitativos, ou seja, os graduandos, de modo geral, apresentaram um desempenho fraco, pois muitas vezes escolheram alternativas incorretas e também apresentaram dificuldade em justificar adequadamente as suas escolhas.

6. Considerações Finais

Objetivou-se, no presente estudo, analisar se estudantes do curso de Pedagogia reconhecem o *princípio fundamental da contagem* como um tipo de representação simbólica para a resolução dos diferentes significados da Combinatória. A partir de análises realizadas com o pacote estatístico SPSS, verificou-se que os estudantes obtiveram uma média regular de desempenho no teste: 3,5, considerando que a média geral é 8,0. Assim, parece que os graduandos não dominam de modo satisfatório como procedimentos multiplicativos, em particular o *princípio fundamental da contagem*, são recursos eficientes para a solução de problemas combinatórios.

Os resultados apontam ainda que houve uma maior quantidade de acertos nos problemas de *produto cartesiano*, e isso se deve, possivelmente, pelo fato de nesse tipo de problema ser mais explicitamente tratado o *princípio fundamental da contagem*. Acredita-se, ainda, que a maior dificuldade nos problemas de *combinação* seja devido à necessidade de, além de aplicar o *PFC*, ter que dividir o resultado pelo número de permutações dos elementos que formam as possibilidades.

Esses resultados seguem a mesma direção de estudos realizados com alunos, como Pessoa e Borba (2009), que indicam maior facilidade dos alunos com problemas de *produto cartesiano* e maior dificuldade com *combinações*. Se estes professores em formação não tiverem oportunidade de uma melhor compreensão das possíveis soluções das variadas situações combinatórias, poderão continuar a perpetuar as dificuldades evidenciadas pelos anos do Ensino Fundamental.

Em análises também realizadas com auxílio do pacote estatístico SPSS, foi visto que não houve diferenças significativas entre os problemas com quatro e cinco etapas de escolha, indicando que o não reconhecimento do *princípio fundamental da contagem* pelos graduandos foi independente do número de etapas de escolha. Pontes e Borba (2012), em estudo com alunos de anos iniciais, encontraram diferença significativa em problemas de *permutação* que envolviam três e quatro etapas de escolha e esse resultado aponta para a necessidade de professores – em formação e em exercício – terem conhecimento que esta variável pode ter influência no desempenho em problemas combinatórios.

Pessoa (2009) ressalta que problemas combinatórios, com grandeza numérica alta, requerem um procedimento mais formalizado, já que dificilmente se obtém êxito utilizando uma estratégia menos formal, pela dificuldade de enumerar todos os elementos. Assim, é necessário formar professores que compreendam que há uma diversidade de procedimentos de resolução de problemas que envolvam o raciocínio combinatório, dentre eles, o *princípio fundamental da contagem*, mais indicado para a resolução de problemas com maior número de possibilidades.

Em estudo de intervenção de Borba e Azevedo (2012) e Azevedo e Borba (2012), foi encontrado baixo desempenho entre alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental no pré-teste realizado sobre problemas combinatórios, o que leva a pensar que tal resultado pode continuar a se repetir caso os atuais estudantes de Graduação em Pedagogia que ensinarão Matemática chegarem com essas dificuldades em sala de aula.

Sendo assim, se faz importante desenvolver estratégias para o avanço destes futuros professores em formação inicial, assim como para os professores já atuantes em sala de aula, por meio de formações continuadas, para que o processo de ensino e de aprendizagem da Combinatória seja cada vez mais significativo.

Referências

ASSIS, Adryanne; PESSOA, Cristiane. Formação continuada nos anos iniciais do Ensino Fundamental: a compreensão da Combinatória a partir dos significados, invariantes e representações. **Anais...** XVI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – EBRAPEM, Canoas, Brasil. 2012.

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute. O Ensino da Combinatória por meio da Construção de Árvores de Possibilidades com e sem o uso do software Diagramas de Árbol. **Anais...** XVI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – EBRAPEM, Canoas, Brasil. 2012.

AZEVEDO, J.; COSTA, D.; BORBA, R. O impacto do software Árbol no raciocínio combinatório. **Anais**... XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM/IACME, Recife, Brasil. 2011

BARRETO, Fernanda; AMARAL, Fábio; BORBA, Rute. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de séries iniciais. **Caderno de Trabalhos de Conclusão de Curso de Pedagogia** — UFPE, Recife, v. 2, p. 1-21, 2007.

BORBA, Rute. *O Raciocínio Combinatório na Educação Básica.* In: **Anais**... 10º Encontro Nacional de Educação Matemática (10º ENEM). Bahia, 2010.

BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana. A construção de árvores de possibilidades com recurso tecnológico: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de Karine e Vitória. In: SPINILLO, A; LAUTERT, S. **A Pesquisa em Psicologia e suas Implicações para a Educação Matemática.** Recife: Editora Universitária, 2012.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. 1ª a 4ª série. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

PESSOA, C. **Quem dança com quem:** o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. (Tese Doutorado)- Programa de Pós-Graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. **Quem Dança com Quem**: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. Zetetiké – Cempem – FE – Unicamp – v.17, n.31 – jan./jun. – 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O Raciocínio Combinatório do início do Ensino Fundamental ao término do Ensino Médio**. Anais...** 10º Encontro Nacional de Educação Matemática (X ENEM). Salvador, 2010.

PONTES, Danielle; BORBA, Rute. A Influência das Etapas de Escolha e das Representações Simbólicas na Resolução de Problemas Combinatórios por Estudantes do 5º Ano do Ensino Fundamental. **Anais...** XVI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – EBRAPEM, Canoas, Brasil. 2012.

ROCHA, Cristiane de Arimatéia. Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos. Dissertação. Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife: UFPE, 2011.

VERGNAUD, Gérard. (1986). **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas.** Análise Psicológica, 1. 1986.

VERGNAUD, Gérard. **El niño, las matemáticas y la realidad - Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria**. Mexico: Trillas, 1991.

APÊNDICE Teste aplicado

NOME: ____

CURSO/PERÍODO: ___________________________ IDADE: _____________________

Para todos os problemas abaixo marque a alternativa que resolve corretamente a questão e justifique a sua escolha. Não é necessário realizar as operações.

1. No restaurante “Sabor Divino” Marina quer comprar seu almoço. Ela pode escolher entre 3 tipos diferentes de **salada**, 2 tipos diferentes de **arroz**, 4 tipos diferentes de **carne** e 3 tipos diferentes de **feijão**. Sabendo que ela precisa escolher um tipo de cada opção: salada, arroz, carne e feijão, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

   a) 3 + 2 + 4 + 3   b) 3 x 2 x 4   c) 4 x 3 x 2 x 1   d) $\frac{3\times2\times4\times3}{4\times3\times2\times1}$

   e) 3 x 2 x 4 x 3   f) Nenhuma das respostas anteriores

   Justifique:____

2. Na Lanchonete “Que Delicia” José quer comprar um sanduíche. Ele pode escolher entre 4 tipos diferentes de **pão**, 3 tipos diferentes de **carne**, 5 tipos diferentes de **queijo**, 2 tipos diferentes de **molho** e 3 tipos diferentes de **salada**. Sabendo que ele precisa escolher um tipo de cada opção: pão, carne, queijo, molho e salada, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

   a) 5 x 4 x 3 x 2 x 1   b) $\frac{4\times3\times5\times2\times3}{5\times4\times3\times2\times1}$ c) 4 x 3 x 5 x 2 x 3

   d) 4 + 3 + 5 + 2 + 3   e) 4 x 3 x 5 x 2   f) Nenhuma das respostas anteriores

   Justifique:____

3. Em uma final de natação estilo livre, 7 nadadores estão disputando os **4 primeiros lugares**. Sabendo que os nadadores concorrem ao primeiro, segundo, terceiro e quarto lugares, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de

possibilidades?

a) 7 x 4 b) 4 X 3 X 2 X 1 c) 7 + 4 d) 7 x 6 x 5 x 4

e) $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique:____

4. Em uma corrida de carros, 7 participantes estão disputando os **5 primeiros lugares** do pódio. Sabendo que os participantes concorrem ao primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto lugares, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 7 + 5 b) 7 x 6 x 5 x 4 x 3 c) $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ d) 7 x 5

e) 5 x 4 x 3 x 2 x 1 f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique:____

5. Na Olimpíada Brasileira de Matemática, o grupo vencedor era composto por 8 alunos. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com **4 desses alunos** para representar o Brasil na Olimpíada Mundial, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ b) 8 x 4 c) 8 + 4 d) 4 x 3 x 2 x 1

e) 8 x 7 x 6 x 5 f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique:____

6. Na seleção Brasileira de Basquete, o técnico convocou 12 atletas. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com **5 desses jogadores** que irão compor a equipe titular, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 12 x 5 b) 12 + 5 c) $\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ d) 12 x 11 x 10 x 9 X 8

e) 5 x 4 x 3 x 2 x 1 f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique:____

7. A revista Fi-Fi-Fi deseja fotografar **4 artistas** sentados em um sofá, com espaço para todos. Sabendo que todos os artistas podem mudar de lugar no sofá de modo que seja possível tirar diferentes fotos, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 4 x 4 b) 4 x 3 x 2 x 1 c) $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 4}$ d) 4 + 3 + 2 + 1

e) 4 + 4 f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique:____

8. Na prateleira do meu quarto, desejo colocar fotos dos meus **5 artistas** favoritos. Sabendo que posso organizar as fotos de diferentes maneiras, uma ao lado da outra, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 5 x 5 b) $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 5}$ c) 5 + 4 + 3 + 2 + 1 d) 5 + 5

e) 5 x 4 x 3 x 2 x 1 f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique:____