

CONCEITO DE FUNÇÃO INVERSA: REPRESENTAÇÕES E RESTRIÇÕES

*José Luiz Giarola Andrade*¹
PUC Minas
giarolaandrade@hotmail.com

*Dimas Felipe de Miranda*²
PUC Minas
dimasfm48@yahoo.com.br

*Iêda do Carmo Vaz*³
PUC Minas
vaz.ieda@gmail.com

*Júlio Paulo Cabral dos Reis*⁴
PUC Minas
julio.paulo1986@hotmail.com

Resumo:

Este trabalho propõe um minicurso sobre o estudo de funções inversas das funções polinomiais, exponenciais e trigonométricas, visando principalmente a construção do conhecimento conceitual de funções inversas, antecedendo à sua definição. A metodologia adotada será exposição dialogada com descobertas guiadas, em uma sequência elaborada principalmente a partir de simulações desenvolvidas em ambiente virtual, por meio do uso dos softwares *Geogebra*⁵ e *Winplot*⁶. A fundamentação teórica para a elaboração do minicurso baseou-se nos estudos de Duval (2005), Finney e Giordano (2005), Flemming (1992), Lévy (1993), Stewart (2006), entre outros. Pretende-se que, ao final do minicurso, seus participantes percebam a conceituação algébrica em consonância com as representações geométricas e numéricas dos estudos das funções inversas das funções em questão.

¹ Licenciado em Matemática, Especialista em Ensino de Matemática e Mestrando em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, Campus Coração Eucarístico – PUC Minas. É professor na rede particular de ensino em Formiga-MG e leciona disciplinas da área de Matemática nos cursos de graduação do Centro Universitário de Formiga – UNIFOR-MG.

² Graduado em Matemática e Filosofia com Mestrado e Doutorado na área de Modelagem de Análise Espacial do Programa de Tratamento da Informação Espacial da PUC Minas. Atualmente é professor adjunto IV da PUC Minas, lecionando disciplinas da área da Matemática nos cursos de graduação e no Mestrado de Ensino de Ciências e Matemática.

³ Graduada em Matemática. Especialista em Educação Matemática pela PUC Minas. Mestre em Educação Tecnológica pelo Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, CEFET-MG. Professora do PREPES-PUC Minas, no curso de Educação Matemática e na Educação de Jovens e Adultos -RME-PBH.

⁴ Licenciado em Matemática e Mestrando em Ensino de Ciências e Matemática da PUC Minas. É Professor na rede Estadual de ensino em Belo Horizonte-MG, atuando principalmente nos seguintes temas: Ensino de Cálculo, Taxas de Variação e Resolução de Problemas.

⁵ O *Geogebra* é um software gratuito de matemática dinâmica e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, estatística, cálculo, tabelas e gráficos numa única aplicação.

⁶ *Winplot* é um software gratuito de matemática desenvolvido pelo professor Richard Parris, da Philips Exeter Academy, por volta de 1985 e tem por principal aplicação a representação gráfica de curvas e superfícies.

Palavras-chave: Inversa de Funções; Conceito; Simulação; Ambientes Virtuais; Restrição.

1. Apresentação

Durante o minicurso “Conceito de Função Inversa: Representações e Restrições” pretende-se focar o conceito de função inversa, a partir da representação e interpretação gráfica, com o auxílio suporte dos softwares *Geogebra* e *Winplot*. A proposta é voltada para estudantes e professores de Matemática.

Esse minicurso foi idealizado a partir dos estudos desenvolvidos no subgrupo de Cálculo, do Grupo de Pesquisa em Informática e Metodologia no Ensino de Matemática – GRUPIMEM – vinculado ao Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

2. Introdução

Entendemos que o enfoque conceitual traz contribuições eficazes para o ensino e aprendizagem da inversão de funções. Conceituar exige uma ação, através de uma atividade mental, pois

não se trata de uma descoberta fruto de uma clarividência conseguida por graça ou casuisticamente, mas a conseqüência de um árduo trabalho mental de perseguição à verdade. Trata-se de um processo lógico que privilegia as descrições dos objetos matemáticos e das relações e estruturas que os unem. (BICUDO; GARNICA, 2003, p.30).

Ao pensar a definição em Matemática, busca-se a formalização de conceitos, numa explicação precisa, isto é, busca-se dar forma ao conceito, a partir da utilização da linguagem matemática, também entendida e explicada nos estudos da semiótica.

É necessária uma abordagem cognitiva, pois o objetivo do ensino de matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização. (DUVAL, 2003, p. 11).

A ideia deste minicurso é apresentar uma noção sobre o estudo das funções inversas, em particular das polinomiais, exponenciais e trigonométricas.

A partir das tecnologias da informação e educação (TIC's), pretende-se trabalhar os conceitos específicos de funções inversas aqui relacionadas, embasados principalmente por Finney e Giordano (2005), Flemming (1992) e Stewart (2011), de forma a explorar a visualização e a dinamicidade que os softwares educacionais oferecem. Barbosa (2009) alega que a utilização das TIC's ganhou força na década de 90, tempo em que o computador trouxe “plataformas amigáveis e com aplicações nas diversas áreas do conhecimento e em outros setores da sociedade de modo geral” (p.56). Em sua pesquisa, a autora analisa a utilização das TIC's para o ensino/aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral (CDI). Ressaltando que “a visualização, realçada pelas TIC's, constitui um elemento fundamental para a produção do conhecimento matemático, não apenas associada às representações numéricas e algébricas, mas também às gráficas” (p.62). Assim, a autora ratifica uma das possibilidades de utilização dessa tecnologia: a visualização, que ganha outra dimensão.

Acredita-se assim, que trabalhar os conceitos a partir de simulações contribui para um melhor aprendizado (LÉVY, 1993).

3. Metodologia

Como processo para o desenvolvimento do minicurso é proposto um conjunto de atividades a partir de simulações gráficas que seguem o método da descoberta guiada apresentado por Ernest (1998). Neste método o professor “formula o problema ou escolhe a situação com o objetivo em mente. Conduz o aluno para a solução ou objetivo” (p.32). Deste modo, é possível trabalhar um conceito ou um conteúdo em um tempo restrito.

Dividimos as atividades em três etapas; a primeira etapa explora a classificação de funções injetiva, sobrejetiva e bijetiva, partindo de uma situação prática de relações entre conjuntos discretos, com foco nas restrições de seu domínio e/ou contradomínio apoiado pela definição de funções reais. A segunda etapa aborda a obtenção de funções inversas de funções contínuas: polinomiais, exponenciais e trigonométricas de maneira gráfica, acompanhada pelas diferentes maneiras abordadas pelos autores para se obter a lei de formação das funções inversas das respectivas funções. Durante o processo de manipulação gráfica das funções, pretende-se explorar o comportamento de retas tangentes às funções invertíveis em pontos específicos destas a fim de conceituarmos as respectivas taxas de variação dessas funções e suas funções inversas, focando a simetria em relação à

reta identidade $y = x$. A relação entre o Cálculo Diferencial e Integral existente em uma função real de uma variável real, invertível em um intervalo, com sua respectiva função inversa nesse intervalo, fará parte das simulações efetivas do minicurso.

Considerando f uma função $y = f(x)$, invertível em um intervalo de $x \in [a, b]$, existe uma lei de formação para uma função g do tipo $x = g(y)$, no intervalo $y \in [a, b]$, tal que g é a função inversa de f com notação $x = g(y) \equiv y = f^{-1}(x)$ no intervalo $x \in [g(a), g(b)]$, figura 1. Para $c \in [a, b]$, existe $f(c) \in [f(a), f(b)]$, sendo válidas as igualdades (1) e (2).

$$\frac{df}{dx}[c] = \frac{dg}{dy}[c] = \left[\frac{df^{-1}}{dx}[g(c)] \right]^{-1} = \left[\frac{df^{-1}}{dx}[f(c)] \right]^{-1} \quad (1)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(y) dy \quad (2)$$

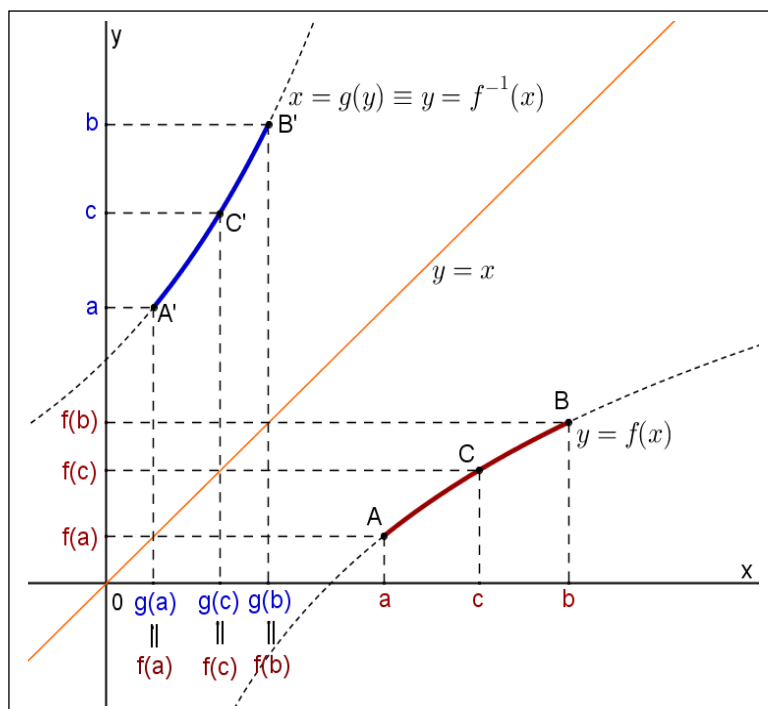


Figura 1: Gráfico como ilustração
Fonte: Elaborado pelos autores

A terceira etapa é trabalhada de forma simulada no software *Winplot* em ambiente três dimensões para rotação do plano xy em torno da reta identidade seguido de prática a partir de plano transparente que simula a manipulação do sistema de coordenadas

cartesianas xOy , figura 2, por meio de sua rotação de $\pm 180^\circ$ em torno da reta identidade para a obtenção visual gráfica de intervalos de funções inversas das respectivas funções apresentadas no sistema rotacionado yOx , figura 3.

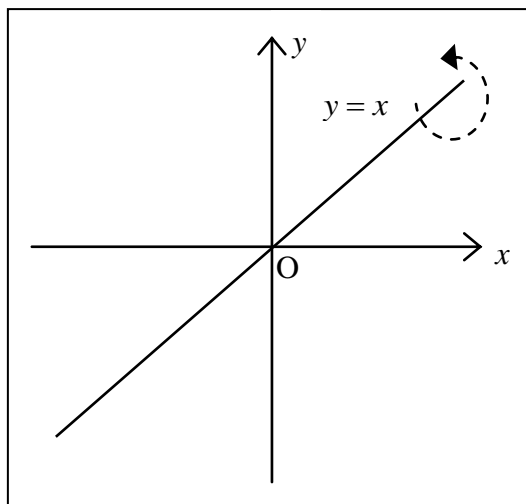


Figura 2: Sistema Cartesiano xOy
Fonte: Elaborado pelos autores

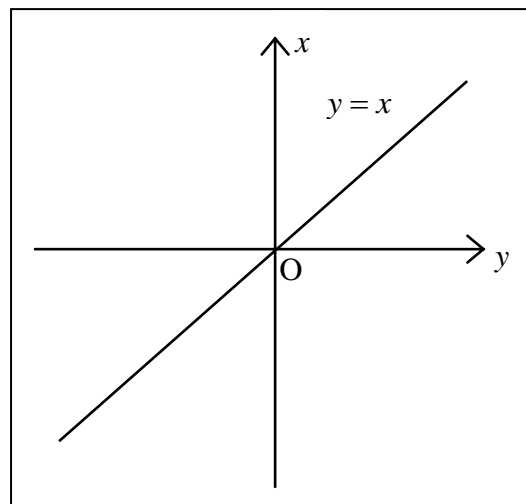


Figura 3: Sistema Cartesiano rotacionado yOx
Fonte: Elaborado pelos autores

O minicurso acontecerá por meio da apresentação de slides no *Power Point*, com devidas abordagens teóricas, a princípio em caráter expositivo, diante de questões que serão vislumbradas pelos participantes a partir da exposição dialogada, através da construção das representações gráficas nos softwares *Geogebra* e *Winplot*. Durante todo o processo, os ministrantes do minicurso oferecerão abordagem mediadora junto aos participantes, agregando suporte diante dos softwares utilizados com apoio às descobertas e atividades guiadas.

4. Resultados esperados

Como objetivo geral, espera-se que os participantes consigam compreender a importância de se trabalhar o conceito de função inversa de funções polinomiais, exponenciais e trigonométricas, por meio da visualização e simulação gráfica.

Os objetivos específicos são:

- Compreender a relação entre uma função f e sua inversa f^{-1} .
- Visualizar e comparar graficamente as representações de uma função e de sua respectiva função inversa.
- Analisar a inversa das funções polinomiais, exponenciais e trigonométricas.

- Explorar o ambiente virtual como ferramenta de simulação em consonância com as interpretações geométricas, numéricas e algébricas.

5. Referências

BARBOSA, S. M. **Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia**. (Tese de Doutorado). Universidade Estadual Paulista. 2009. 196 p.

BICUDO, Maria A. V.; GARNICA, Antonio V. M.. **Filosofia da educação matemática**. 3. ed. rev. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. 91 p. (Tendências em educação matemática 4)

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registro de representação semiótica. São Paulo: Papirus, 2003.

ERNEST, Paul. Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In: ABRANTES, P., LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Orgs.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: Projeto MPT e APM, 1998, p. 25-48.

FINNEY, Ross L.; GIORDANO, Frank R. **Cálculo de George B. Thomas**. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2005. v. 1.

FLEMMING, Diva Marília. **Cálculo A**: funções, limite, derivação, integração, 5ª ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1992.

Instituto Geogebra São Paulo – PUC-SP. Disponível em:
<<http://www.pucsp.br/geogebraesp/>>. Acesso em: 18 de mar. 2013.

LARSON, Ron; HOSTETLER, Robert P.; EDWARDS, Bruce H. **Cálculo**. 8 ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

LÉVY, Pierre. **As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática**. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

SILVA, Sógenes Geraldo Pereira de. Educação Matemática – EDUMAT. Disponível em:
<<http://www.edumat.com.br/winplot/>>. Acesso em: 18 de mar. 2013.

STEWART, James. **Cálculo**: tradução da 6ª edição norte-americana. 6. ed. São Paulo: Gengage Learning, 2011. v.1.