

EXPLORANDO FENOMENOS PERIÓDICOS

Wellerson Quintaneiro da Silva
Cefet-RJ / Uniban
profmatwellerson@gmail.com

Janete Bolite Frant
Uniban
janetebf@gmail.com

Arthur B. Powell
Rutgers University
powellab@andromeda.rutgers.edu

Resumo:

Este mini curso oferece um roteiro de atividades que busca levar os participantes a refletir sobre exploração física de movimentos periódicos. A fundamentação teórico segue a noção de que conceituar está relacionado com categorizar, que por sua vez está articulado com nossas experiências no mundo. Essa ideia é relacionada com a Teoria da Cognição Corporificada, que relacionará a produção de conceitos e as interações tecnológicas e pessoais que propomos. Inicialmente provocaremos as discussões a partir de observações de gráficos “distância *versus* tempo” gerados com sensores de movimento. Posteriormente, partir de problemas envolvendo movimentos circulares, explorando applets que desenvolvemos, visamos uma reflexão sobre a natureza de diferentes gráficos. Finalmente trazemos atividades de campo que compõe a investigação de doutorado em andamento do primeiro autor, realizada com estudantes de ensino médio, a fim de observar a implicação do tipo da abordagem proposta, na pesquisa, aprendizagem e ensino em trigonometria.

Palavras-chave: Cognição Corporificada; Movimento Periódico; Gráficos Trigonométricos.

1. Introdução.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sugerem que deve ser assegurado ao aprendiz a compreensão de aplicações em trigonometria. No entanto, muitos estudantes e professores apresentam dificuldades de entendimento desse tópico. Nesse trabalho procuramos focar na articulação de funções trigonométricas com fenômenos físicos de movimento.

Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na *construção de modelos que correspondem a*

*fenômenos periódicos. Nesse sentido, um projeto envolvendo também a Física pode ser uma grande oportunidade de aprendizagem significativa.*¹

(PCN 1998, p. 44)

Sobre ensino ou aprendizagem em trigonometria, observando alguns trabalhos na literatura (Weber, 2005; Fernandes, 2010; Goios, 2010; Quintaneiro, 2010; etc), vemos que esse problema tem sido estudado sobre o aspecto de investigar: a compreensão dos objetos matemáticos, a articulação dos mesmos, o desenvolvimento histórico ou epistemológico e a abordagem computacional no ensino.

No entanto, essas pesquisas focam em investigar como sujeitos entendem o objeto matemático pela sua definição, ou como se dão os processos de ensino que tem como fim promover a compreensão de tais definições matemáticas. Realizar a investigação com base em experiências (corpóreas e visuais) com fenômenos periódicos, é o principal ponto onde nossa proposta se diferencia aos trabalhos realizados a respeito de ensino ou aprendizagem em trigonometria.

Trazemos na próxima seção uma revisão de literatura a fim de dialogar com as pesquisas em ensino e aprendizagem em trigonometria e destacar alguns pontos que foram cruciais no delineamento das atividades que propomos no mini curso. Assim, apresentamos um panorama crítico da literatura porque nosso objetivo nesse artigo não é uma apresentação detalhada de descrição das atividades do mini curso que estamos propondo, mas sim uma discussão das ideias que orientam tais atividades. Dessa forma, posteriormente apresentamos nossa perspectiva, sobre desenvolvimento de conceitos em Matemática e possibilidades que vislumbramos com o uso da tecnologia para desenvolvimentos de alguns conceitos em trigonometria. Concluímos explicitando a natureza do minicurso que estamos propondo.

2. Revisão de literatura: panorama crítico.

Nessa seção, apresentamos um breve panorama crítico de pesquisas sobre ensino ou aprendizagem em trigonometria. Embora apresentemos alguns trabalhos, ressaltamos que são poucos nessa direção, mesma funções trigonométricas compondo uma importante parte do currículo da educação básica, como destaca Weber (2005), pois se mostra como pré requisitos para tópicos de Física Newtoniana, Arquitetura, Agrimensura e muitos ramos da Engenharia.

¹Grifo nosso.

Mesmo com essa ressalva logo no início do seu trabalho, em Weber (2005), a proposta de abordagem não tem foco em experiências concretas no sentido de estarem aplicadas nos contextos da Física, Arquitetura, Engenharia e etc. A proposta de Weber está na busca da compreensão dos objetos matemáticos via processo de obtenção de cálculos. Weber (2005) argumenta que valores e expressões numéricas em trigonometria frequentemente têm como pano de fundo os processos geométricos para a obtenção dos mesmos e indica ter observado uma melhor compreensão em estudantes quando foram submetidos a uma instrução sob o prisma de processo-objeto, no sentido de Gray e Tall (1994).

Embora sob outros prismas teóricos e com uma diferente base metodológica, o trabalho de Quintaneiro (2010) parece ter em comum com os resultados descritos em Weber (2005) o fato de compreensão matemática via manipulação de procedimentos e consequentes processos, uma vez que Quintaneiro (2010), utilizando um software de geometria dinâmica, propõe atividades apoiadas na conversão e tratamento de registros - algébrico e geométrico, radiano e grau, decimal e com uso do π , etc - no sentido de Duval (1993). A problemática de tal pesquisa se originou na observação de diferentes conflitos, potenciais e cognitivos (com base nas ideias teóricas de Tall & Vinner, 1981), quando era utilizado, por exemplo, o símbolo π , pois muitos participantes - professores - da pesquisa pareciam não compreender quando π indicava o seu valor real (números reais), ou quando, na unidade radiano, indicava 180° . Questões desse tipo implicavam respostas como abscissa 10, relativo ao ponto $\left(\frac{\pi}{18}, 1\right)$ na função real $f(x) = \text{sen}(9x)$. Levando em conta a análise de um livro, Quintaneiro (2010) indica também que apresentação, com os tipos de representação utilizados na escola, pode favorecer diversos fatores de conflito potencial relativos ao conceito de seno, pois gráficos, como o que segue abaixo, parecem não favorecer a compreensão da variável independente nas funções trigonométricas, uma vez que não trazem uma escala decimal no eixo das abscissas.

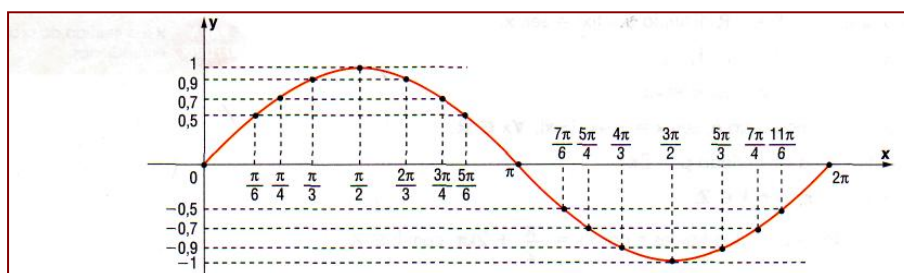


Figura 1: Gráfico Seno (Dante 2008 in Quintaneiro 2010, p. 57)

O trabalho de Kang (2012) parece corroborar com essas ideias, pois relata que muitos dos licenciandos (60%) em Matemática por ele investigados mostraram não compreender a definição de função seno, uma vez que, por exemplo, em $y = \text{sen } x$ não apresentavam uma explicação adequada da variável x , quanto a sua natureza (medida angular, número real, etc.). Essa problemática, relativa à incompreensão da variável independente nas funções trigonométricas, parece ser vista até em pesquisas que se propõem a oferecer “ferramentas” para o ensino da trigonometria. Por exemplo, em Fernandes (2010, p.109) observamos um gráfico como o da figura acima, o que não corresponde ao gráfico das funções reais trigonométricas que o trabalho se propunha a oferecer ferramentas para o ensino.

A ausência de representação decimal no eixo horizontal, e possível consequente má interpretação das variáveis da função, parece ser enfatizada também por alguns outros materiais, disponibilizados inclusive por órgãos governamentais, como um que pode ser visto no RIVED (Rede Internacional Virtual de Educação)². Goios (2010) investiga aprendizagem em aulas de trigonometria via recursos digitais, aplicando e analisando o uso de alguns applets disponíveis no Rived. Goios (2010) busca analisar a produção de significados e as metáforas conceituais apresentadas pelos alunos durante essas aulas. Com base na perspectiva de apoiadas na perspectiva de metáforas conceituais, segundo Lakof & Núñez (2000), conclui que as intervenções e as metáforas conceituais utilizadas pelos alunos foram fundamentais para o desenvolvimento de conceitos trigonométricos.

Com mais foco em observar como se dá a compreensão dos conceitos, Kendal e Stacey (1997), chamam a atenção para dois métodos introdutórios de ensino de trigonometria no que tange a definição de seno e cosseno: como razões de lados de triângulos e como coordenadas de um ponto sobre a circunferência unitária. Observaram nas suas investigações que os alunos que aprenderam trigonometria no contexto de um modelo de triângulo retângulo tiveram um desempenho melhor em um pós-teste, do que os que aprenderam sobre o assunto utilizando um modelo de círculo unitário. Sob outras perspectivas, podemos observar pesquisas que tem como objetivo principal observar se estudantes têm domínio de conceitos matemáticos, tendo, por exemplo, como problema

²Ver gráfico de Seno em Rived apresentado em Goios 2010, p. 77.

norteador “*Como varia o domínio de conceitos trigonométricos, revelado por alunos de diferentes anos de escolaridade?*” (Antunes & Gonzáles, p. 2).

3. Nossa perspectiva.

Observando o panorama apresentado na seção anterior, destacamos a apresentação de uma dificuldade de compreensão da variável independente em gráficos trigonométricos. Esse fato é um ponto central da nossa proposta de atividades e destaca como estas se diferem de pesquisas anteriores. Propomos nesse trabalho atividades que levem o participante a uma reflexão sobre questões gráficas envolvendo o tempo – e consequentemente valores decimais - como variável, uma vez que pensamos ser mais natural associar a reta real a tempo que a ângulos (mesmo que no contexto de seus valores numéricos, na unidade radiano).

Sendo de nosso interesse, investigações a respeito de como as pessoas pensam a respeito de gráficos envolvendo fenômenos periódicos, a segunda autora, durante uma dinâmica realizada com professores, fez a seguinte indagação: *Como ficaria o gráfico cartesiano da distância ao chão, de uma pessoa sentada numa roda gigante, em relação ao tempo?* Um ponto de destaque, que nos motivou nesse trabalho, foram duas respostas, em particular, que podem ser observadas a seguir:

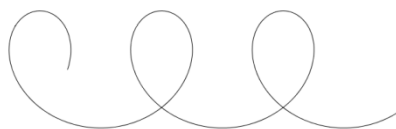


Figura 2



Figura 3

Esses dois gráficos mostram-se importantíssimos, pois pensamos que podem trazer possíveis causas de dificuldades de compreensão de fenômenos periódicos, modelados por funções trigonométricas.

Levando em consideração o panorama de pesquisas apresentado, observamos que os trabalhos parecem não dar conta de interpretar respostas como as dadas acima, pois em geral esses focam na compreensão dos objetos matemáticos, pelas suas definições formais. Por isso partimos aqui do prisma que a definição formal matemática de um objeto pode fazer parte do conceito que temos desse objeto, mas que conceituar abrange outros aspectos que não só definir.

Sob perspectiva teórico do *Embodiment* a forma na qual pensamos e agimos está diretamente relacionada com o nosso sistema conceitual (Lakoff & Johnson, 1999). Para

Lakoff e Johnson (1999), nós categorizamos como fazemos por causa do nosso corpo e cérebro, dada a forma como interagimos com o mundo. Nessa direção as interações do corpo e cérebro com o ambiente promovem o sentido do que é real.

Rosh (1999) traz críticas à visão clássica cartesiana onde conceito é definição. Nessa visão, conceituar não se dá pelo estabelecimento de relações lógicas. Rosh argumenta que processar sequencias lógicas não significa entendê-las. Para a autora conceitos são pontes neurais entre a mente e o mundo, e assim, conceituar exige situações concretas complexas. Adotamos a definição dada por Rosch (1999, p. 61), onde conceitos constituem um aspecto de estudo de categorização, uma das funções básicas dos seres vivos. Nessa perspectiva, conceituar está relacionado com categorizar, que por sua vez está articulado com nossas experiências.

Ramscar et al. (2010) argumentam que domínios mais abstratos podem ser compreendidos através de extensões analógicas de domínios baseados na experiência. Ramscar et al. (2010) descrevem uma série de estudos onde indicam que: (a) a compreensão das pessoas sobre o tempo vem do pensamento sobre experiências concretas de movimento no espaço; (b) a maneira como as pessoas pensam sobre o tempo pode também ser influenciada por um tipo não literal de movimento, chamado movimento fictício.

Conjeturamos que as ideias associadas a compreensão de gráficos, relativos à movimentos de fenômenos periódicos, podem estar relacionadas à forma como compreendemos a “passagem de tempo” nesses movimentos. Pensamos também, que por sua vez, essa noção abstrata de tempo, pode recrutar as ideias adquiridas de experiências com o mundo físico, sendo (até inconscientemente) associada a uma translação horizontal, caracterizando a ideia de movimento fictício.

Considerando a circunferência em **negrito** rolando em um plano, sem deslizar, então a curva descrita por um ponto dessa circunferência é chamada de cicloide. No caso da curva rosa é uma cicloide longa. O que queremos chamar a atenção é que essa curva é obtida pela trajetória de um ponto que sofre uma translação composta com uma rotação. Na figura 4, a curva vermelha representa a trajetória da cadeira vermelha, assim a diferença é que no caso da roda gigante a rotação pode se dar no sentido anti-horário.

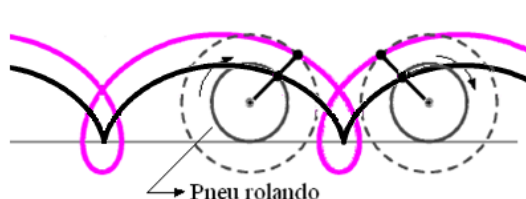


Figura 3

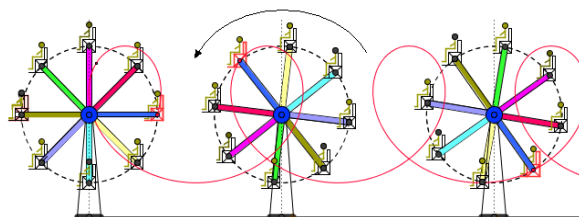


Figura 4

Levando em consideração a necessidade de uma translação horizontal para obtenção desse tipo de curva, conjecturamos que quem fornece uma resposta dessa pode estar fazendo uma simulação cognitiva. Assim, convergimos com as ideias de Ramscar, de que as pessoas podem recrutar conceitos adquiridos de experiências do mundo físico (deslocamento horizontal) para dar sentido a conceitos mais abstratos (como o tempo). E ainda, retomando nossa revisão de literatura, concluímos que tomar o tempo como uma das variáveis para a discussão de gráficos trigonométricos, pode propiciar uma compreensão da natureza real da variável independente da função.

4. Considerações Finais

Não se insere como objetivo em nossas atividades, por exemplo, simplesmente conduzir as pessoas à resposta (ao gráfico) adequada de qual é a curva da pessoa, na roda gigante em movimento, em relação ao tempo. Pretendemos explorar como os sujeitos percebem a natureza de diferentes gráficos oferecidos como respostas. Dado nosso prisma teórico, a reflexão sobre outras curvas, pode favorecer o desenvolvimento de diferentes limites de categorias e, conseqüentemente, enriquecer um conjunto de experiências que pode nos levar a delimitar as que estão relacionadas com determinado conceito.

Uma questão que se levanta é: Como criar possibilidades de exploração que promovam discussões das respostas obtidas? Isto é, como discutir sobre movimento fictício um movimento, que ao menos até ser materializado, não existe? Pensamos que esta possibilidade pode ser alcançada com o computador, e no caso de alguns fenômenos periódicos, com o uso de applets, que estão sendo desenvolvidos na tese de doutorado do primeiro autor. Dessa forma propomos um minicurso que visa explorar fenômenos periódicos, não só com aplicativos computacionais, mas também utilizando calculadoras gráficas com sensores de movimento. A ideia é proporcionar um conjunto de experiências, que propiciem discussões e reflexões sobre aspectos que observamos como importantes no desenvolvimento de conceitos gráficos relacionados à trigonometria, que não se restringe à

discussão de definições matemáticas, mas que também leva em conta as dificuldades que observamos na literatura para compreensão desse. A dinâmica do minicurso consistirá na discussão entre os participantes acerca da exploração dos recursos tecnológicos, dadas as questões que serão levantadas por nós e pelos próprios participantes.

5. Agradecimentos

Nossos agradecimentos à Capes pelo subsídio às nossas investigações através da bolsa de sanduiche, processo número 8934/12-6.

6. Referências

ANTUNES, A. M. F., GONZÁLES, R. L. **Análise do domínio de Conceitos Trigonométricos: Estudo Exploratório realizado com alunos do Ensino Básico ao Superior de Escolas de Beja.** <http://www.uv.es/apregeom/archivos2/FigueiredoLuengo02.pdf>. Último acesso em 04/04/2010.

FERNANDES, R. U. **Estratégias pedagógicas com o uso de tecnologias para o ensino de trigonometria na circunferência.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – FCET. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2010.

GOIOS, D. F. **Potencialidades didático-pedagógicas de um objeto para aprendizagem: Uma análise através da Teoria da Cognição Corporificada para o ensino de trigonometria.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo. São Paulo, 2010.

KANG, O. K. **A New Way to Teach Trigonometric Functions.** Sungkyunkwan University. <http://www.icme-organisers.dk/tsq09/OkKiKang.pdf> (Último acesso em: 04/04/2012).

KENDAL, M., STACEY, K. (1997). **Teaching trigonometry.** Vinculum, 34(1), 4–8.

KUPKOVÁ, E. **Developing the Radian Concept Understanding and the Historical Point of View.** p 73 - 85. Itália: Scienze Matematiche n°18, 2008

LAKOFF, G., JOHNSON. M. **Philosophy in the flesh: The embodied mind and its challenge to Western thought.** New York: Basic Books. 1999

MEC. **Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio) – Parte III: Ciências da Natureza Matemática e suas tecnologias.** Brasil.1998

QUINTANEIRO, W. **Representações e Definições Formais em Trigonometria no Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2010a.

RAMSCAR, M., MATLOCK T.,BORODITSKY. **Time, Motion, and Meaning: The Experiential Basis of Abstract Thought.** In Kelly S. Mix, Linda B. Smith, and Michael Gasser (eds.), *The Spatial Foundations of Language and Cognition*. Oxford: Oxford University Press. p. 67-82, 2010.

ROSCH, E. **Reclaiming Concepts, Journal of Consciousness Studies.** Editado por Rafael Nunez e Walter Freeman, n° 11-12, p. 61-77, 1999.

WEBER, K. **Students' Understanding of Trigonometric Functions.** *Mathematics Education Research Journal*, Vol.17, No. 3, 91–112. 2005.