

A INFLUÊNCIA DE INTERVENÇÕES COM ÁRVORES DE POSSIBILIDADES NA UTILIZAÇÃO DE DIVERSIFICADAS REPRESENTAÇÕES SIMBÓLICAS: UM CAMINHO PARA O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO¹

Juliana Azevedo

Universidade Federal de Pernambuco

azevedo.juliana1987@gmail.com

Resumo

Esta pesquisa visa analisar a influência da construção de *árvores de possibilidades*, virtuais e escritas, e o uso de eficientes representações simbólicas na resolução de problemas combinatórios. Participaram 40 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental que formaram dois grupos experimentais e dois grupos controle. Foi realizado um pré-teste, seguido de distintas formas de intervenção e pós-testes (imediate e posterior). Os alunos que construíram árvores de possibilidade, com e sem uso do *software Diagramas de Árbol*, avançaram em seus raciocínios combinatórios, mas o grupo de *lápiz e papel* teve um avanço maior. A pesquisa revelou que os grupos com intervenção em Combinatória demonstraram avanços qualitativos, evidenciando o uso mais eficiente de representações simbólicas nos pós-testes. Conclui-se que se aprendeu a pensar nas situações e não em um método para resolver os problemas. Assim, o trabalho realizado nesta pesquisa se configura em um excelente caminho para a aprendizagem em Combinatória.

Palavras Chave: Combinatória; Árvores de Possibilidades; Software Diagramas de Árbol; Lápiz e Papel; Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

1. O uso da árvore de possibilidades virtuais ou escritas para o início do aprendizado em Combinatória

A presente pesquisa se apoia no estudo da Combinatória, enfatizando que o trabalho com situações que envolvam esse pensamento, desde os anos iniciais de escolarização, pode ser útil para que seja desenvolvido no aluno o raciocínio hipotético-dedutivo. Flavell (1988, p.210) afirma que o raciocínio hipotético-dedutivo é, fundamentalmente, “Uma estratégia cognitiva que tenta determinar a realidade no contexto das possibilidades”.

¹ Trabalho orientado pela Professora Doutora Rute Borba – Universidade Federal de Pernambuco.

Desse modo, o aprendizado da Combinatória pode auxiliar o aluno a desenvolver a capacidade de raciocinar logicamente, diferenciando o real do possível. Isso porque na Combinatória há uma rica variedade de situações – que envolvem diversos contextos e variadas propriedades e relações que podem ser representadas e trabalhadas com auxílio de diferentes simbologias – que podem levar o aluno a pensar em formas diversas de resolução de problemas, na essência do que seja um problema matemático (BORBA, 2010).

A construção de conhecimentos matemáticos, em particular o desenvolvimento do raciocínio combinatório, pode acontecer com o auxílio de diferentes recursos, como a resolução de problemas, o uso das tecnologias da informação, dentre outros como é destacado pelos PCN (BRASIL, 1997). Assim, a tecnologia está sendo cada vez mais utilizada no âmbito educativo. Como destaca Borba e Penteado (2010, p.13) “[...] sempre há uma dada mídia envolvida na produção de conhecimento”.

O lápis e papel atuam como uma tecnologia utilizada de forma predominante em sala de aula, entretanto, percebe-se que as tecnologias informáticas estão cada vez mais inseridas no contexto escolar. Nesse contexto, Borba e Penteado (2010, p.12) destacam que há muitas discussões sobre o uso de tecnologias informáticas em sala de aula, principalmente em torno da real aprendizagem dos alunos que a utilizam. Os autores supracitados evidenciam que há argumentos contrários à sua utilização enfatizando que educadores indagam “Se um estudante do Ensino Médio aperta uma tecla do computador e o gráfico da função já aparece, como ele conseguirá ‘de fato’, aprender a traçá-lo?”. Em contrapartida a esse argumento, os autores perguntam: “Será que o aluno deveria evitar o uso intensivo de lápis e papel para que não fique dependente dessas mídias?”. Sendo assim, alguns professores atualmente vêm sendo capacitados, na formação inicial e em formações continuadas, a trabalhar fazendo uso de diversas tecnologias, incluindo as tecnologias informáticas, principalmente por meio do uso do computador.

Desse modo, o uso de computador também pode facilitar e dar subsídios para a resolução de problemas propostos, possibilitando, assim, o desenvolvimento conceitual. Isto porque o aprendizado por computador tem grande potencial, é um recurso presente no cotidiano e, como afirmam Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009, p.1), “[...] a tecnologia faz parte da vida do aluno, é um bem social e não pode, nem deve ser negada”. O trabalho com as tecnologias também inclui a importância da representação simbólica utilizada. Dentre as representações simbólicas para o ensino de Combinatória, tem-se a construção de *árvores de*

possibilidades. Por meio desta representação simbólica os alunos podem observar padrões, sistematizar as possibilidades e generalizar os resultados.

Assim, o presente estudo aborda a resolução de problemas combinatórios por meio de árvores de possibilidades, com uso de *lápiz e papel* ou com utilização de um *software* como recursos facilitadores da aprendizagem. Acredita-se que essa representação simbólica possibilita que se entendam diferentes relações combinatórias, sendo possível, assim, trabalhar os variados tipos de problemas combinatórios, observando as semelhanças e diferenças entre eles.

A presente pesquisa se fundamentou na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986), que defende a existência de três dimensões fundamentais de conceitos: significados, invariantes e representações simbólicas. Vergnaud (1996, p.184) também ressalta o papel das representações simbólicas no aprendizado de conceitos. Este autor afirma que “[...] as representações simbólicas têm justamente a vantagem de dar uma ajuda à resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão exige várias etapas”. Dessa forma, espera-se também que a resolução de situações combinatórias por meio de *árvores de possibilidades* influencie diretamente no sucesso de seu aprendizado, uma vez que, Fischbein (1975), citado por Borba (2010, p.4), enfatiza que o uso dessa estratégia de resolução pode permitir avanços no desenvolvimento do raciocínio combinatório ao apontar as etapas de escolha necessárias.

Fischbein, Pampu e Minzat (1970), citados por Pessoa e Borba (2010b), observaram o efeito de instruções específicas, com o uso do diagrama de *árvore de possibilidades*, com crianças de 10 anos e observaram que, desse modo, elas são capazes de aprender ideias combinatórias. Ressalta-se, ainda, que a instrução escolar é fundamental para o desenvolvimento deste raciocínio, uma vez que o uso da *árvore de possibilidades* possibilitou avanços na medida em que os alunos apresentaram maior sistematização na resolução de problemas combinatórios.

Pessoa e Borba (2010a), em estudo de sondagem com alunos de 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, afirmam que, entre os alunos dos anos iniciais de escolarização, a *árvore de possibilidades* é a representação menos utilizada. As autoras destacam que as *listagens*, a *multiplicação* e a *adição de parcelas repetidas*, por exemplo, são mais usadas. Apesar do pouco uso da *árvore de possibilidades* por crianças em início de escolarização, as autoras enfatizam que esta representação é um bom caminho para que

a Combinatória seja trabalhada na escola, uma vez que se configura numa representação que, quando utilizada por alunos, resultam em resoluções corretas.

A partir do estudo de Sandoval, Trigueiros e Lozano (2007), foi possível localizar o *software Diagramas de Árbol* (AGUIRRE, 2005), produzido pela Secretaría de Educación Pública de México. Este *software* foi analisado por Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009) e utilizado por Ferraz, Borba e Azevedo (2010), Azevedo, Costa e Borba (2011) e Borba e Azevedo (2012) em estudos com finalidade de investigar o aprendizado da Combinatória por meio deste recurso². Em função destes estudos, destaca-se que este *software*, através do diagrama de *árvore de possibilidades*, favorece a aplicação com crianças de nível inicial de escolarização, pois fornece todos os casos possíveis, sejam eles válidos ou não, em todos os tipos de problemas (*produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação*), sem objetivar o uso precoce de fórmulas.

Portanto, este trabalho visa analisar, à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, a influência da construção de árvores de possibilidades, virtuais e escritas, na resolução de problemas combinatórios por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental e observar a utilização de diversificadas representações simbólicas e estratégias antes e após um processo de intervenção.

2. Método

Participaram da pesquisa 40 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental de duas escolas da rede pública municipal do Recife, divididos em quatro grupos. Os alunos participaram de um pré-teste, de distintas formas de intervenção e de pós-testes (imediate e posterior). O Grupo 1 (G1), constituído por 10 alunos, construiu, em duplas, *árvores de possibilidades* fazendo uso do *software Diagramas de Árbol*; o Grupo 2 (G2), também com 10 alunos, em duplas, construiu *árvores de possibilidades* fazendo uso do *lápiz e papel*; No Grupo 3 (G3), os 10 alunos, em duplas, formaram o Grupo Controle Assistido que trabalhou com problemas multiplicativos não combinatórios, por meio de *desenhos*; e o Grupo 4 (G4), constituído pelos demais alunos (10) formou o Grupo Controle Desassistido, que participou apenas do pré-teste e dos pós-testes.

O pré-teste e os pós-testes constaram de oito situações problemas, sendo dois de cada tipo (*produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação*). A lista de problemas

² O *software Diagramas de Árbol* não se trata de um *software livre*, este foi concedido pelas autoras do estudo mexicano no qual foi analisado o referido *software* (SANDOVAL; TRIGUEIROS; LOZANO, 2007) para uso pelo Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório (Geração).

de estruturas multiplicativas, não combinatórios, utilizada durante a intervenção do Grupo 3, também continha oito situações, baseadas na classificação de Nunes e Bryant (1997), sendo portanto, duas situações de cada tipo de problema (*Multiplicação, relação entre variáveis – co-variação, problema inverso da multiplicação e distribuição*).

As intervenções com os grupos experimentais foram realizadas, à luz da teoria de Vergnaud, utilizando situações combinatórias, da lista de problemas do pré-teste, seus significados, seus invariantes, e uma representação simbólica específica para o ensino e aprendizagem da Combinatória – *a árvore e possibilidades* – escritas ou virtuais.

Foram realizadas análises qualitativas acompanhadas de análises quantitativas, por meio do uso do SPSS - *Statistical Package for the Social Sciences*, buscando possíveis explicações para melhores desempenhos de certos grupos e em alguns tipos de problemas. Acredita-se, dessa forma, que análises quantitativas direcionaram o olhar para os destaques em desempenhos e as análises qualitativas auxiliaram na busca de explicações para as diferenças de desempenho observadas.

3. Resultados: Discussão e Análise

3.1 Acertos em problemas combinatórios no pré-teste e nos pós-testes imediato posterior

Na Tabela 1 observa-se o desempenho médio por grupo nas distintas etapas do estudo. É possível perceber que os alunos dos grupos com intervenção específica em Combinatória (G1 e G2) avançaram em seus conhecimentos sobre este conteúdo. Além disso, percebe-se que houve um aumento nas médias de acerto também na comparação com o pós-teste imediato. Vale salientar que não houve entre o pós-teste imediato e o pós-teste posterior intervenções em Combinatória – nem pela pesquisadora nem pela escola – que justificassem esse aumento na média de acertos, sendo, portanto, uma evidência de que o conteúdo trabalhado na intervenção do presente estudo foi de fato aprendido.

Tabela 1: Comparação da média de desempenho por grupo no pré-teste e pós-testes imediato e posterior.

Grupos	Pré-teste	Pós-teste Imediato	Pós-teste Posterior
Grupo 1 (<i>Árvore</i>)	4,6	12,1	13,22
Grupo 2 (<i>lápiz e papel</i>)	4,8	14,8	16,44
Grupo 3 (<i>Controle – Estruturas Multiplicativas</i>)	4,7	4,1	4,0
Grupo 4 (<i>Controle - desassistido</i>)	4,9	2,8	4,2

Fonte: Autora do estudo.

Ainda observando a Tabela 1 pode-se perceber o maior avanço do Grupo 2 em relação ao Grupo 1. Esse desempenho um pouco superior do Grupo 2 pode estar relacionado ao fato de que os alunos deste segundo grupo resolveram as situações utilizando a mesma representação (escrita - com lápis e papel) adotada no pré-teste e nos pós-testes, enquanto os alunos do Grupo 1 resolveram as situações por meio de um *software* e no pós-teste tiveram que utilizar uma representação escrita com uso do lápis e papel. Além disso, o Grupo 2 pode ter sido beneficiado por ter que pensar nas relações combinatórias concomitantemente à construção da *árvore de possibilidades*, enquanto que o Grupo 1 teve a *árvore de possibilidades* construída pelo *software*, sendo necessário pensar nessas relações apenas no momento de selecionar os casos válidos.

O Grupo 3, composto pelos alunos que fizeram parte do grupo controle assistido – com aulas de estruturas multiplicativas – manteve, nos pós-testes, a sua média de acertos em comparação com o pré-teste. Dessa forma, observa-se que trabalhar problemas multiplicativos, mas não combinatórios, parece não ter auxiliado o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

O Grupo 4, que foi formado pelos alunos que não receberam nenhum tipo de instrução, diminuiu bastante seu rendimento na comparação da média dos resultados desses alunos no pré-teste (4,9) com o pós-teste imediato (2,8), entretanto, no pós-teste posterior diminuiu pouco seu rendimento na comparação com o pré-teste (4,9 – 4,2). Assim, esse grupo, que não teve nenhum tipo de instrução, não só não teve influência positiva no desempenho, como parece ter provocado um efeito negativo imediato e depois um retorno ao desempenho anterior.

Por meio da prova paramétrica *t-teste de amostras em pares*, foi possível destacar que ambos os grupos com intervenção em Combinatória apresentam diferenças significativas de desempenhos entre pré-teste e o pós-teste posterior, avançando substancialmente em seus conhecimentos combinatórios. O Grupo 1 (*software*), quando comparado o pré-teste com o pós-teste posterior obteve diferença significativa entre as respectivas médias ($t(8) = -2,920$; $p = 0,019$), mas não houve diferenças significativas na comparação do pós-teste imediato com o pós-teste posterior nesse grupo ($t(8) = -0,472$; $p = 0,649$). Já no Grupo 2 (lápis e papel), neste mesmo panorama de comparação, também foi observada diferença significativa com o pós-teste posterior ($t(8) = -3,447$; $p = 0,009$) e, assim como para o Grupo 1, também nesse grupo não houve diferenças significativas na comparação do pós-teste imediato com o pós-teste posterior ($t(8) = -1,541$; $p = 0,162$). O fato de não ter havido diferença

significativa nesses dois grupos entre os desempenhos no pós-teste imediato e pós-teste posterior atesta que os dois grupos mantiveram estável os seus conhecimentos desenvolvidos durante as intervenções.

Com o intuito de comprovar a influência da intervenção nos resultados dos grupos experimentais foi observado, ainda pela prova paramétrica *t-teste de amostras em pares*, que não houve diferenças significativas na comparação do pré-teste com o pós-teste posterior do Grupo 3 (controle – estruturas multiplicativas), ($t(9) = 0,751$; $p = 0,472$) nem do pós-teste imediato com o pós-teste posterior ($t(9) = 0,0750$; $p = 0,946$); Assim como, não houve diferenças significativas na comparação do pré-teste com o pós-teste posterior do Grupo 4 (controle desassistido) ($t(9) = 0,391$; $p = 0,705$), nem do pós-teste imediato com o pós-teste posterior ($t(9) = -0,782$; $p = 0,454$).

3.2 As representações simbólicas utilizadas: Pré-teste e pós-testes imediato e posterior.

Os tipos de representações simbólicas para a resolução dos problemas combinatórios podem ser as mais variadas: *desenhos, listagens, árvores de possibilidades, quadros, diagramas*, cálculos ou uso de *fórmulas*, entre outras (PESSOA; BORBA 2009a). Dessa forma, os alunos, ao se depararem com problemas combinatórios, buscam utilizar essa variedade, uma vez que esses problemas possibilitam diferentes formas de solução.

Na análise realizada nesta pesquisa foi possível notar que, inicialmente, quando os todos os participantes realizaram o pré-teste (sondagem), os alunos, em sua maioria, não explicitaram estratégia ou representação simbólica de resolução do problema em questão (G1: 51,25%; G2: 58,75%; G3: 37,5%; G4: 40%). Um caso desse tipo pode ser observado na Figura 1, em que o Aluno 6 não explicitou estratégia ou representação simbólica para a resolução do Problema 2 de *produto cartesiano*, apesar de ser possível inferir que este aluno somou os números dos elementos dos conjuntos do problema.

Percebe-se ainda, que, no pré-teste quando os alunos explicitaram representações simbólicas, utilizaram a *listagem* (G1: 35%; G2: 41,25%; G3: 43,75%; G4: 40%) como procedimento preferido de resolução, entretanto, essa *listagem*, por vezes, não apresentava relação com o que o problema estava pedindo. Além disso, há um pequeno percentual de alunos que fizeram uso de procedimentos aditivos (G1:13,75%; G3: 15%; G4:12,5%), não reconhecendo o caráter multiplicativo das situações, com exceção do Grupo 2. Pessoa e Borba (2009b) também destacam essa realidade em seu estudo. No pré-teste, a *árvore de possibilidades* não foi utilizada por nenhum Grupo.

2. Para entrar no parque de diversões, João pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C e D). Depois que João se divertir nos brinquedos do parque, ele poderá ir para casa passando por seis saídas diferentes (E, F, G, H, I e J). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do parque?

Resposta: 10 maneiras diferentes

Figura 1: *Resposta errada* do Aluno 6 do G1 (*Árbol*) no pré-teste, em que não há explicitação de estratégia ou representação simbólica. Fonte: Autora do estudo.

Após a intervenção, no pós-teste imediato, o percentual de alunos do G1 (66,25%), G3 (51,25%) e G4 (58,75%), que *não explicitaram representação* após a intervenção, não diminuiu. Diminuindo apenas o percentual do G2 (17%). Este panorama se manteve no pós-teste posterior quando os alunos do G1 permaneceram com dificuldades em explicitar uma representação simbólica (G1: 61%). Acredita-se que a diferença de ambos os grupos experimentais, para este fato pode ser reflexo da necessidade de transformação da forma de representação virtual, na qual os alunos do Grupo 1 aprenderam a Combinatória, para a escrita. Além disso, há a possibilidade de, na falta de conhecimento de como efetuar uma representação escrita, muitos alunos deste grupo podem ter resolvido apenas mentalmente as situações.

Entretanto, os alunos do G1 nos pós-teste imediato e no pós-teste posterior, quando explicitaram uma representação simbólica, utilizaram, na maioria das vezes, a *listagem*, com evidências de pensamento combinatório, como é possível ver na Figura 2. Além da *listagem* (Pós-teste imediato – G1: 16,25%; pós-teste posterior – G1: 30%), também foram apresentadas pelos alunos outras representações eficientes, após a intervenção, como a *árvore de possibilidades* (G1:5%), a *multiplicação adequada* (G1:1,25%), além da *percepção de regularidades* (G1:3,75%) no primeiro pós-teste e, para o segundo pós-teste, o *diagrama* (G1:6%) também se caracterizou como uma representação eficiente. Entretanto, a preferência no tipo de representação, para este grupo, permaneceu, nos pós-testes, pela *listagem de possibilidades*.

A preferência pela listagem, neste grupo chama a atenção para o fato de que, como é possível observar na Figura 2, o aluno 6 por exemplo, não aprendeu um método de resolução do problema, ou seja, o aluno não foi *treinado* para resolver problemas combinatórios por meio de *árvore de possibilidades*, uma vez que há evidência que o aluno aprendeu a refletir sobre o que o problema está perguntando, pois, o aluno resolve a situação por meio da representação que lhe parece mais conveniente para a solução correta da situação.

2. Na festa de São João da Escola Saber o 5º ano irá dançar quadrilha. Na turma tem seis meninos (Gabriel, Thiago, Matheus, Renato, Otávio e Felipe) e quatro meninas (Taciana, Eduarda, Leticia e Rayssa). A professora quer que todos os meninos dançam com todas as meninas. Quantos casais diferentes podem ser formados?

G → T	T → T	M → T	R → T	O → T	F → T
G → E	T → E	M → E	R → E	O → E	F → E
G → L	T → L	M → L	R → L	O → L	F → L
G → R	T → R	M → R	R → R	O → R	F → R

Resposta: 24 casais diferentes.

Figura 2: Resposta correta do Aluno 6 do G1 (Árbol) para a segunda questão do pós-teste posterior, por meio de listagem de possibilidades. Fonte: Autora do estudo

Outro fato que pode corroborar com essa conclusão, é que apenas um aluno desse grupo fez uso dessa representação (Figura 3), no pós-teste imediato, e no pós-teste posterior não houve registro desse tipo de representação. Surgindo, então, a representação *diagrama*, como pode ser visto na Figura 4. Entretanto, é possível que a *árvore de possibilidades*, que foi trabalhada por meio do *software* com esse grupo, tenha forte influência na utilização de *diagramas* como representação para resolução de problemas combinatórios. Assim como no presente estudo, Pessoa (2009), em seu estudo de sondagem, também destaca que, nos anos iniciais, a *árvore de possibilidades* e o *diagrama* também possuem percentuais muito baixos de utilização.

1. Janc possui quatro blusas (amarela, rosa, laranja e vermelha) e duas saias (preta e branca). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas e uma de suas saias?

preta → Am. 4
 ro. 4
 ver. 4

branca → Am. 2
 ro. 2
 ver. 2

Resposta: 8 maneiras diferentes

Figura 3: Resposta correta do Aluno 38 do G1 (Árbol) para a primeira questão do pós-teste imediato, por meio de *árvore de possibilidades*. Fonte: Autora do estudo.

3. Felipe, Sandra, Carla e Francisco vão formar duplas para jogar pingue-pongue. Quantas duplas diferentes podem ser formadas?

Resposta: 6 maneiras diferentes

Figura 4: Resposta correta do Aluno 38 do G1 (Árbol) para a terceira questão do no pós-teste posterior, por meio de Diagrama. Fonte: Fonte: Autora do estudo.

Já com os alunos do Grupo 2 (*lápiz e papel*), como já foi mencionado, o percentual de alunos, que não *explicita um tipo de representação simbólica ou estratégia* e dos alunos que *listam as possibilidades* diminui após a intervenção, surgindo um baixo percentual de alunos que utilizam a *adição/subtração* (G2: 10%). Acrescenta-se quanto ao uso da

listagem, entretanto, que, apesar da diminuição do seu uso, quando esta era utilizada, houve uma melhora qualitativa das produções, como é possível visualizar na Figura 5.

Além disso, a utilização da *árvore de possibilidades* (G2: 39%) passa a ser predominante neste grupo, ao contrário do que acontece no Grupo 1 (Ver Figura 6). Destaca-se, entretanto, que essa representação foi menos utilizada nas situações de *permutação*, o que pode ser indicativo da maior dificuldade em realizar um diagrama de árvore que tenha mais níveis (ramos) em sua construção.

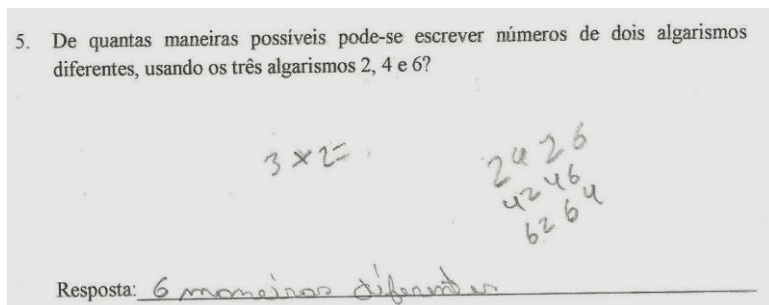


Figura 5: *Resposta correta* do Aluno 30 do G2 (Lápis e Papel) para a quinta questão do pós-teste imediato, por meio de *listagem de possibilidades*. Fonte: Autora do estudo.

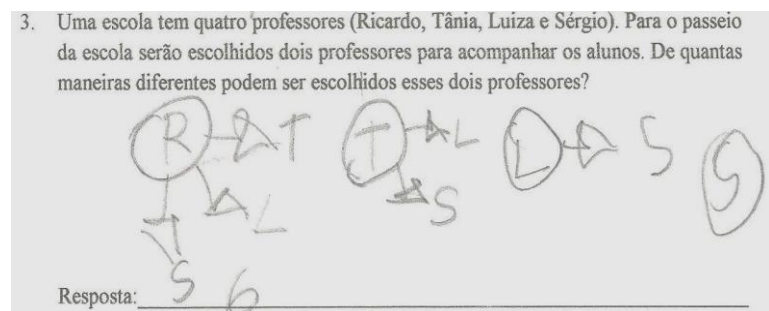


Figura 6: *Resposta correta* do Aluno 33 do G2 (Lápis e Papel) para a terceira questão do pós-teste imediato, por meio de *árvore de possibilidades*. Fonte: Autora do estudo.

Também há indicativo de utilização de outros tipos de representação, eficientes ou não, como a *adição/subtração*, *o desenho* (G2: 5%), a *adição inadequada de parcelas repetidas* (G2: 3,75%), a *adição adequada de parcelas repetidas* (G2: 1,25%), a *multiplicação inadequada* (G2: 2,5%) e a *multiplicação adequada* (G2: 1,25%) aparecem apenas no pós-teste imediato e que o *diagrama* (G2: 11,6%), aparece apenas no pós-teste posterior. Há, entretanto, em ambos pós-teste o surgimento de um fraco percentual da percepção de regularidade (G2: 1,25%; 1,5% respectivamente). Um exemplo da percepção de regularidades e generalização da situação pode ser visto na Figura 7.

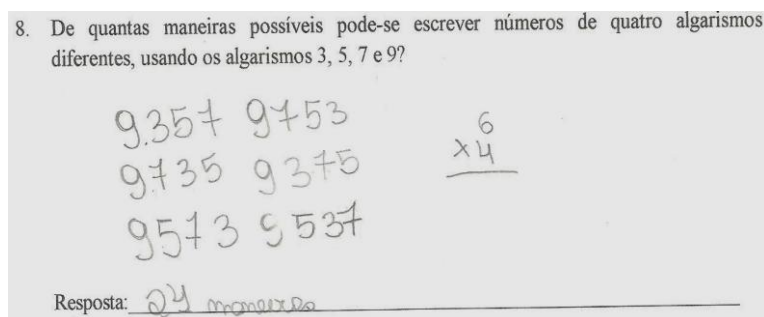


Figura 7: Resposta correta do Aluno 7 do G2 (Lápis e Papel) para a oitava questão do pós-teste imediato, por meio de *listagem com percepção da regularidade*. Fonte: Autora do estudo.

Neste problema o aluno em questão percebeu que para números de quatro algarismos iniciados com certo algarismo há seis possibilidades. Se há quatro algarismos que podem iniciar os números, é possível generalizar que para todos os demais também haverá seis possibilidades, permitindo assim, multiplicar o número de algarismos (quatro) pelo número de possibilidades por algarismo (seis). A *percepção da regularidade* normalmente é realizada após o aluno adotar uma *listagem* ou *árvore de possibilidades* sistemáticas, entretanto, são poucos os alunos que fazem uso dessa generalização.

Os avanços qualitativos nos pós-testes mencionados até aqui para os Grupos 1 (*Árbol*) e 2 (*lápiz e papel*) – os grupos experimentais, não foram observados nos Grupos 3 (controle assistido) e 4 (controle desassistido) – os grupos controle. Verificou-se que os alunos que não participaram de intervenção em problemas combinatórios não aumentam a variedade de representações simbólicas apresentadas. Dessa forma, no pós-teste imediato, permanecem apresentando altos percentuais de alunos que *não explicitam representação simbólica ou estratégia*, como já mencionado, de *adição/subtração* (G3: 16,25%; G4: 12,5%), *listagem de possibilidades* (G3: 25%; G4: 26,25%), *multiplicação inadequada* (G3: 2,5%; G4: 2,5%) e *adequada* (G3: 2,5%;). A única representação que passa a ser utilizada somente após a intervenção é o *desenho*, para o G3 (2,5%), que foi a representação utilizada por esse grupo na intervenção. No pós-teste posterior a frequência de alunos que *não explicitam um tipo de representação ou estratégia* (G3: 67,5%; G4: 55%) e de alunos que utilizam a *adição/subtração* (G3: 2,5%; G4: 15%) e *listagem de possibilidades* (G3: 28,75%; G4: 22,5%) também permanecem com os percentuais elevados.

Diferentemente dos grupos experimentais, nos quais os alunos melhoram qualitativamente suas *listagens* e, além disso, apresentam *árvores de possibilidades*, *diagramas*, *soma de parcelas repetidas* e, até mesmo *percebem a regularidade* da situação, os alunos que fizeram parte do Grupo Controle Assistido não variam as representações

utilizadas e permanecem utilizando a *listagem* que não apresenta indícios de pensamento combinatório, como é possível visualizar na Figura 8.

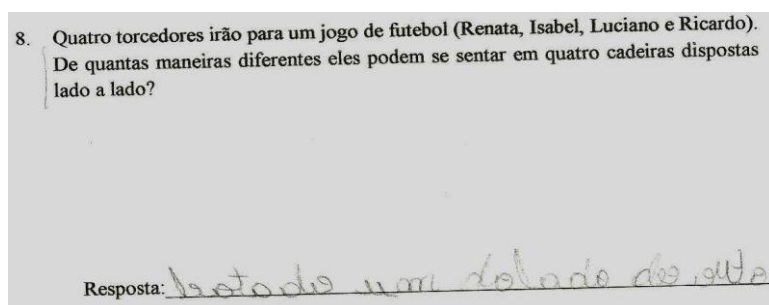


Figura 8: Resposta errada do Aluno 29 do G3 (Controle - Estruturas Multiplicativas) para a oitava questão do pós-teste imediato por meio de *listagem de possibilidades*. Fonte: Autora do estudo.

Apesar da pouca variedade de representações simbólicas utilizadas, um dos alunos respondeu as situações de *produto cartesiano* utilizando o *desenho*, que foi o tipo de representação incentivada durante a intervenção. Um dos tipos de problemas discutidos foi os de *multiplicação* relacionados, por Nunes e Bryant (1997) com a proporcionalidade. Assim como a *multiplicação*, os problemas de *produto cartesiano* também estão relacionados com a proporcionalidade, segundo Nunes e Bryant (1997). Assim, as situações de *multiplicação* podem ter influenciado esse aluno na resolução dos problemas de *produto cartesiano* nos pós-testes imediato e posterior. A seguir é possível visualizar o exemplo para o pós-teste posterior (Figura 9).

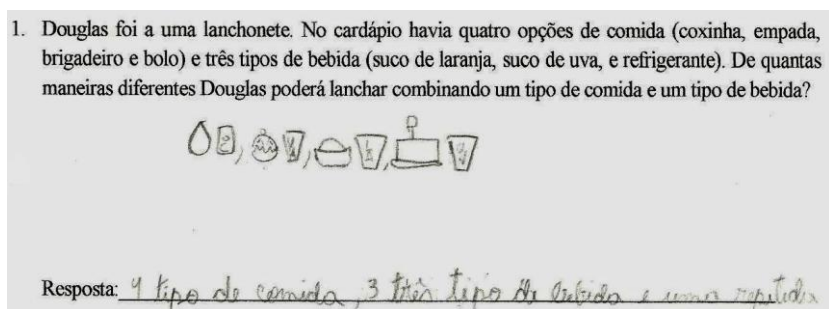


Figura 9: Resposta parcialmente correta 2 do Aluno 31 do G3 (Controle - Estruturas Multiplicativas) para primeira questão do pós-teste posterior, por meio de *desenho*. Fonte: Autora do estudo

Dessa forma, é possível afirmar que, trabalhar problemas multiplicativos não combinatórios não é suficiente para desenvolver o raciocínio combinatório de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Também se pode destacar que trabalhar problemas multiplicativos por meio de *desenho* não parece ter incentivado os alunos a utilizarem diversificadas representações para a solução de problemas combinatórios. Chama-se a atenção para o fato de que o *desenho* é uma forma de representação possível de ser utilizada para a solução de problemas combinatórios, mas não parece evidente a todos os alunos como o desenho pode ser utilizado nessas situações.

Assim como exposto para o Grupo 3 (Controle Assistido), o Grupo 4 (Controle Desassistido) também permaneceu com altos índices de percentual nas categorias *não explicitou tipo de representação ou estratégia*; *Adição/Subtração* e *Listagem de possibilidades*. Nota-se, com isso, que não trabalhar problemas combinatórios desde os anos iniciais parece não favorecer que os alunos desenvolvam de maneira expressiva esse raciocínio. Trabalhar problemas multiplicativos não combinatórios e não trabalhar nenhum tipo de problema multiplicativo, deixando que o passar do tempo se encarregue do desenvolvimento de problemas combinatórios, não parece, portanto, favorecer o aprendizado deste conteúdo.

4. Considerações Finais

Diante do que foi apresentado e analisado, pode-se concluir que os alunos desta pesquisa, participantes dos grupos de intervenção em Combinatória, com uso de *lápiz e papel* ou com uso do *software Diagramas de Árbol*, avançaram em seus raciocínios combinatórios. Os dois grupos demonstraram desempenhos significativamente melhores nos pós-testes imediato e posterior, comparado ao teste respondido antes da intervenção. Isso revela que o trabalho com *árvores de possibilidades* pode resultar em eficiente estratégia de ensino com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.

O avanço se evidencia mais quando os alunos são avaliados na mesma representação em que foram trabalhadas as situações, uma vez que, os alunos do Grupo 1 (*Árbol*) precisavam ainda transformar o conhecimento aprendido no *software* para a representação escrita utilizada no pós-teste. Contudo, entende-se que, representar a *árvore de possibilidades* em diferentes meios, virtual e escrito, por exemplo, pode ser um aspecto positivo para o aprendizado da Combinatória. É preciso, entretanto, perceber que nem sempre será possível para os alunos representar por escrito o que aprenderam virtualmente. Conclui-se que, possivelmente, o trabalho com o *software Diagramas de Árbol*, articulado com a representação escrita, possa ser um diferencial para a aprendizagem de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.

Além disso, é possível destacar que, dos tipos de representação utilizados, a *listagem de possibilidades* foi a mais frequente na análise do total de participantes da presente pesquisa. Para os alunos que fizeram parte de grupos experimentais, houve um aumento na variedade de representações simbólicas possíveis de ser utilizadas, além de seu avanço qualitativo. Além disso, também é possível constatar que, apesar das intervenções

dos grupos experimentais utilizarem a *árvore de possibilidades*, os alunos desses grupos também continuam utilizando a *listagem* para a resolução dos problemas combinatórios. Vale salientar ainda que esse tipo de representação continuou sendo o preferido para os alunos do Grupo 1 (*Árbol*). Já os alunos do Grupo 2 (Lápis e papel) preferiram utilizar a *árvore de possibilidades*, na resolução dos problemas dos pós-testes imediato e posterior.

Ressalta-se, portanto, a preferência pela utilização dessa representação no pré-teste por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental regular. Além disso, esses alunos resolvem problemas combinatórios principalmente de forma não sistemática, o que ocasiona, na maioria das vezes, no não esgotamento de todas as possibilidades da situação proposta. Entretanto, nos pós-testes imediato e posterior dos grupos experimentais, o uso da *listagem de possibilidades* passou a ser mais sistematizado, ou seja, antes do processo de intervenção, as listagens, em sua maioria, eram desorganizadas, dificultando o raciocínio acerca da existência das variadas possibilidades. Além disso, a *listagem*, anteriormente, não apresentava relação com o raciocínio combinatório, ou, quando apresentava, estava ligada à escolha de apenas uma possibilidade.

Também é possível salientar o aparecimento de problemas sendo resolvidos por meio de *árvore de possibilidades*. Percebe-se que, anteriormente, tal tipo de representação simbólica não era utilizado pelos alunos participantes dessa pesquisa, se fazendo presentes, portanto, após o processo de intervenção. Além disso, apesar da *árvore de possibilidades* não ser o tipo de representação simbólica mais utilizada pelos alunos do Grupo 1 (*Árbol*), o seu uso na intervenção parece ter feito com que eles entendessem melhor cada tipo de situação combinatória e, assim, fizeram melhor uso de *listagens de possibilidades* nos pós-testes, uma vez que houve maior organização nas respostas por *listagens* apresentada pelos alunos. Desse modo, a intervenção possibilitou que se fizesse melhor uso das representações simbólicas, em particular das *listagens* como forma de refletir sobre relações combinatórias.

Assim, com a análise e discussões apresentadas, acredita-se que há fortes evidências de que as intervenções realizadas com os grupos experimentais possibilitaram grandes e importantes avanços nos raciocínios combinatórios dos alunos. Evidencia-se que alunos do 5º ano do Ensino Fundamental (em torno de 10 anos) que tenham acesso a esse tipo de trabalho em sala de aula, são capazes de desenvolver esse tipo de raciocínio de forma sistemática se forem incentivados para que isso aconteça. Como dito, Inhelder e Piaget (1976) afirmam que resoluções sistemáticas espontâneas só começam a ser efetuadas por alunos entre 11 e 15 anos (*combinação*) e 14-15 anos (*arranjo* e *permutação*), entretanto,

verificou-se como possível, portanto, a partir dos resultados desse estudo, antecipar a idade em que acontecem essas sistematizações, por meio de intervenções.

Deseja-se, assim, com essa pesquisa, contribuir para a reflexão sobre melhores possibilidades de ensino da Combinatória nas salas de aula dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao apontar o uso de *árvores de possibilidades* como recurso que permite que os alunos observem diferentes relações e propriedades de distintas situações combinatórias.

REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, C. **Diagrama de Árbol**. Multimedia. 2005.
- AZEVEDO, J.; COSTA, D.; BORBA, R. O impacto do *software Árbol* no raciocínio combinatório. **Anais...** 13 Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM/IACME, Recife, Brasil. 2011
- BORBA, Rute. *O Raciocínio Combinatório na Educação Básica*. In: **Anais...** 10 Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM. Bahia, 2010.
- BORBA, Marcelo.; PENTEADO, Miriam. *Informática e Educação Matemática*. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora. Coleção tendências em Educação Matemática. 2010
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. 1ª a 4ª série. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.
- FISCHBEIN, Efraim. **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children**, Reidel, Dordrecht, 1975.
- FISCHBEIN, Efraim; PAMPU, Ileana & MINZAT, Ion. Effects of age and instruction on combinatory ability in children. **The British Journal of Educational Psychology**, n. 40, 1970.
- FLAVELL, John H. **A Psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget**. São Paulo: Editora Pioneira. 1988
- FERRAZ, Martha; BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana. Usando o *software Árbol* na construção de árvores de possibilidades para a resolução de problemas combinatórios. **Anais...** 10 Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, 2010.
- INHELDER, B.; PIAGET, J. **Da lógica da criança à lógica do adolescente**. São Paulo: Livraria Pioneira Editora. 1976
- LEITE, Maici; PESSOA, Cristiane; FERRAZ, Martha; BORBA, Rute. *Softwares Educativos e Objetos de Aprendizagem: um olhar sobre a análise combinatória*. **Anais...** 10 Encontro Gaúcho de Educação Matemática – 10 EGEM, Ijuí, 2009.
- NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1997.
- PESSOA, C. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio**. (Tese Doutorado)- Programa de Pós-graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. **Quem Dança com Quem**: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *Zetetiké – Cempem – FE – Unicamp* – v.17, n.31 – jan./jun. – 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O raciocínio combinatório do início do Ensino Fundamental ao término do Ensino Médio. *Anais...* 10 Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, 2010a.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. **O Desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica**. Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v.1, n.1. 2010b.

SANDOVAL, I.; TRIGUEIROS, M.; LOZANO, D. Uso de un interactivo para el aprendizaje de algunas ideas sobre combinatoria en primaria. *Anais...* 12 Comitê Interamericano de Educação Matemática, Querétaro, México, 2007.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, n. 1, 1986, p. 75-90.

VERGNAUD, Gerard. A Teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean, (org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996.