

## GEOMETRIA ANALÍTICA DINÂMICA

*Leonardo L. de Oliveira*  
*Universidade Federal Fluminense*  
leolisoli@ibest.com.br

*Cybelle P. B. Lara*  
*Universidade Federal Fluminense*  
cybellelara@ig.com.br

### **Resumo:**

Pela observação feita em sala de aula constatou-se uma forte desmotivação por parte dos alunos com relação aos conteúdos de geometria analítica ensinados em turmas do terceiro ano de escolas sede do Subprojeto de Matemática do PIBID-UFF. Decidiu-se, assim, utilizar o software GeoGebra para desenvolver um módulo instrucional para o estudo da circunferência abordando os tópicos: circunferência como lugar geométrico, elementos da circunferência e equação da circunferência. De acordo com seus respectivos objetivos, as atividades podem ser divididas em dois grupos distintos. O primeiro grupo tem por objetivo principal a identificação da circunferência e seus respectivos elementos principais, a partir de processos dinâmicos. O segundo grupo visa à dedução da equação reduzida da circunferência e à compreensão dos seus parâmetros. As atividades foram aplicadas em seis turmas e ainda submetidas à avaliação de professores de matemática. O material didático produzido, bem como os resultados das avaliações, será apresentado neste trabalho.

**Palavras-chave:** geometria analítica, GeoGebra, circunferência.

### **1. Introdução**

O Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) tem possibilitado a nós, bolsistas, vivenciarmos o ambiente escolar e refletirmos, por meio das observações feitas em sala de aula, sobre problemas escolares, as diferentes metodologias de ensino e como são estabelecidas as relações aluno-professor, aluno-aluno, aluno-disciplina Matemática.

Assim, a partir de nossas experiências de observação de aulas em turmas do terceiro ano do Colégio Estadual Aurelino Leal, constatou-se uma forte desmotivação por parte dos alunos com relação aos conteúdos de geometria analítica ensinados. E, com a oportunidade

oferecida pelo professor Sílvio Meirelles de realizarmos uma intervenção direta em sala de aula, decidiu-se por desenvolver um módulo instrucional<sup>1</sup> sobre o assunto circunferência, próximo assunto a ser ensinado.

O módulo Geometria Analítica Dinâmica, caracteriza-se pela construção e pelo estudo do objeto geométrico por meio de atividades dinâmicas e interativas no ambiente GeoGebra. Os tópicos abordados para este projeto inicial foram: circunferência como lugar geométrico, elementos da circunferência e equação da circunferência. Para elaboração do material foram feitas pesquisas teóricas sobre o conteúdo matemático e o software GeoGebra (IEZZI, 1977, BORTOLOSSI, 2011 e ARAÚJO, 2010).

O uso de softwares desta natureza possibilita, conforme revela Gravina (1996), a oportunidade de o aluno construir o conceito matemático por meio de um processo interativo, realizado nas seguintes etapas: experimentar, criar estratégias, fazer conjecturas, argumentar e deduzir. Tal fato é corroborado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Tal documento reforça o uso deste tipo de tecnologia no ensino da matemática como um instrumento motivador na realização de tarefas exploratórias e de investigação (BRASIL, 1999).

## **2. Atividades**

Segundo Gravina e Santarosa (1998), atividades dinâmicas para o ensino de geometria podem ser de expressão ou de exploração. Nas de expressão, os alunos utilizam os recursos computacionais para materializar suas ideias, criando modelos nos quais é possível testar experimentalmente suas concepções. Em contrapartida, nas de exploração, o modelo é apresentado pronto, não é construído a partir das convicções do aluno. Neste caso, cabe sua análise e o conseqüente desafio de compreendê-lo.

Consoante esta classificação, desenvolvemos uma seqüência didática composta por seis atividades de exploração. Estas foram desenvolvidas em ambiente computacional com auxílio do software GeoGebra.

De acordo com seus respectivos objetivos, as atividades podem ser divididas em dois grupos distintos. O primeiro grupo tem por objetivo principal a identificação da circunferência e seus respectivos elementos fundamentais, além de apresentar a

---

<sup>1</sup> Os módulos instrucionais têm os objetivos de elaborar e organizar materiais didáticos, textos educativos, roteiros de atividades e planos de aulas que possibilitem sucesso no esforço cognoscitivo e satisfação pessoal do estudante da educação básica.

circunferência a partir de um processo dinâmico. Pode-se chamá-las, então, de atividades de reconhecimento. O segundo grupo visa à dedução da equação reduzida da circunferência e à compreensão dos parâmetros de tal equação.

## 2.1 Atividade 1

Esta primeira atividade tem por objetivo principal permitir que o aluno perceba que uma sequência de pontos equidistantes da origem está sobre uma circunferência. Espera-se também que sejam identificados os elementos principais da circunferência “descoberta”, a saber: o centro, que será a origem do plano cartesiano, e o raio, que é esta distância constante mantida pelos pontos descobertos. Para o início da atividade apresenta-se ao aluno uma tela como a da figura 1.

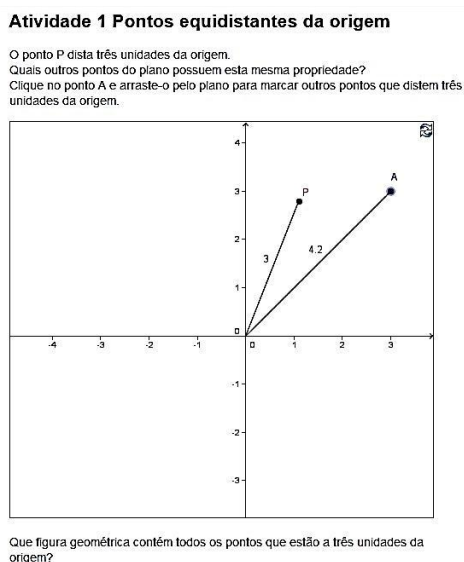


Figura 1: Atividade 1

Conforme mostra a figura 1, são apresentados dois pontos, P e A, e suas respectivas distâncias com relação à origem. Importante esclarecer que P está fixo e A pode ser movido livremente pela tela. Diz-se que P está a uma distância de três unidades da origem e é dado o comando para “arrastar” o ponto A pelo plano cartesiano a fim de identificar outros pontos com a mesma distância de P à origem. Ao encontrar um ponto com esta característica, o software marca este ponto na tela. A ideia é que o aluno realize muitas vezes esse procedimento, sendo estimulado pelo professor a navegar por todos os quadrantes do plano cartesiano. Por fim, indaga-se ao aluno sobre qual figura geométrica contém todos os pontos que distam três unidades da origem.

O professor deve atentar para que os alunos observem atentamente a origem do plano, que neste caso é o centro da circunferência, e a distância constante mantida pelos

pontos da circunferência, o raio. Isto porque é esta percepção que permitirá aos alunos definirem circunferência.

## 2.2 Atividade 2

Esta objetiva generalizar e possibilitar que o aluno perceba que o centro de uma circunferência pode ser um ponto qualquer do plano. Para tanto, é mostrada uma tela semelhante à da primeira atividade. Seu diferencial está no centro da circunferência, que neste caso não é necessariamente a origem do plano, mas qualquer ponto do plano cartesiano.

## 2.3 Atividade 3

Esta atividade visa permitir que o aluno visualize a circunferência por meio de um movimento de rotação. Apresenta-se ao aluno uma tela como a da figura 3.

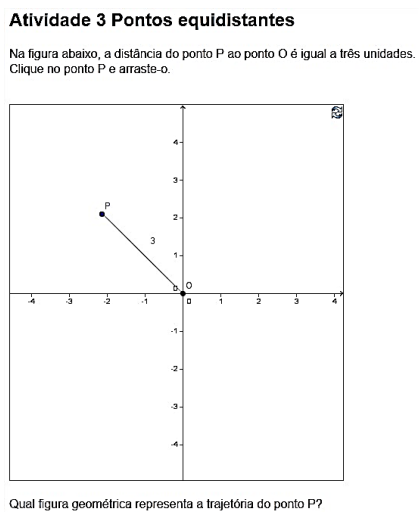


Figura 3: Atividade 3

Diz-se que o ponto P está a três unidades de distância em relação ao ponto O. São dados, então, os comandos de clicar em P e arrastá-lo. Ao arrastar, o ponto P realiza um movimento de rotação em torno do ponto O. Finalmente pergunta-se ao aluno qual figura geométrica representa a trajetória de P.

## 2.4 Atividade 4

O objetivo desta atividade é conduzir o aluno à dedução da equação reduzida de uma circunferência centrada na origem. Apresenta-se ao aluno uma tela como a da figura 4.

#### Atividade 4 Dedução da equação da circunferência

Na janela abaixo, clique e arraste o ponto P.  
Observe o triângulo retângulo OQP de hipotenusa R e catetos  $|x|$  e  $|y|$ .  
Como podemos montar uma equação para esta circunferência que associe  $x$ ,  $y$  e  $R$ ?

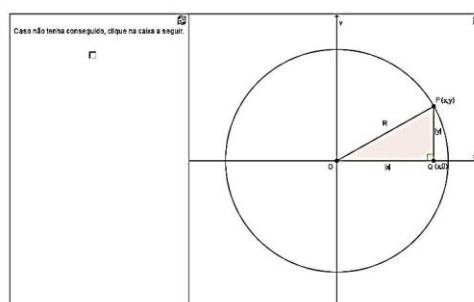


Figura 4: Atividade 4

É dito ao aluno para clicar e arrastar o ponto P de coordenadas  $(x, y)$  sobre a circunferência de centro O e raio R. Também deve ser observado que quase sempre é possível construir o triângulo retângulo OQP de hipotenusa R e catetos  $|x|$  e  $|y|$ . Ocorrem quatro exceções nas quais o triângulo OQP não existe. Quando P estiver sobre os eixos coordenados, isto é,  $(0, r)$ ,  $(-r, 0)$ ,  $(0, -r)$  e  $(r, 0)$  tem-se apenas um segmento e não o triângulo.

Pergunta-se, então, como associar as coordenadas  $x$ ,  $y$  e o raio R da circunferência por meio de uma equação. Caso deseje, é possível clicar na caixa de texto ao lado do campo geométrico para obter uma dica. Assim, aplicando-se o teorema de Pitágoras ao triângulo obtém-se uma equação.

### 2.5 Atividade 5

Esta atividade visa generalizar a situação anterior. A tela apresentada ao aluno é parecida com a da atividade anterior, seu diferencial está no centro da circunferência que não é necessariamente a origem do plano, mas qualquer ponto no plano cartesiano. Dessa maneira, pretende-se que o aluno possa determinar a equação reduzida de uma circunferência de centro arbitrário.

### 2.6 Atividade 6

O objetivo desta atividade é permitir que o aluno relacione as variações dos valores do raio e das coordenadas do centro da circunferência com as transformações geométricas da curva e as respectivas mudanças da sua equação algébrica. A alteração de cada parâmetro provoca alterações simultâneas tanto na equação quanto na circunferência

exibidas. Assim, é permitida a real compreensão do que foi deduzido nas atividades anteriores.

Inicialmente, apresenta-se ao aluno uma tela como a da figura 5. Em seguida, pede-se ao aluno que deslize os controles  $r$ ,  $a$  e  $b$ , um de cada vez, e observe o que acontece com a circunferência exibida. Por fim, pergunta-se qual o significado de cada parâmetro da equação.

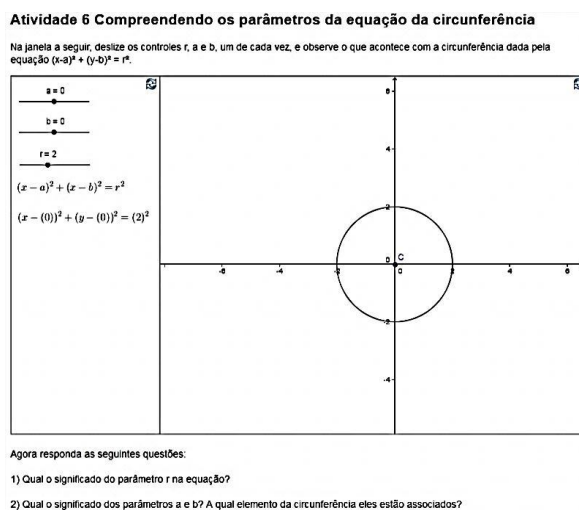


Figura 5: Atividade 6

### 3. Avaliação do módulo

O módulo foi aplicado no C. E. Aurelino Leal, em dois momentos. O primeiro foi na sala de multimídia da escola com o auxílio do *datashow* nas turmas 3004, 3005 e 3006, em 03 de outubro de 2011. Consideramos que a experiência foi bastante positiva. O professor responsável pelas turmas afirmou que na aula seguinte ele aplicou alguns exercícios sobre o assunto e a turma conseguiu responder a questões relacionadas aos tópicos ensinados.

O outro momento foi no laboratório de informática, com as turmas 3001 e 3002. A professora responsável pelas turmas revelou que não conhecia o *software* Geogebra e que gostou bastante das atividades. Ainda demonstrou interesse em ter acesso ao *software*.

O módulo também foi aplicado na turma 3000 do Colégio Estadual Baltazar Bernadino, no dia 05 de dezembro de 2012, na sala de informática da escola e em uma oficina oferecida para professores de matemática da educação básica, realizada na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia, no Colégio Estadual Liceu Nilo Pessanha, no dia 19 de outubro de 2012. Assim, com o objetivo de termos uma avaliação mais quantitativa com

relação a esses dois eventos, foram elaboradas duas fichas de avaliação baseada na escala Likert<sup>2</sup>. Para as respostas de cada item das fichas de avaliação foram contabilizadas como indo de 1 para “discordo totalmente” até 5 para “concordo totalmente”. Quando o *status* do item estiver entre os valores 4 e 5, diremos que o item encontra-se no *nível de concordância*; quer dizer, os entrevistados concordam (parcialmente ou totalmente) com a afirmação enunciada no item.

Na realização da atividade no C.E. Baltazar Bernadino, os próprios alunos responderam o questionário.

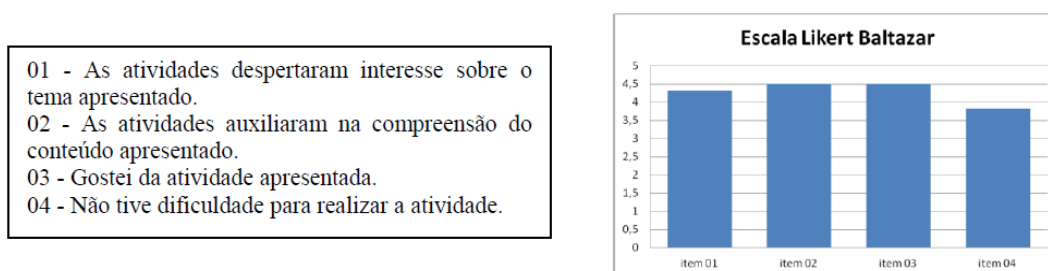


Figura 6: Avaliação C. E. Baltazar Bernadino

Com base no gráfico pode-se concluir que houve boa aceitação por parte dos alunos, pois o único item que não atingiu o nível de concordância foi o item 04. Entretanto, a média alcançada (maior que 3,5) está bem próxima da zona de concordância. Note-se ainda que algumas dificuldades detectadas estavam relacionadas ao manuseio do software (arrastar o ponto, por exemplo) ou do próprio computador. Além disso, com base na média alcançada pelo item 2, pode-se inferir que as dificuldades encontradas por alguns desses alunos não interferiram de forma decisiva na compreensão do conteúdo apresentado.

Para a avaliação da oficina da Semana Nacional de Ciência e Tecnologia, realizada com professores de matemática da educação básica, foi feita uma adaptação do questionário original. Os resultados encontram-se descritos na figura a seguir.

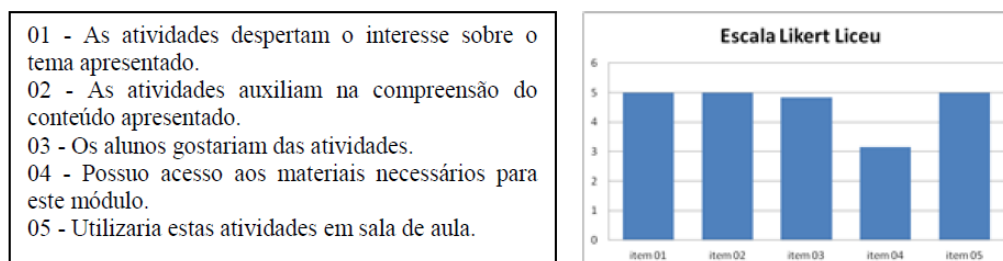


Figura 7: Avaliação Liceu Nilo Peçanha

<sup>2</sup> Escala psicométrica bem conhecida utilizada para a realização de pesquisas de natureza quantitativa. A escala procura estabelecer o nível de concordância ou discordância com uma declaração dada.

Baseado nos dados coletados é possível concluir que o módulo foi bem avaliado, pois só o item 04 que não atingiu o nível de concordância. Isso ocorreu principalmente porque a maioria dos professores sequer conheciam o GeoGebra.

#### **4. Considerações Finais**

Ainda que tenham sido trabalhosos a elaboração e o refinamento das atividades, acreditamos que foi compensador. Ao verificarmos o entusiasmo da maioria dos estudantes e os resultados alcançados, consolidamos a confiança de que este tipo de *software* contribui bastante para um aprendizado mais significativo.

Além disso, no que toca aos procedimentos adotados na realização das atividades, percebeu-se que a interação dos alunos com as atividades é maior com o uso do laboratório de informática. No entanto, para turmas com mais de que 15 alunos, a presença de alguém para auxiliar na realização das atividades foi providencial.

#### **5. Agradecimentos**

Agradecemos ao PIBID, pelo apoio financeiro, e aos professores Wanderley Rezende e Bruno Dassie pela orientação desse trabalho.

#### **6. Referências**

ARAUJO, L. C. L. *Aprendendo Matemática com o Geogebra*. São Paulo: Exato, 2010.

BORTOLOSSI, H.J. Instituto *GeoGebra* no Rio de Janeiro. Disponível em <http://www.geogebra.im-uff.mat.br>. Acesso em 28 de setembro de 2011.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - Ensino Médio*.. Brasília: MEC/SEB, 1999.

GRAVINA, M. A. *Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria*. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO. 7. 1996. Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p.1-13. Belo Horizonte, Brasil, 1996.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. *A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados*. In: IV CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE INFORMÁTICA NA



EDUCAÇÃO, 1998, Brasília. Ata... Brasília, 1998. Disponível em: <[http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/artigos/artigos\\_index.php](http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/artigos/artigos_index.php)>. Acesso em: 14 de jan. de 2013.

IEZZI, G. *Geometria Analítica*. Fundamentos da Matemática Elementar. V.7. São Paulo: Atual Editora, 1977.