NÚMEROS IRRACIONAIS E SUA COMPREENSÃO PELA EXPERIÊNCIA

Renato Schneider Rivero Jover
IFSul
renato@renatomatematico.mat.br

Resumo:
Este artigo relata uma experiência no ensino-aprendizagem de números irracionais em uma turma da oitava série (nono ano) do Ensino Fundamental da Rede Pública do Estado. A maior dificuldade constatada foi com as operações com elementos desse conjunto, devido ao fato de os alunos não aceitarem os irracionais como números, mas como símbolos sem significado. Com o propósito de aprimorar o processo de ensino-aprendizagem, a metodologia envolveu os aspectos geométrico e computacional. O teorema de Pitágoras e o software *Geogebra* foram ferramentas imprescindíveis no desenvolvimento da experiência, que constou de quatro atividades programadas e executadas no Laboratório de Informática. Por fim, o artigo destaca as vantagens no aprendizado, possibilitadas pela experiência.

Palavras-chave: números irracionais; experiência como aprendizado; *Geogebra*.

1. Introdução

A Matemática é inerente ao ser humano. Segundo Devlin (2004, p. 20-36), "*as características do cérebro que nos permitem lidar com a matemática são as mesmas que nos permitem usar a linguagem – falar com os outros e entender o que eles dizem*". E, ainda, o senso numérico humano é inato. E, avançando mais nesse sentido, o senso numérico acompanha o ser humano desde os primórdios da evolução:

> O homem, mesmo nos estágios mais inferiores de desenvolvimento possui uma faculdade que, à falta de melhor nome, chamarei de senso numérico. Essa faculdade lhe permite reconhecer que algo mudou em uma pequena coleção quando, sem seu conhecimento direto, um objeto foi retirado ou acrescentado ao conjunto. (DANTZIG apud DEVLIN, 2004, p. 36).

E acrescenta a questão:

> Se a faculdade básica de lidar com a matemática é a mesma que nos permite falar e compreender o que as pessoas falam, por que tão poucos são capazes de utilizar essa facilidade, dado que toda criança de quatro anos de idade é fluente com a linguagem? (DEVLIN, 2004, p. 20).

A Matemática é vista como uma disciplina de difícil compreensão por parte da maioria das pessoas. Se um estudante aleatório for perguntado, ele dirá, salvo exceções, que “odeia” Matemática. Justificando, destaca o fato de que não compreende como a Matemática funciona: as fórmulas parecem verdadeiras adivinhações, as equações não têm qualquer significado com a vida real e números irracionais foram inventados por quem não tinha o que fazer.

Por outro lado, a Educação Matemática vem sendo objeto de pesquisa há pouco mais de quarenta anos: “*nas últimas décadas, esforços educacionais empreendidos por diversas nações, dentre elas o Brasil, têm favorecido a constituição da Educação Matemática como um campo de ensino e de pesquisa com saberes próprios”* (FIORENTINI e LORENZATO, 2006, p. 4).

Nesse sentido, os cursos de graduação em Licenciatura em Matemática apresentam, nos currículos, várias disciplinas voltadas para a formação do professor, a fim de que, em sua prática de ensino, possa proporcionar uma verdadeira aprendizagem e despertar o gosto pela mesma.

2. Contextualização

A experiência de estágio dentro de uma escola da Rede Pública Estadual, com uma turma da oitava série (nono ano) do Ensino Fundamental, propiciou a este autor observar, nos primeiros dias, um professor licenciado ensinando números irracionais, operações e regras envolvendo os radicais.

Ao assumir a regência da turma, este autor deu continuidade às operações, com foco na racionalização, o que propiciou detectar várias dificuldades. Dentre estas, destacou-se a operação de subtração. Esta é realizada facilmente no conjunto dos inteiros: os alunos sabem que, se possuem cinco maçãs e comem as cinco, nenhuma lhes resta; entretanto, ao operar $\sqrt{2}-\sqrt{2}$, não chegam à conclusão de que a resposta também é zero.

Sendo que os números irracionais estão presentes em muitas situações que envolvem Trigonometria, Geometria e Álgebra, na forma de elemento do conjunto-solução, este autor pensou numa estratégia a ser utilizada para sanar essa dificuldade: a Geometria (construção e visualização gráfica) como fundamento para o ensino das operações no conjunto em foco.

Nesse sentido, Melo (1999) afirma, sobre os números irracionais, que:

> Eles ocupam um dos nós fundamentais dentro da rede de interações dos conteúdos em Matemática. Podemos considerá-los [...] assumindo, de certo modo, uma característica de interdisciplinaridade dentro da própria Matemática. (p. 29).

3. A estratégia

Face à resposta dada pelo aluno aleatório: “as fórmulas parecem verdadeiras adivinhações, as equações não têm qualquer significado com a vida real e números irracionais foram inventados por quem não tinha o que fazer”, a primeira ideia que veio à mente foi procurar entender o porquê de tamanha dificuldade. Neste processo, surgiu a seguinte conjectura: o aluno não opera adequadamente com números irracionais, porque ele não os compreende (visualiza) como números. O símbolo de raiz não faz sentido como operação e a representação decimal não é enfatizada.

Em sequência, foi criado um Projeto de Ensino, exigido como parte do estágio, a ser desenvolvido em horário alternativo e em caráter facultativo aos alunos, não fazendo parte da avaliação trimestral da disciplina.

Considerando a disponibilidade do Laboratório de Informática da Escola, o projeto consistiu em uma Oficina de Informática com Matemática. O objetivo desta atividade foi o ensino-aprendizagem de números irracionais, numa abordagem visual. A fundamentação teórica foi a Geometria, especificamente o teorema de Pitágoras, e, a prática, com vistas à visualização e à concretização das ideias, foi desenvolvida em quatro atividades, através do software *Geogebra*[1]**,** uma ferramenta de uso livre[2].

4. As atividades

Partindo do pressuposto de que os alunos aprenderiam a operar, mais facilmente, com os números irracionais, se os compreendessem como compreendem os números inteiros, foi usada a estratégia gráfica, com a participação ativa dos alunos. Nesse sentido, Tafner (2008) afirma *“quando a criança tem novas experiências (vendo coisas novas, ou ouvindo coisas novas) ela tenta adaptar esses novos estímulos às estruturas cognitivas que já possui...*“ e há, também, a definição de assimilação por Jean Piaget:

[1] *Software* matemático criado pelo austríaco Prof. Dr. Markus Hohenwarter, que consiste no uso combinado de Geometria e Álgebra para explorar conceitos matemáticos. N.d.A.

[2] Em inglês *freeware*, isto é, um software que pode ser utilizado, desde que sem fins lucrativos, sem a necessidade de pagar licença ao autor. N.d.A.

> [...] uma integração às estruturas prévias, que podem permanecer invariáveis ou são mais ou menos modificadas por esta própria integração, mas sem descontinuidade com o estado precedente, isto é, sem serem destruídas, mas simplesmente acomodando-se à nova situação... (PIAGET, 1996, p. 13)

A Oficina consistiu de quatro atividades, desenvolvidas em quatro encontros, envolvendo a representação gráfica do teorema de Pitágoras, sendo permitida a interação dos alunos através do software *Geogebra*. Em média, havia quatorze alunos em cada atividade e um computador por aluno.

5. Preparação para as atividades

Os alunos já conheciam o teorema de Pitágoras, conteúdo integrante da série cursada, mas a visualização geométrica associada à possibilidade de interação era uma experiência inteiramente nova para eles. Diante disso, a primeira etapa foi a apresentação do *software* e suas possibilidades operacionais.

6. Atividade 1 – Teorema de Pitágoras:

Como primeira atividade, foi proposto manipular os dados de forma a alterar os lados do triângulo e, consequentemente, as áreas dos quadrados, como mostrado na Figura 1, a seguir.

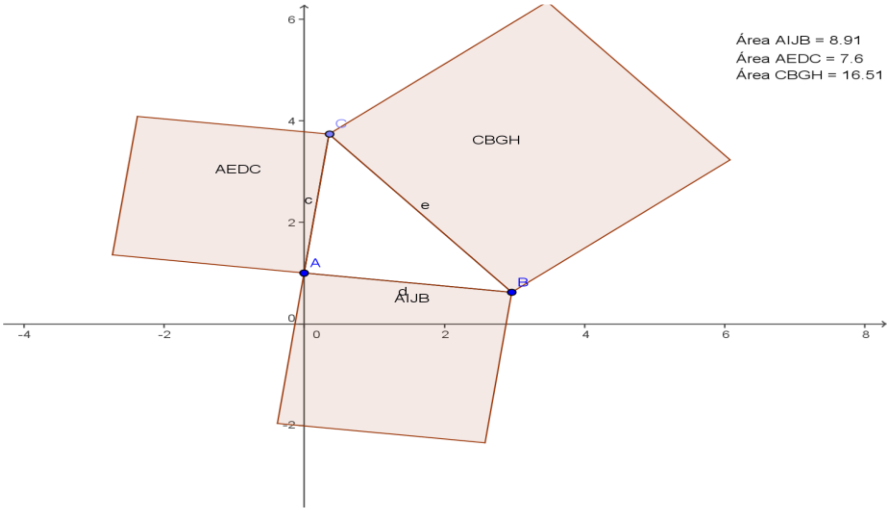

Figura 1 – Atividade 1: Manipulação dos pontos A, B e C para constatação do teorema de Pitágoras.

Descrição da atividade: exibida a Figura 1, o triângulo retângulo CAB (sendo CÂB o ângulo reto), os alunos devem manipular os pontos A e B livremente e, ao mesmo tempo, observar que o triângulo permanece sempre retângulo em A. Ao fazerem a manipulação dos pontos, os lados do triângulo se alteram e, consequentemente, por estar atrelada ao lado, cada uma das áreas dos três quadrados se altera.

O valor das áreas é atualizado de forma automática e mostrado no canto superior direito. Assim, o aluno é levado a concluir, empiricamente, que a área do quadrado maior é a soma das áreas dos outros dois quadrados, constatando o teorema de Pitágoras: "o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos".

Ao final dessa atividade, a maioria dos alunos enunciou o teorema de Pitágoras e foi capaz de exemplificar a sua constatação.

7. Atividade 2 – Construção de Números Irracionais

O objetivo principal da segunda atividade foi mostrar aos alunos que os números irracionais podem ser medidos. Com os triângulos da Figura 2 (abaixo) e o teorema de Pitágoras vivenciado na aula anterior, a tarefa consistiu em construir alguns triângulos de modo que a hipotenusa fosse expressa por um número irracional.

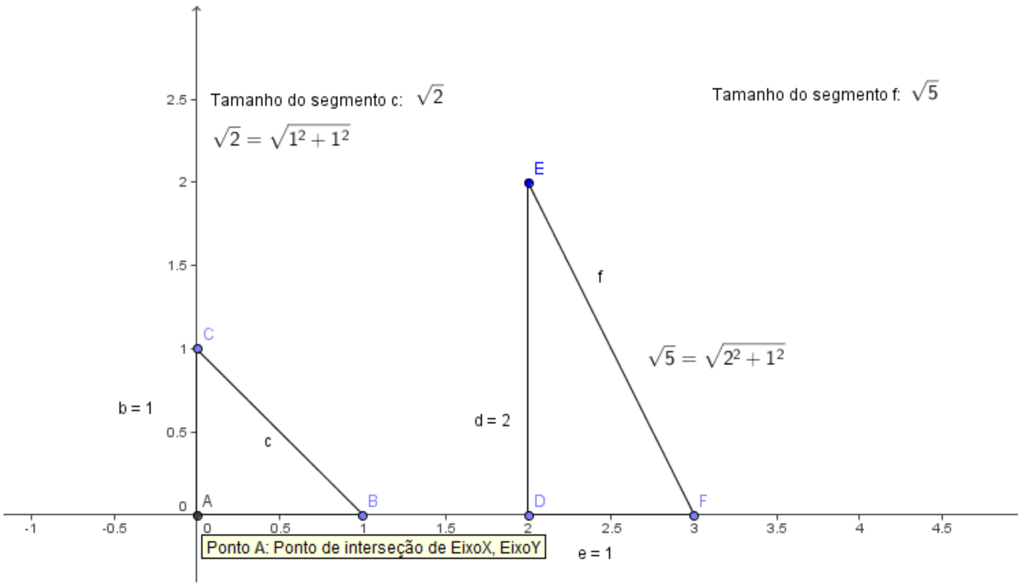

Figura 2 – Atividade 2: Construção de segmentos cujas medidas são números irracionais.

Observando a Figura 2, os alunos constataram que $\sqrt{2}$ é o valor da hipotenusa de um triângulo retângulo com ambos os catetos iguais a 1, e que $\sqrt{5}$ é o valor da hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos iguais a 1 e 2. A seguir foi solicitado que os alunos construíssem triângulos retângulos diversos, de modo a obter outros números irracionais, dentre estes a de triângulos com hipotenusas iguais a $\sqrt{8}, \sqrt{13}$ e $\sqrt{18}$.

Tal como na atividade anterior, o resultado foi positivo: todos os alunos conseguiram completar a tarefa. Aproveitando o tema da atividade, este autor narrou aos alunos, de forma sucinta, a história dos números irracionais e como se registram em aplicações.

Segundo Melo (1999):

> Os números irracionais ocupam um lugar extremamente privilegiado dentro da História da Matemática. Revisitá-los é percorrer uma trajetória de 25 séculos. Essa tem origem na Escola Pitagórica com a crise provocada pela descoberta e posterior revelação de grandezas geométricas cujas razões não podiam ser representadas por números inteiros e vai até o século XIX... (p. 29).

Em referência às medições anteriores, foi enfatizado aos alunos que a medida da grandeza da hipotenusa de um triângulo retângulo com os catetos iguais a uma unidade deu origem ao surgimento dos números irracionais naquela época.

8. Atividade 3 – Comparação de Números

Tendo em vista que, nas atividades anteriores, os alunos aprenderam que os números irracionais podem representar medidas de segmentos, a atividade seguinte consistiu na comparação de segmentos de comprimento representado por irracionais (constatados na atividade anterior), com segmentos de comprimento denotado por números inteiros.

A expectativa era de que os alunos fossem capazes de comprovar, por exemplo, que a raiz quadrada de 13, é um número situado entre três e quatro.

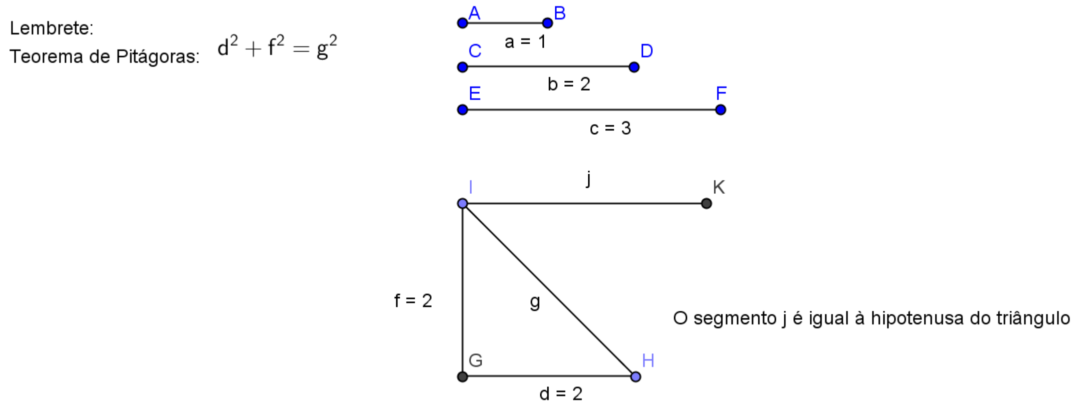

Figura 3 – Atividade 3: Comparação de números irracionais com números inteiros mediante a medida dos segmentos.

Manipulando os vértices H e I, vários triângulos retângulos foram criados, a fim de facilitar a aprendizagem. Como ilustra a Figura 3, o segmento "j" é do mesmo tamanho que a hipotenusa do triângulo GHI, mas paralelo ao eixo (oculto) das abscissas. Com o teorema de Pitágoras, para o cálculo da hipotenusa dos vários triângulos construídos, e a comparação das grandezas mensuradas, os alunos foram capazes de emitir conclusões interessantes como:

- "A raiz (quadrada) de 50 está entre sete e oito";
- "A raiz (quadrada) de 15 é quase igual a quatro".

Em relação a esta atividade, foi possível constatar que a experiência proporcionada com o uso do *Geogebra* facilitou a compreensão dos números irracionais e da sua visualização por parte dos alunos: dentre quatorze alunos que participaram, onze foram capazes de concluir que os números irracionais efetivamente existem e que estão situados entre dois números inteiros.

O aprendizado pela "experiência/sentido" é proposto em Bondía (2002, p. 19), o qual define como experiência:

> ... é o que nos passa, o que nos acontece, o que nos toca. Não o que se passa, não o que acontece, ou o que toca. A cada dia se passam muitas coisas, porém, ao mesmo tempo, quase nada nos acontece. (p. 21)

A definição de Bondía conduz à reflexão sobre o ensino-aprendizagem tradicional em sala de aula onde, muitas vezes, operações fundamentais com números irracionais são empurradas aos alunos em forma de regras, ainda que a maioria sequer consiga compreender que números irracionais são números.

Por outro lado, através da experiência na Oficina, a classe vivenciou a descoberta deste conjunto numérico. A maioria se sentiu melhor preparada para operar com elementos do conjunto, simplesmente pelo fato de ter assimilado que números irracionais, tal como inteiros, são números. Assim, nos termos de Bondía (p.21), com a experiência prática, o estudo dos irracionais estava "lhes acontecendo", ou seja, eles passaram a compreender melhor esse conceito.

A fim de verificar o quão produtiva foi a experiência, a última aula no Laboratório, descrita a seguir, foi de exercícios com números irracionais.

9. Atividade 4 – Exercícios sobre as atividades anteriores.

A última atividade do Projeto foi dedicada à verificação da aprendizagem e consistiu de três exercícios a serem resolvidos com o auxílio do *Geogebra*, elencados a seguir:

- 1 - Encontre a hipotenusa de cada um dos triângulos retângulos abaixo e, utilizando o *Geogebra*, coloque-as em ordem crescente.

  a. Triângulo 1: Catetos 3 e 6
  b. Triângulo 2: Catetos 4 e 5
  c. Triângulo 3: Catetos 2 e 7
  d. Triângulo 4: Catetos 4.5 e 4.5

- 2 - Encontre a hipotenusa de triângulos retângulos de catetos do mesmo tamanho.
  a. Triângulo 1: Catetos iguais a 2
  b. Triângulo 2: Catetos iguais a 3
  c. Triângulo 3: Catetos iguais a 4

Desafio: qual a relação entre o tamanho da hipotenusa e o tamanho dos catetos neste tipo de triângulo?

- 3 - Construa o triângulo retângulo com lados de comprimento igual a 3, 4 e 5 unidades, e responda:

  a. O que acontece com a hipotenusa quando o valor de cada cateto é duplicado? Quando é triplicado?
  b. Quando é multiplicado por quatro?

No tempo previsto para a atividade (uma hora), os alunos conseguiram resolver bem os exercícios. Contudo, apenas alguns responderam corretamente ao desafio, ou seja, que a razão entre a hipotenusa e um cateto de um triângulo retângulo isósceles é igual a $\sqrt{2}$.

10. Considerações Finais

O Projeto de Ensino permitiu constatar que os alunos que não participaram da experiência, salvo exceções, tiveram mais dificuldade em compreender os números irracionais.

A Oficina foi realizada em quatro encontros, com atividades de uma hora de duração, equivalente a cinco períodos de aula, com a participação ativa dos alunos proporcionada pelo uso do software *Geogebra*. O estudo de números irracionais em aulas expositivas se estendeu durante um bimestre letivo (mais de vinte períodos). A diversidade da metodologia, utilizada para alcançar o mesmo propósito, apontou que a experiência proporciona mais, em menos tempo. Contudo, a aprendizagem só acontece se o aluno estiver aberto para a experiência.

A preocupação em "vencer o conteúdo"...

> ...parar para pensar, parar para olhar, parar para escutar, pensar mais devagar, olhar mais devagar, e escutar mais devagar; parar para sentir, sentir mais devagar, demorar-se nos detalhes, suspender a opinião, suspender o juízo, suspender a vontade, suspender o automatismo da ação, cultivar a atenção e a delicadeza, abrir os olhos e os ouvidos, falar sobre o que nos acontece, aprender a lentidão, escutar aos outros, cultivar a arte do encontro, calar muito, ter paciência e dar-se tempo e espaço. (BONDÍA, 2002, p. 24).

Estas palavras também devem ser motivadoras para o professor, para que sua regência também seja uma experiência. Em sua obra, Bondía (2002, p.21-24) destaca quatro entraves à experiência: necessidade de informação, necessidade de formar opinião, falta de tempo e muito trabalho. O discurso do educador de que "não há tempo, é necessário vencer o conteúdo" mostra uma visão da educação que anula a experiência. A preocupação excessiva do professor em vencer o conteúdo, acompanhada da quantidade de informação e de trabalho, se contrapõe à oportunidade de propiciar a aprendizagem pela experiência e de efetivamente construir o conhecimento proposto.

Referências:

BONDÍA, Jorge L. **Notas sobre a experiência e o saber da experiência**. Revista Brasileira de Educação. N° 19 (Jan/Fev/Mar/Abr), 2002, p. 20-28.

DANTZIG, Tobias. **Number: The Language of Science**. Free Press. Nova Iorque, 1954 reeditado em 1967.

DEVLIN, Keith. **O Gene da Matemática**. Editora Record. Rio de Janeiro, 2004. 349 p.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática.** Campinas: Autores associados, 2006.

MELO, Severino Barros de. A compreensão do conceito de números irracionais e sua história: um estudo junto a alunos dos cursos de ciências exatas. **Revista Symposium**, Recife, v. 3, n. 1, p. 27-36, Jan-Jun/1999. Disponível em: <http://biblioteca.ricesu.com.br/art_link.php?art_cod=1512> Acesso em: 05 Jun 2008.

PIAGET, Jean. **Biologia e Conhecimento**. 2ª Ed. Vozes: Petrópolis, 1996. p. 13.

TAFNER, Malcon. **A construção do conhecimento segundo Piaget**. Disponível em: http://www.cerebromente.org.br/n08/mente/construtivismo/construtivismo.htm (acesso em 17-06-2008)