

O USO DE MATERIAIS CONCRETOS PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Amanda Bandeira Xavier
Universidade Federal Fluminense
amandaxavier91@msn.com

Mariana do Nascimento Fuly
Universidade Federal Fluminense
mari_fuly@yahoo.com.br

Resumo:

De forma sintética, pode-se afirmar que o objetivo deste pôster é uma proposta de atividades didáticas para a construção do conceito de radiano e dos gráficos das funções trigonométricas mais elementares, a partir do uso de materiais concretos. Visto que, torna-se fundamental que a construção do conhecimento para os alunos aconteça mediante uma aprendizagem significativa, logo constatamos que o uso de materiais manipulativos mostra-se uma ferramenta eficaz. Primeiramente, foi feita uma introdução histórica, onde verificou-se o surgimento da problemática que envolve as definições angulares e as questões pedagógicas que nos serviram como referencial teórico para a elaboração do trabalho, as quais culminaram na confecção de novos artefatos para o ensino de trigonometria. Após a fase de preparação e produção dos materiais, tornou-se possível a aplicação em instituições públicas da cidade de Niterói, Rio de Janeiro, onde alcançamos respostas positivas referentes ao uso de tais materiais.

Palavras-chave: ângulos; radiano; funções trigonométricas.

1. Introdução

Comparar e medir são questões que acompanham o homem desde a antiguidade. As unidades de medidas mais primitivas das quais se têm notícia tomam como referência o próprio corpo humano. Mãos, pés e braços eram utilizados para dimensionar comprimentos e áreas. Foi com o passar do tempo e com o avanço das construções no Egito, que surgiu a necessidade de padronizar essas unidades e, para isso, foram criadas então as primeiras régua e cordas com nós para medidas de comprimento assim como, os babilônios já haviam desenvolvido um sistema numérico de base 60 para medir ângulos. Porém, tanto na pré-história, quanto na antiguidade, não existiam conceitos de ângulos como os que temos nos dias de hoje, havia apenas ideias intuitivas (LORENZONI, 2003).

Os problemas relacionados à astronomia, agrimensura e navegação favoreceram o surgimento da trigonometria na Grécia por volta dos séculos IV e V a.C., sendo estas as primeiras ciências a introduzirem o estudo de medidas angulares como uma aplicação matemática. De lá para cá, segundo Kennedy (1992), diferentes definições de ângulos foram adotadas por inúmeros pesquisadores. Em sua obra, os *Elementos*, Euclides define que “um ângulo plano é a inclinação de duas retas que num plano têm um extremo comum e não estão em prolongamento”, enquanto Aristóteles faz indagações se o ângulo é uma quantidade, qualidade ou relação. Mais tarde, H. Schotten sumariou as definições de ângulos em três tipos: a diferença de direção entre duas linhas retas; medida de rotação; e a porção do plano contida “entre” as duas retas que o definem.

O termo *radian* (radiano) aparece pela primeira vez em trabalhos independentes do matemático Thomas Muir e do físico James Thomson em 1873. Atualmente, essa unidade foi adotada como padrão pelo Sistema Internacional.

No âmbito pedagógico, Cury e Vianna (2001) nos revelam a existência de diversas definições de ângulos e radianos presentes nos livros didáticos e afirmam que, tal heterogeneidade, dificulta a compreensão desse conceito tanto para alunos como para professores. Além disso, essa questão está diretamente relacionada aos interesses daqueles que a fornecem. Para ilustrar essa distinção, observamos que a definição angular dada por Euclides é totalmente pertinente às questões da geometria plana ao passo que, nos movimentos circulares, torna-se inadequada e obsoleta.

Nessas abordagens, ainda são omitidas questões relevantes, tais como: O que é radiano? Porque o seu uso é necessário? Esses e outros questionamentos acabam sendo omitidos a fim de facilitar e agilizar o trabalho tanto daqueles que ensinam, quanto daqueles que aprendem, embora acabe por acarretar uma série de problemas subsequentes, isto é, problemas no entendimento e na construção dos gráficos das funções trigonométricas mais elementares.

Esses conflitos começam a se destacar à medida que os conteúdos avançam. Alguns livros didáticos sequer fazem distinção entre a relação da razão trigonométrica seno e a função real circular seno, fato que contribui claramente para erros conceituais.

No momento em que o nosso grupo recebeu a proposta de desenvolver um projeto que envolvia diretamente o tema radiano, percebemos que, embora estudante da graduação ainda encontrávamos dificuldades para responder uma pergunta essencial: “O que é radiano?”.

Notamos que, assim como nós, a maioria dos alunos, e até mesmo alguns professores, confundem o conceito radiano com um mero algoritmo de conversão para graus.

Portanto, o primeiro objetivo deste projeto é apresentar o conceito do radiano de forma significativa e em seguida realizar uma proposta de atividades para a construção das funções trigonométricas através de materiais concretos, destacando a importância do Radiano como a unidade de medida angular pertinente à definição das funções reais circulares. Para tanto, vemos no material concreto uma ferramenta capaz de ilustrar e auxiliar na construção desse conhecimento, levando o aluno a um aprimoramento e amadurecimento teórico.

2. Metodologia e descrição dos materiais de apoio e das atividades

O material didático produzido consiste de 3 fichas de atividades e 3 kits de materiais concretos produzidos pelos autores.

Para a realização da primeira ficha de atividade distribui-se para os alunos um kit contendo: três círculos de papel cartão com três cores distintas medindo 6 cm, 8 cm e 10 cm (cf. figuras 1 e 2); percevejos; barbante; cola branca; régua, além de uma ficha de acompanhamento.

Nesta etapa, dividimos a turma em duplas e em seguida distribuimos o kit contendo o material a ser utilizado. Com base nas instruções contidas na ficha de acompanhamento, conduzimos os alunos a intuirmos e, por fim, construirmos a definição de radiano.

Na figura 1 vemos as demarcações dos arcos que correspondem à medida do raio de cada um dos círculos, feitas mediante instruções contidas no primeiro exercício da ficha de acompanhamento, e a partir deste processo de construção, o aluno agrega ferramentas suficientes para compreender o conceito de radiano. Na figura 2, mostra-se um modelo ideal de organização dos círculos de forma concêntrica, onde é possível verificar que, apesar das construções ocorrerem em círculos distintos, os ângulos delimitados por elas são iguais.

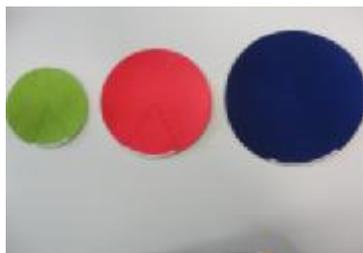


Figura 1 – foto das partes do material



Figura 2 – foto do material produzido

Para o desenvolvimento das atividades da segunda ficha foi confeccionado um transferidor feito de papel cartão (cf. figura 3) com duas graduações, sendo a exterior em radianos e a interior em graus, positiva e negativa.

Após dividirmos a turma em duplas, distribuimos o transferidor, com o qual é possível realizar as conversões propostas na ficha de atividades que o acompanha.

A segunda ficha de atividades é composta por cinco exercícios, nos quais buscamos fugir do método habitual de converter valores de ângulos arbitrários com auxílio da regra de três. Nossa proposta é fornecer aos alunos uma ferramenta que valorize visualização. Desta forma, propomos aos alunos que realizem transformações de medidas em graus em radianos, ou vice-versa, apenas utilizando-se a manipulação do transferidor construído.



Figura 3 – foto do transferidor

Julgamos o uso do transferidor fundamental. Este instrumento age como um elemento facilitador que permite ao aluno realizar as conversões de forma empírica, tornando-se, no processo didático, um importante elemento intermediário para se chegar ao tradicional uso da regra de três. Nos dois últimos exercícios dessa ficha de trabalho, os alunos são convidados a utilizarem a regra de três. Nesses exercícios consideram-se também valores não usuais para serem convertidos (por exemplo, converter 3 radianos para graus ou π graus para radianos). O objetivo aqui é causar estranhamento por parte dos alunos, de modo a quebrar alguns mitos cristalizados no processo didático como, por exemplo, $\pi=180$.

E finalmente, para a realização das atividades da terceira ficha foi elaborado um material didático de apoio para a construção dos gráficos das funções trigonométricas seno e cosseno. Trata-se de uma adaptação em termos de material concreto da ideia apresentada no

applet da atividade da função seno disponível no banco de aplicativos do CDME em <http://www.uff.br/cdme/fttr/fttr-html/fttr-seno-rad-br.html>.

A produção do material elaborado é de baixo custo, consiste em uma malha feita de papel milimetrado na qual, encontrasse impresso um círculo trigonométrico marcado por pontos usuais, acoplado a um barbante localizado no ponto zero do círculo que permitirá, através de dispositivos mecânicos, registrar as medidas dos arcos em radianos e das medidas trigonométricas correspondentes a tais arcos, de modo que o aluno possa traçar pelo menos um período de cada gráfico das funções seno e cosseno, mostrando a relação direta entre o círculo trigonométrico e a representação dos valores associados a ele no plano cartesiano. Para ensinar a manipular o material e realizar as atividades, o material foi acompanhado de uma ficha de controle.

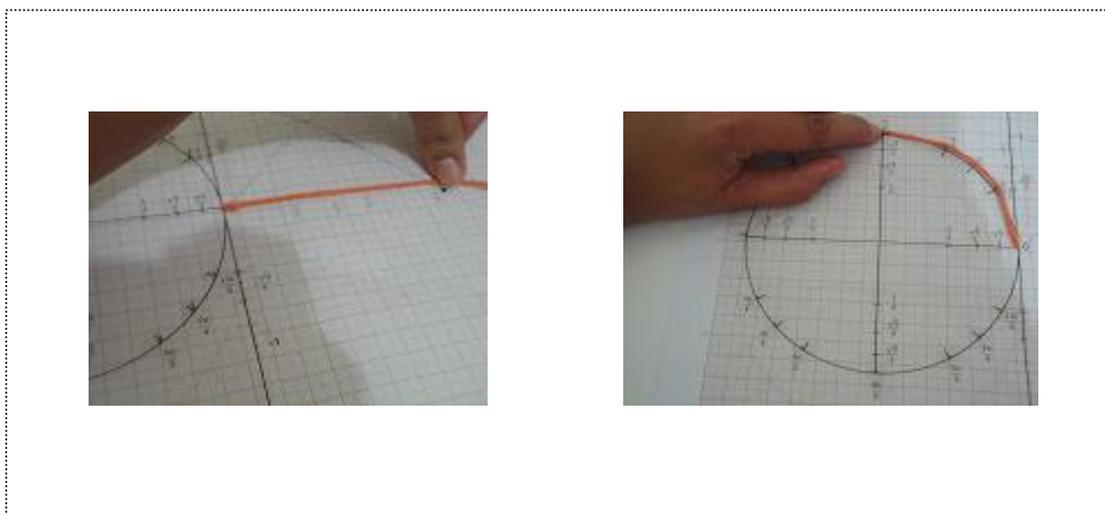


Figura 4 – aparelho produzido para a confecção dos gráficos dos gráficos.

A terceira ficha de atividades visa à construção dos gráficos das funções seno e cosseno por meio do material construído e disponibilizado. Desse modo, a ficha apresenta um roteiro com instruções de como o aluno deverá proceder a fim de realizar a marcação dos pontos. A ideia é que o aluno obtenha o gráfico dessas funções por um processo de exaustão de linhas poligonais traçadas passo-a-passo por meio do uso do material.

A primeira etapa consiste em marcar alguns pontos do gráfico. Com o auxílio do barbante, o aluno deverá medir o comprimento dos arcos que tem os valores expressos no círculo trigonométrico, transportá-los para o eixo das abscissas fixado no papel *milimetrado* e verificar se tais valores coincidem com os valores que já estão marcados na folha (cf. figura 4).

Em seguida, com o auxílio das linhas do papel *milimetrado*, e tomando como referência as medidas já marcadas nos eixos do ciclo trigonométrico, o aluno deverá marcar com um pequeno ponto a medida do seno correspondente a cada um dos ângulos expressos no eixo das abscissas (cf. figura 5).

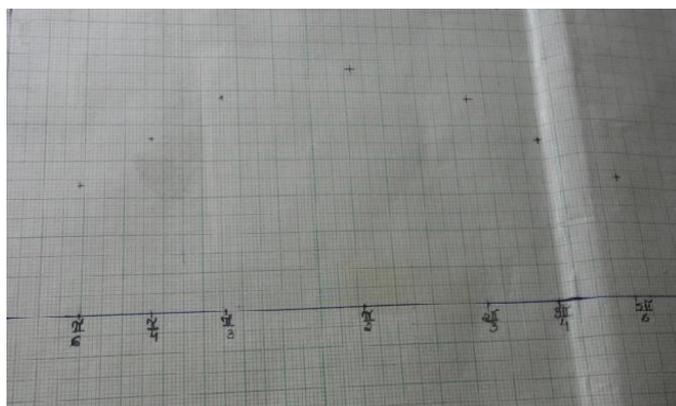


Figura 5 – marcação dos pares ordenados da função seno.

Na terceira etapa, solicitamos que o aluno una cada um dos pontos marcados ao seu consecutivo utilizando segmentos de reta e recomendamos que façam as marcações usando um lápis sem pressioná-lo. Como resultado obtém-se uma primeira aproximação grosseira do seu gráfico.

Dando continuidade, solicitamos a marcação de mais pontos, entretanto, desta vez o aluno terá a liberdade de escolher mais três pontos dentro de um intervalo, como por exemplo $(0, \frac{\pi}{6})$, e proceder de maneira análoga à marcação dos primeiros pontos.

Este procedimento deverá ser repetido para todo o período e em intervalos cada vez menores, de maneira que o aluno possa perceber que esta função torna-se uma curva, visto que os novos pontos não se encontram sobre o segmento de reta da linha poligonal anterior.

Para a construção do gráfico da função cosseno adota-se procedimento análogo.

No presente momento desenvolve-se a construção de um aplicativo interativo, utilizando-se o software Geogebra, que possibilita ao aluno construir o gráfico das funções seno e cosseno de maneira semelhante às atividades realizadas com o material concreto apresentado. O grande diferencial dessa atividade é a possibilidade de o aluno realizar, sob seu comando, o processo de exaustão das linhas poligonais um número “n” de vezes, em espaço curto de tempo. Para $n=50$, por exemplo, já se pode observar uma boa aproximação

da senoide pela linha poligonal de 50 vértices. Este processo é legítimo do ponto de vista do Cálculo.

3. Aplicação e avaliação

A primeira e a segunda parte do projeto (radiano e conversão de medidas) foi aplicada em forma de oficinas em quatro turmas do Instituto de Educação Professor Ismael Coutinho (IEPIC) e em uma turma do Ensino Médio do Colégio Estadual Aurelino Leal, em quatro turmas do Colégio Estadual Liceu Nilo Peçanha, em Niterói.

Nestas aplicações obtivemos diferentes resultados em cada uma das escolas. No IEPIC e no Colégio Estadual Aurelino Leal, as turmas já haviam realizado provas com os conteúdos que abordamos no projeto, já sabiam fazer as conversões utilizando para isso a regra de três entretanto, nenhum aluno soube responder o significado de radiano, ou até mesmo justificar a necessidade dessa nova unidade de medida.

Em todas as turmas com este perfil, notamos que, após a realização das atividades, os alunos demonstraram maior compreensão sobre o assunto, foram capazes de debater suas opiniões, e até mesmo explicar as definições que antes lhes pareciam tão complicadas.

Nas demais turmas que ainda não haviam tido contato com os conceitos da trigonometria, os professores sentiram maior facilidade em lidar com este tema nas aulas seguintes, deixando claro que as atividades propostas foram facilitadoras no processo de ensino aprendizagem.

No presente momento, finalizamos os kits necessários para a construção dos gráficos das funções trigonométricas, e estes foram apresentados para professores e estudantes de matemática na VI Semana da Matemática da UFF e em um Minicurso no XVIII EREMAT SUL.

4. Considerações finais

Com base em nossas experiências como bolsistas do PIBID UFF e incluindo nossas participações nos diversos eventos acadêmicos, tornou-se possível a elaboração dos materiais concretos de baixo custo para o ensino do conceito de radiano, da conversão de medidas de ângulos e de gráficos das funções trigonométricas seno e cosseno.

Ressaltamos mais uma vez sobre a importância de o conteúdo ser apresentado de maneira clara e objetiva, com o intuito de cercar o aluno com conceitos bem fundamentados, que não deem margem a erros gerados por definições insuficientes ou ambíguas. Para tanto, vemos no material concreto uma ferramenta capaz de ilustrar e auxiliar na construção desse conhecimento, levando o aluno ao aprimoramento dos conceitos através da motivação.

5. Referências Bibliográficas

CURY, H. N. e VIANNA, C. R. Ângulos: Uma História Escolar. História & Educação Matemática. Revista da Sociedade Brasileira de História da Matemática. V.1, Nº1, Janeiro, 2001.

KENNEDY, E. S. Trigonometria. Tópicos de História da Matemática para o Uso em Sala de Aula. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora Atual, 1992.

QUINTANEIRO, W. Representações e definições formais em trigonometria no ensino médio. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

LORENZONI, C. A. C. A. O Ângulo na Geometria Elementar: Diferentes concepções ao longo do tempo. Coleção da História da Matemática para Professor. Rio Claro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.