NÚMERO RACIONAL NA REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA IDEIA PARTE-TODO: ENTENDIMENTOS PRODUZIDOS POR ALUNOS

Analucia Gaviraghi
Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – UNIJUI
gaviragh@hotmail.com

Isabel Koltermann Battisti
Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – UNIJUI
isabel.battisti@unijui.edu.br

Resumo: O presente artigo se constituiu a partir de uma pesquisa cujo objetivo é identificar entendimentos produzidos por alunos acerca dos números racionais na representação fracionária, ideia parte-todo. A pesquisa se fez numa abordagem qualitativa e os dados empíricos foram produzidos a partir da proposição de oito questões que envolveram modelos propostos por Walle (2009), numa escola da rede municipal do interior do município de Coronel Bicaco – RS, com alunos no início da 6ª ano. As análises se fizeram a partir de entendimentos produzidos pelos alunos considerando a representação figural e textual com ênfase no seu simbolismo, bem como, características que constituem e definem o referido número. Embasaram-se em pressupostos teóricos apresentados por Walle (2009) e alguns elementos da teoria histórico-cultural e apontam que os alunos fazem as representações fracionárias, a partir do numerador e do denominador, mas não conseguem realmente significar esse dois “números inteiros” considerando um número fracionário.
Palavras-chave: Número racional; Representação fracionária; Ideia parte-todo; Anos iniciais do Ensino Fundamental; Teoria histórico-cultural.

1. Introdução

Os resultados das avaliações externas[1] brasileiras apontam um quadro bastante preocupante em relação à proficiência matemática dos estudantes da Educação Básica, o que vem nos motivando a olhar para o ensino e para a aprendizagem de Matemática, em especial, do Ensino Fundamental. A Matemática, enquanto componente curricular do

[1] As avaliações externas realizadas na última década pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), pela Prova Brasil, pelo Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), pelo Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Rio Grande do Sul (Saers) e pelo Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb), visam diagnosticar a situação atual do ensino escolar a partir do rendimento dos estudantes e orientar a reformulação e o monitoramento de políticas públicas voltadas à qualidade da educação

referido nível de ensino, ocupa um espaço singular, o que lhe atribui uma também singular responsabilidade na formação escolar dos alunos.

Nesse contexto nosso olhar se dirige, em especial, para processos de ensino e de aprendizagem do número racional. O ensino e a aprendizagem dos números racionais vêm sendo discutido, há muito tempo, por pesquisadores como Nunes e Bryant (1997), Bezerra, Maginas e Spinillo (2002), Merlini (2005), Moutinho (2005), entre outros. Para estes autores, o conceito de número racional é um importante saber matemático, pois desenvolve nas crianças habilidades como: compreensão e controle de situações do mundo real e ampliação das estruturas mentais necessárias para o desenvolvimento intelectual (BHER ET AL., 1983). Seu ensino, de acordo com Brasil (1998), é iniciado formalmente a partir do segundo ciclo do Ensino Fundamental, estendendo-se, pelo menos, até o final do terceiro ciclo.

Mesmo assim, constata-se que, frequentemente, muitos alunos apresentam no final do Ensino Fundamental um conhecimento insuficiente ou muitas dificuldades relacionadas aos conjuntos numéricos, em especial ao dos números racionais. Neste, as dificuldades são ainda mais acentuadas quando se referem à representação fracionária na ideia parte-todo.

Walle (2009) afirma que as frações sempre representam um grande desafio aos estudantes, mesmo nas séries finais do Ensino Fundamental e apresenta uma pesquisa de Wearne e Kouba (2000), a qual mostra que os resultados dos testes do National Assessment of Educational Progress (Naep) evidenciam, consistentemente, que os estudos têm uma compreensão muito frágil. Argumenta, ainda, que a falta de compreensão é traduzida para múltiplas dificuldades com o cálculo de frações, os conceitos de decimal e de porcentagem, o uso de frações em medidas e os conceitos de razão e proporção (WALLE, 2009, p. 322).

Segundo Behr et al. (1983), o conceito de número racional é um campo complexo e essencial da Matemática para os alunos, considerando perspectivas prática, psicológica e matemática. No segundo ciclo do Ensino Fundamental, de acordo com as orientações propostas por Brasil (1998), o conceito de número racional na representação fracionária deve se desenvolver considerando três dimensões e ideias: a ideia de parte-todo, em que a fração indica a relação que existe entre o número de partes e o total de partes; a ideia de quociente, a qual está baseada na divisão de um número natural por outro; e a ideia que implica diretamente a gênese do número racional que é a de comparação entre duas grandezas, chamada de razão.

Diante dessas considerações, no presente artigo, pretendemos discutir entendimentos que os alunos produzem e a forma como demonstram as compreensões elaboradas com relação à representação fracionária do número racional na ideia parte-todo. As discussões se estabelecem fundamentadas teoricamente, especialmente, em Walle (2009) e em alguns elementos da teoria histórico-cultural, e o material empírico considerado foi produzido por uma das autoras na realização de uma pesquisa em seu trabalho de conclusão de curso. A questão norteadora da investigação a qual embasa o presente artigo é *quais são os entendimentos que os alunos no início do 6º ano têm em relação ao conceito de número racional na sua representação fracionária, idéia parte-todo*?

2. Caminhos metodológicos

A investigação a qual embasa o presente artigo se fez numa perspectiva qualitativa, os dados empíricos constituíram-se a partir da elaboração e desenvolvimento de questões em uma turma, composta por oito alunos, no início do 6º ano, numa escola da rede municipal de Coronel Bicaco, interior do Rio Grande do Sul, em uma única etapa de duas horas/aula. Os alunos envolvidos na pesquisa já frequentaram o 1º e o 2º ciclos do Ensino Fundamental, conforme os PCNs, os alunos no final do 2º ciclo do Ensino Fundamental, na legislação vigente 5º ano, já devem ter se apropriado do conceito do número racional na representação fracionária, considerando os três significados: parte-todo, quociente e razão. Por esse motivo, a produção dos dados empíricos aconteceu no início (março de 2012) do primeiro ano dos Anos Finais do Ensino Fundamental, ou seja, no princípio do 6º ano[2].

Foram elaboradas e aplicadas oito questões[3], as quais envolveram aspectos relevantes do significado do número racional, representação fracionária considerando a ideia parte-todo e foram respondidas em duplas - durante o desenvolvimento das mesmas, a pesquisadora em nenhum momento interviu junto aos alunos. As referidas questões foram elaboradas a partir dos modelos propostos por Walle (2009): modelos de área ou de região, de comprimento e de medidas e de conjunto. No entanto, neste momento, não estamos considerando todo o material empírico produzido, nem esgotando as

[2] Os alunos do 6º ano participantes da investigação ainda não tiveram aula de Matemática no decorrer deste ano letivo.
[3] Adaptadas a partir de questões proposta por Walle (2009), Brasil (2007) e Breitenbach (2010).

possibilidades de olhares e análises, fizemos alguns recortes, os quais por hora nos interessam.

Nesse sentido, no presente artigo, as análises consideram algumas questões e a significação do conceito de número racional na representação fracionária ideia parte-todo apresentada pelos alunos a partir da representação figural e textual (linguagem natural e matemática) com ênfase para o seu simbolismo (numerador e denominador), bem como para as características que constituem e definem o referido número. Fizeram-se a partir de pressupostos teóricos apresentados por Walle (2009), por alguns elementos da teoria histórico-cultural proposta por Vigotski (1984) e por proposições apresentadas nos documentos oficiais que orientam o ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998).

3. O número racional na representação fracionária idéia parte-todo

Para a significação conceitual do número racional na representação fracionária, idéia parte-todo, devemos considerar ideias relevantes em se tratando da significação conceitual do referido número. Não são dois números naturais, mas sim um número que representa partes iguais ou proporções de tamanhos iguais de um todo ou unidade. Segundo Walle (2009), as partes fracionárias são denominadas para que possamos entender quantas partes precisamos para formar o todo, ou seja, se denominamos quartos, precisamos de quatro partes para formar o todo.

Assim, quanto mais partes fracionárias forem utilizadas para formar um todo, menor elas serão. Esse aspecto/característica pode se configurar como um dos entraves, pois nas frações as aparências enganam. Nesse sentido, o emprego de diversos modelos pode minimizar ou sanar dúvidas que os alunos têm em relação à parte superior e inferior do número fracionário, ou seja, com relação ao seu simbolismo. Walle (2009) sugere três modelos distintos para que se constitua o processo de elaboração conceitual do número racional representação fracionária, ideia parte-todo: modelo de área ou de região, modelo de comprimento ou medida e modelo de conjunto. O modelo de área e região é um dos mais usados e também um bom modelo para realizar tarefas de compartilhar e repartir. Walle (2009) apresenta exemplos de modelos que consideram regiões para representar frações:

Figura 1: exemplos de modelos de regiões para representar números fracionários.
Fonte: WALLE, 2009, p. 325.

Dentre esses modelos, o mais comum usado em livros didáticos é o disco fracionário. Além de o modelo poder ser representado com material fácil de manipular, é frequentemente usado como uma pizza, e é de fácil repartição. Walle (2009) afirma, porém, que os outros modelos de região são mais flexíveis; permitem a representação de unidades e conjuntos de diferentes tamanhos.

Para representar frações considerando modelos de comprimento ou de medidas, Walle apresenta os seguintes exemplos:

Figura 2: exemplos de modelos de comprimento ou de medida para representar números fracionários

Fonte: WALLE, 2009, p. 325.

Neste modelo, as barrinhas de cuisinaire e as tiras de papéis dobradas são aparentemente de fácil manipulação para o aluno, pois, nesse caso, ele cria situações de comparação entre as "frações". A reta numérica já é um modelo mais complexo, pois, segundo Walle, "[...] do ponto de vista da criança, há uma diferença real entre por um número em uma reta numérica e comparar um comprimento a outro. Cada número em uma reta numérica denota a distância do ponto rotulado como zero" (2009, p. 326).

A Figura 3 apresenta os exemplos que Walle usa para representar modelos considerando conjuntos.

Figura 3: exemplos de modelos de conjuntos para representar números fracionários.
Fonte: WALLE, 2009, p. 325.

Neste modelo, Walle está considerando o modo de inteiro composto por unidades descontínuas, cujo inteiro dá a ideia de conjunto de objetos e seus subconjuntos as partes fracionárias.

O conceito de número fracionário envolve vários aspectos que são relevantes em se tratando da significação conceitual pelo aluno. Estes aspectos estão relacionados a suas representações/símbolos, tanto figural quanto textual – língua materna e linguagem matemática – e aos seus significados.

> O símbolo se impregna de coisa representada, assim o encontro entre o signo e significante resulta de uma simbologia que passa a ser uma linguagem específica

> [...]. No que tange à linguagem matemática, os símbolos representam realidades concretas que foram aprendidas e contextualizadas, constituindo, dessa forma, uma linguagem matemática que possibilita o estudo dos conceitos para os símbolos representarem (NUNES, 2007, p. 4-5).

Walle (2009, p. 327), especifica essa idéia afirmando que "O simbolismo de fração representa uma convenção bastante complexa que é geralmente enganosa para as crianças". Pontua, ainda, que é de extrema importância que o aluno entenda o número na parte superior e inferior de uma fração, e que compreenda o que significa cada um de seus termos. Têm-se duas ideias centrais no simbolismo fracionário:

- O número da parte superior *conta*.
- O número da parte inferior diz o *que está sendo contado*.

Walle afirma que o simbolismo da fração é importante para dizer "quanto" e "o que contar". Smith (apud WALLE, 2009, p. 329), contribui nessa discussão ao dizer da importância de considerar o número da parte inferior como *divisor* e o da parte superior como *multiplicador*, mas que, nesse contexto, se faz necessário considerar o todo, o inteiro, e também que este é dividido em partes iguais.

3.1 Entendimentos apresentados/produzidos pelos alunos

As questões nº 3 e nº 4 propostas aos alunos, envolveram ideias centrais do simbolismo fracionário, instigaram os alunos a perceber o todo a partir de partes indicadas e a mostrar a fração que representa uma determinada parte a partir de um inteiro considerado.

Ao indicar, na questão nº 3, item a, a terça parte ($\frac{1}{3}$) de uma barra de chocolate e solicitar a representação da barra inteira, percebe-se que os alunos fizeram as duas partes que faltavam para completar o inteiro, mas nenhum deles fez do mesmo tamanho da parte apresentada e nem completando a figura formando o todo, ou seja, os alunos não consideraram a noção de inteiro e a noção que envolve a ideia de região e de medida.

Os alunos, em algumas situações, demonstraram saber que o denominador significa o número de partes em que um inteiro foi dividido, porém não representaram partes iguais; em outras, este entendimento parece estar confuso. Demonstraram também entendimentos acerca do significado de numerador, destacando que este indica o número de partes consideradas do inteiro, mas na questão 3, item a, o aluno A e o aluno B, como mostra a Figura 4 e a Figura 5, não representaram o chocolate inteiro, mas as partes que o compõe.

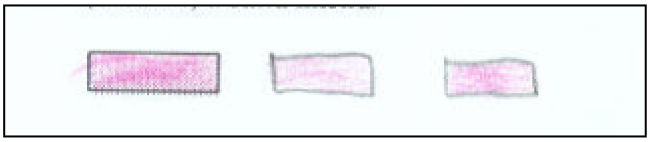

Figura 4 – Representação feita pelo Aluno A – resposta da questão nº 3, item a
Fonte: Material empírico produzido- 2012

.

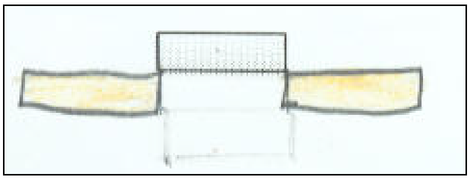

Figura 5 – Representação feita pelo Aluno B – resposta da questão nº 3, item a
Fonte: Material empírico produzido - 2012.

Com relação às ideias centrais no simbolismo fracionário, os alunos demonstram que contaram o número total de partes em que o inteiro foi dividido e usaram este número como o denominador da fração, e contaram o número de partes pintadas na figura, o qual foi considerado como numerador da fração. Demonstram, porém, não compreender esse novo número como não pertencente ao conjunto dos inteiros, uma vez que estão sempre contando a quantidade de partes e estas constituem o conjunto dos inteiros. Os alunos não relacionaram esses dois inteiros e, a partir desse aspecto, a relação entre numerador e denominador fica perdida, não demonstrando a ideia de número fracionário.

A dupla contagem usada pelos alunos mostra que houve falta de atenção às propriedades geométricas das figuras ou partes usadas (NUNES ET AL., 2003). Percebe-se que os alunos fazem dupla contagem e/ou entendem o número racional na forma fracionária como sendo dois números naturais.

Segundo Walle (2009), os termos *numerador* e *denominador* não são palavras comuns para as crianças; se considerados no ensino e aprendizagem, por si só podem não ter significado para os alunos. Vigotski (2001, p. 161) contribui nas discussões relacionadas aos referidos termos ao afirmar que a palavra “[...] em princípio tem o papel de meio na formação de um conceito e, posteriormente, torna-se seu símbolo”. De acordo com o referencial vigotskiano, no processo de elaboração conceitual a significação não acontece de imediato, numa forma pronta e acabada; há, no processo, sempre um *devir*. No momento em que a criança toma conhecimento pela primeira vez do significado de uma nova palavra, o processo de desenvolvimento dos conceitos não termina, está apenas começando. Walle (2009) corrobora com estas ideias ao destacar que as atividades relacionadas à representação fracionária do número racional são desafiadoras e podem contribuir para que aconteça a compreensão do significado de numerador e denominador, e não é apenas uma tarefa de recitar definições.

Para Behr et al. (1983), a interpretação de um número racional como parte-todo está diretamente relacionada à habilidade de dividir uma quantidade contínua ou um conjunto discreto de objetos em subpartes de tamanhos iguais.

Na Figura 6, ao desenvolver a questão nº 3, percebe-se que o Aluno D não tem clareza do número fracionário na representação parte-todo, pois entende o número como sendo dois números naturais, e que a representação do mesmo não tem a mesma área em cada uma das partes. Uma das principais características que constitui o conceito de número racional não foi considerada pelo referido aluno. Nesse sentido, Walle (2009) diz que os alunos contam as partes fracionárias como se tivessem contando qualquer objeto.

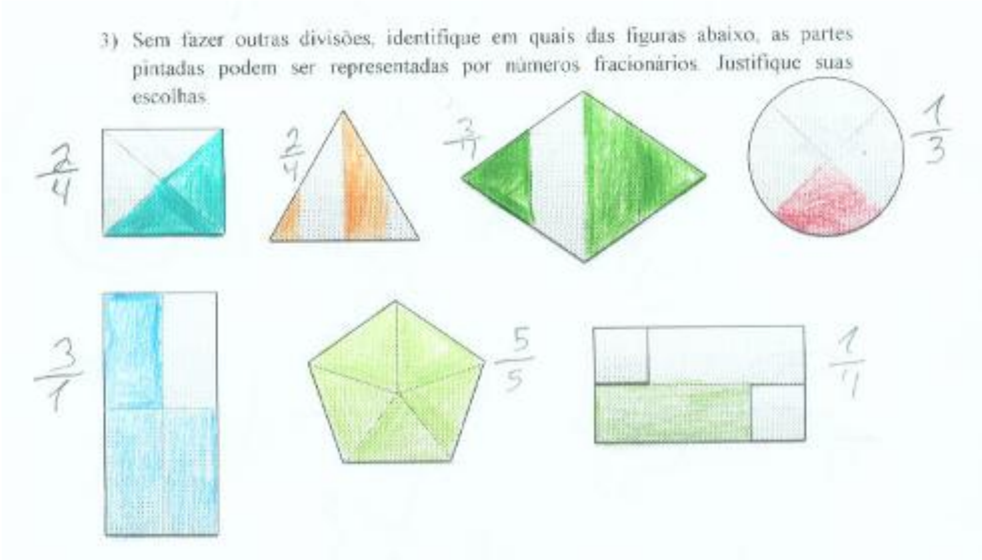

Figura 6 – Representação feita pelo Aluno D – resposta da questão nº 7.
Fonte: Material empírico produzido - 2012.

Na questão nº 2, Figura 7, foi indicado o inteiro e solicitado aos alunos para representarem uma determinada fração. Muitos deles não repartem a região do inteiro em partes iguais.

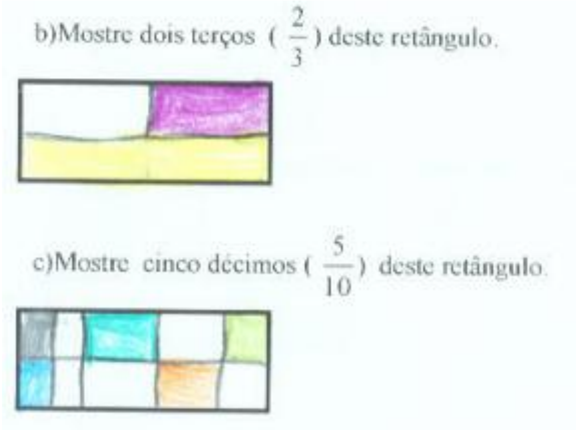

Figura 7 – Representação feita pelo Aluno C – resposta da questão nº 2, item b e c.
Fonte: Material empírico produzido - 2012.

As representações realizadas pelos alunos denotam que o denominador indica o número de partes em que o inteiro foi dividido, mas não são consideradas as partes fracionais, ou seja, que em se tratando de frações o inteiro deve ser dividido em partes iguais, o que é uma condição atribuída pelo conceito de número fracionário.

De acordo com Walle, as crianças precisam estar cientes de dois aspectos ou componentes de partes fracionárias: (1) a quantidade de partes e (2) a igualdade das partes - em tamanho, não necessariamente em forma (2009, p. 324).

Na questão nº 3, item b, foi mostrado ¾ de uma folha de caderno, o que representava 15 linhas, e solicitado aos alunos que completassem a referida folha. Nenhum dos alunos deu continuidade na representação figural da folha de caderno; todos desenharam a parte que faltava ao lado da figura.

Quatro alunos representaram as cinco linhas que faltavam para completar a folha inteira e os demais representaram quatro linhas, o que nos leva a supor que podem ter contado os traços, ao invés do espaço (superfície/região) de cada linha. O aluno C demostrou entender o que significava ¾ da folha do caderno, enumerou as linhas e percebeu que em cada parte deveria haver cinco linhas. Na escrita, todavia, afirma que dividiu por cinco para encontrar o número de linhas que havia em cada parte e não em três como representou na parte figural, como podemos ver na Figura 8.

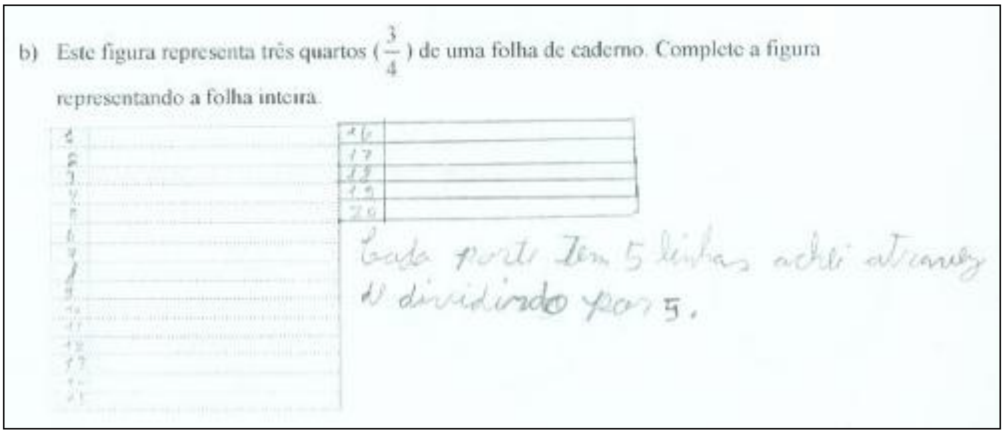

Figura 8 – Representação feita pelo Aluno E – resposta da questão nº 3, item b.
Fonte: Material empírico produzido - 2012.

Já o Aluno D, na Figura 9, afirma que dividiu por três para encontrar uma parte da folha, mas na representação figural apresenta apenas quatro linhas.

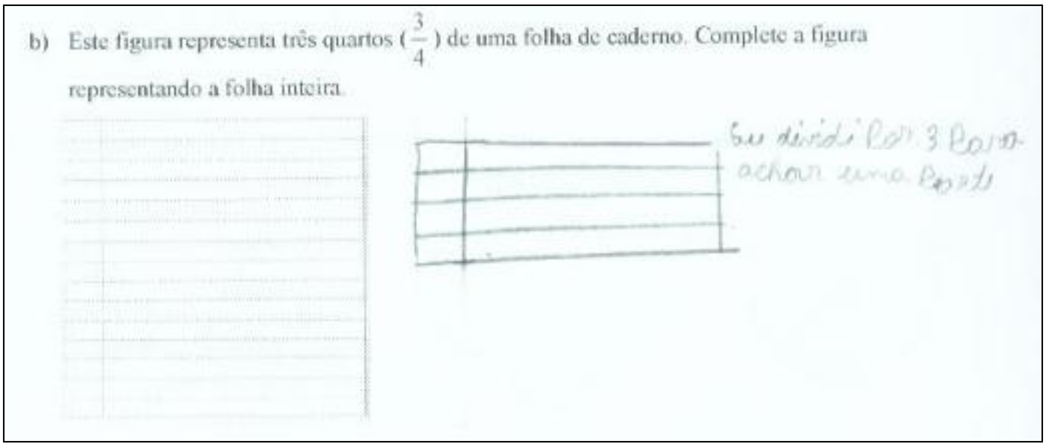

Figura 9 – Representação feita pelo Aluno D – resposta da questão 3, item b
Fonte: Material empírico produzido - 2012.

O Aluno A, na Figura 10, desenhou ao lado as cinco linhas que compõem uma parte, mas escreveu: *Eu dividi por três para achar a metade da linha* (Aluno A, Registro da questão nº 3, item b). Para este aluno, o significado de metade parece ser sinônimo de parte/quantidade de linhas que representam uma das partes do inteiro.

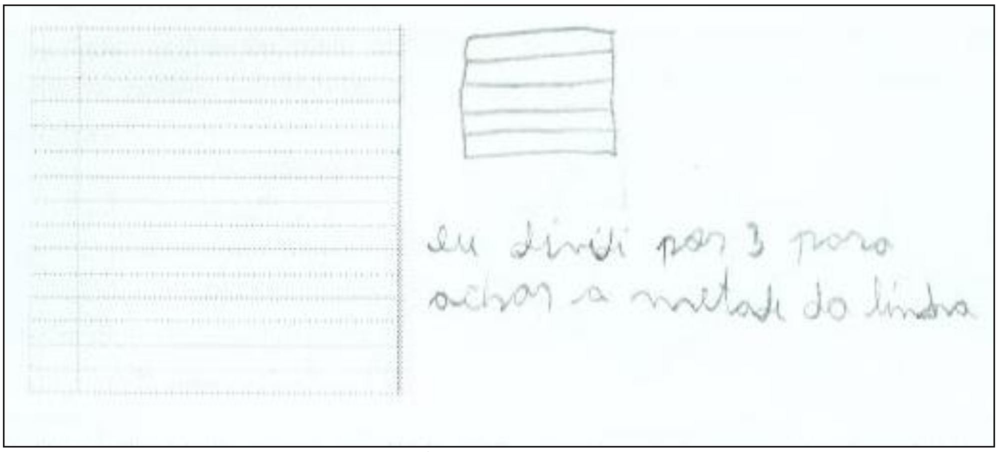

Figura 10 – Representação feita pelo Aluno A – resposta da questão 3, item b
Fonte: Material empírico produzido - 2012.

Podemos olhar para estas questões a partir de Vigotski (2001) quando este afirma que cada palavra é um conceito, e que seu significado evolui. Para este aluno, a significação de metade está relacionada a outras ideias que não ao significado conceitual expresso pela palavra. Walle (2009) contribui ao afirmar que as crianças estão familiarizadas com metades, mas salienta que devem *depressa* aprender e descrever terços, quartos e assim por diante.

Haviam 15 linhas e estas representavam ¾ do todo, o que foi considerado pelo Aluno A, pois dividiu as 15 linhas por 3 obtendo o ¼ que faltava e que foi desenhado. Observamos, ainda, como os demais alunos, que este ¼ (5 linhas) não foi desenhado na sequência da folha, representando o inteiro, mas ao lado. O desenho ao lado da folha pode apontar alguns indicativos; entre eles que os alunos não consideram a folha como um todo, como um inteiro, mas as suas partes, o que, mais uma vez, pode indicar que os alunos olharam para os termos do símbolo fracionário: o numerador e o denominador, e não para o significado enquanto inteiro.

A questão n° 4, item a, solicita que os alunos identifiquem a fração que representa o quadrinho pequeno, considerando como inteiro o quadrado maior. Cinco alunos responderam a partir da representação numérica, numa linguagem matemática: ¼ . Os outros 4 alunos responderam na língua materna que para formar o quadrado grande precisa de mais 3 quadrinhos, como podemos ver na Figura 11.

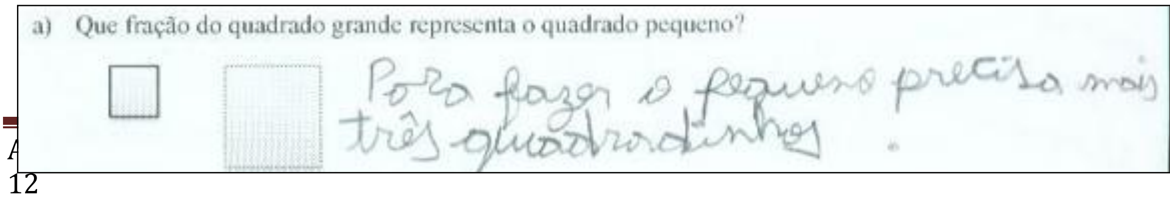

Figura 11 – Representação feita pelo Aluno B – resposta da questão nº 4, item b
Fonte: Material empírico produzido - 2012.

Os alunos conseguem notar que necessitam de 4 partes para formar o todo, mas nem todos perceberam que considerar uma parte significa metade da metade, ou seja, ¼ do inteiro.

O item b da questão n° 4 apresenta uma figura que representa uma quantidade maior do que um inteiro, mais especificamente duas vezes o inteiro e solicita aos alunos que indiquem a fração que a representa. Nesta questão, cinco alunos responderam, em linguagem matemática, representação numérica ½. Entendemos que estes alunos consideraram como inteiro o retângulo maior e não o menor como indicava a questão, como podemos ver na Figura 12.

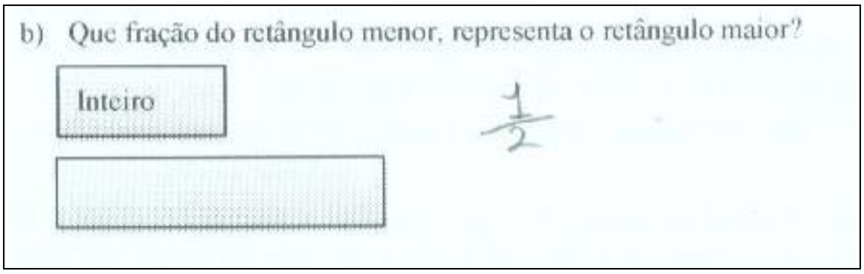

Figura 12 – Representação feita pelo Aluno D – resposta da questão 4, item b.
Fonte: Material empírico produzido - 2012.

Ainda com relação a esta questão, quatro alunos afirmaram que *precisava de mais um retângulo para um formar o grande*. Nenhum aluno indica o retângulo menor como inteiro, como também não indicam a fração que o retângulo maior representa se considerado o retângulo menor como inteiro.

Walle (2009) afirma que as perguntas que envolvem a fração maior que o inteiro são mais difíceis de serem respondidas e podem frustrar os alunos iniciantes, pois se tem uma tradição no ensino de fração de que são representações feitas sempre de modelos padrões e com fração sempre menor que a unidade, as quais não levam o aluno a pensar sobre elas, e então este não sabe ou não usa corretamente os modelos no desenvolvimento do conceito de fração (WALLE, 2009, p. 324).

4.Considerações finais

O conceito de número racional na representação fracionária, idéia parte-todo, envolve vários aspectos que são relevantes em se tratando de sua significação conceitual, abrange a representação/símbolos, tanto figural quanto textual e características específicas. As discussões acerca de entendimentos apresentados/produzidos por alunos, no início do 6º ano do Ensino Fundamental, sobre o conceito dos números racionais na ideia parte-todo, aqui fundamentada por Walle (2009) – o qual chama a atenção para o simbolismo, e em alguns elementos da teoria histórico-cultural, apontam que, além de ser complexo, pode ser muito enganoso às crianças, o que leva os alunos, como vimos nos dados apresentados, a não relacionarem o significado dos números racional com sua representação. Melhor dizendo, fazem as representações fracionárias (a/b, sendo b diferente de 0), mas não conseguem realmente significar esse dois "números inteiros" considerando um número fracionário.

Percebemos, diante das análises, que as representações realizadas pelos alunos denotam que o denominador indica o número de partes em que o inteiro foi dividido, mas não consideram partes iguais, o que é uma condição atribuída pelo conceito de número fracionário. Os alunos realizam a dupla contagem a partir dos termos do símbolo fracionário, o numerador e o denominador, mas não demonstram ter se apropriado da significação do número fracionário considerando a idéia parte-todo. Nesse sentido, ancorada em pressupostos vigotskianos, as análises apontam que, no processo de elaboração conceitual há sempre um *devir*, que, para os alunos sujeitos da pesquisa, o processo de desenvolvimento do conceito de número racional, na representação fracionária idéia patê-todo, está apenas começando.

Outro aspecto percebido corrobora com a idéia apresentada por Walle (2009), ao dizer que há uma tradição no ensino de fração de que são representações feitas sempre de modelos padrões e com fração sempre menor que a unidade, as quais não levam o aluno a pensar sobre elas, e então este não sabe ou não usa corretamente os modelos no desenvolvimento do conceito de fração.

Assim, é possível perceber da necessidade de um olhar mais atento e comprometido para com o ensino e para com a aprendizagem dos números racionais no contexto escolar, e que as ideias, aqui apresentadas, propostas por Walle (2009) podem contribuir nesse processo. Pois, sem "[...] uma compreensão conceitual sólida de fração, o cálculo de fração caminha para a memorização de regras sem compreensão" (WALLE, 2099, p. 322), além de acarretar prejuízo no desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos.

5. Referências

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER E. Rational Number Concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). **Acquisition of Mathematical Consepts and Processes.** Orlando-Florida: Academic Press INC., 1983. p. 91-126.
BREITENBACH, Helena M. **Ensino de frações via as concepções parte/todo, quociente e medida**. 2012. Monografia (Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC; SEF, 1998. 148 p.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Pró-Letramento Programa de Formação Continuada de Professores dos Anos/Séries Iniciais do Ensino Fundamental**. Brasília: MEC, 2007. 308 p.

BEZERRA, F.; MAGINAS, S.; SPINILLO, A. **How promote children understanding of fractions?** An exploratory study, PME, v. 2, p. 89-96, 2002.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MOUTINHO, L. **Fração e seus diferentes significados: um estudo junto a alunos de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC/SP, 2005.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática.** Porto Alegre: Artmed, 1997.

NUNES, Almir. **Resolução de problemas: uma abordagem atual e dinâmica no ensino da Matemática**. 2007, 73 p. Dissertação (Mestrado em Educação Agrícola) – Instituto de Agronomia, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2007.

OLIVEIRA, M. K. **O pensamento de Vygotsky como fonte de reflexão sobre educação.** Cadernos Cedes, n. 35. Campinas, 2000, p.11-18.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

WALLE, John A. Van de. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicações em sala de aula**. Tradução Paulo H. Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.