

MANIFESTAÇÕES ALGÉBRICAS: UM ESTUDO SOBRE ATIVIDADES PRESENTES EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Magno Luiz Ferreira
Instituto Federal do Rio de Janeiro
Magno.ferreira@ifrj.edu.br

Isabella Moreira de Paiva Corrêa
Instituto Federal do Rio de Janeiro
Isabella.corrêa@ifrj.edu.br

Naiane Nádia Sampaio Teixeira
Instituto Federal do Rio de Janeiro
vs_nani@hotmail.com

Gabriela Magalhães Lopes
Instituto Federal do Rio de Janeiro
gabyamuleto@gmail.com

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar resultados parciais da pesquisa: “Manifestações algébricas: da teoria à prática”. Buscamos desenvolver abordagens alternativas para a Educação algébrica a luz de suas diferentes manifestações. Inicialmente separamos algumas atividades sobre álgebra em quatro categorias: álgebra como aritmética generalizada, álgebra como métodos e técnicas para resolver problemas, álgebra como estudo de estruturas e álgebra como relação entre grandezas. No momento estamos desenvolvendo abordagens para cada categoria. Acreditamos que um aprendizado eficiente de álgebra passa pela compreensão profunda destas diferentes categorias, de maneira que as escolhas de estratégias para resolução de problemas algébricos seja feita de forma consciente e não puramente mecânica. Também pretendemos selecionar conteúdos nos livros didáticos para realizar intervenções em escolas públicas da região Sul-Fluminense do Rio de Janeiro. Sendo assim, apresentaremos nesta comunicação o modo como as atividades foram categorizadas e as diferenças entre cada uma das manifestações.

Palavras Chave: Álgebra; Ensino de Álgebra; Livros Didáticos.

1. Introdução

Este trabalho é resultado de nossas preocupações com o processo de ensino-aprendizagem da álgebra na Educação Básica. Através do Programa Institucional de

Iniciação Científica e Tecnológica Voluntário (PIVICT), iniciamos, em 2011, um trabalho que tinha como objetivo principal identificar possíveis influências das crenças de alguns professores na concepção dos alunos sobre álgebra. A partir disso, tivemos a ideia de aproveitar os resultados e aportes teóricos sobre álgebra e o ensino de álgebra, presentes neste trabalho, para dar novos passos em direção a resposta da seguinte pergunta: Como o ensino de álgebra pode se tornar mais significativo para os alunos?

Na busca por uma resposta para esta pergunta elaboramos o projeto “Manifestações algébricas: da teoria à prática”, vinculado ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC). Este projeto visa elaborar abordagens alternativas para a educação algébrica no Ensino Fundamental. Para isso, dividimos algumas atividades algébricas em categorias de acordo com as manifestações deste campo da matemática descritas por Ferreira (2009). De acordo com o autor, a tomada de consciência destas variações por parte dos professores pode trazer reflexões significativas a respeito do tratamento da Educação Algébrica na Educação Básica. Desta forma, poderemos discutir abordagens que priorizem as tais manifestações, de modo que seja possível propor metodologias alternativas para o ensino de álgebra propriamente dito.

Esta comunicação científica tem como objetivo apresentar considerações a respeito das atividades já categorizadas até o momento. Cabe ressaltar que inicialmente daremos maior ênfase às manifestações relacionadas à interpretação das variáveis presentes na atividade algébrica. Com isso, pretendemos relacionar algumas características destas manifestações com alguns conteúdos algébricos discutidos ao longo da Educação Básica.

Acreditamos que este trabalho é uma contribuição importante para pesquisas a respeito do ensino de álgebra, no sentido que o mesmo traz algumas respostas a perguntas levantadas por autores como: Santos (2007) que analisa a influência dos livros didáticos sobre as aulas de matemática, Freitas (2002) que identifica erros comuns na aplicação de métodos de resolução de equações, uma das manifestações que serão descritas neste trabalho e Ferreira (2009) que analisa o modo como os professores pensam o ensino de álgebra à luz das variações da atividade algébrica na Educação Básica. Na próxima seção, apresentamos algumas destas variações.

2. As diversas concepções sobre o ensino e a atividade algébrica

De acordo com Ferreira (2009), a álgebra se manifesta de diferentes formas. Nesta seção, apresentaremos uma breve descrição de algumas destas manifestações, sendo mais detalhistas no que diz respeito à manifestação da álgebra como aritmética generalizada, foco deste trabalho.

a) *Concepções de Educação Algébrica*

Segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), o ensino de álgebra vem sofrendo forte influência de três concepções sobre a educação algébrica. O autor as chama de “lingüístico-pragmática”, “fundamentalista-estrutural” e “fundamentalista-analógica”. Estas concepções nos mostram tendências históricas de como enxergar o ensino de álgebra. Abaixo um breve descrição destas concepções:

Concepção lingüístico-pragmática – Foi predominante do século XIX até a primeira metade do século XX. Esta concepção tem como característica uma abordagem mais instrumental da álgebra. Segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), o objetivo da educação algébrica nesta época era o domínio, mesmo que de forma mecânica, das técnicas necessárias para as transformações algébricas. Isso era feito através de exercícios que visavam o treinamento do manejo preciso das expressões algébricas.

Concepção fundamentalista-estrutural – Predominante nas décadas de 1970 e 1980. Esta concepção se caracteriza por uma abordagem mais estrutural da álgebra. Segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) o objetivo nesta época era fornecer fundamentos lógicos para toda a matemática. Sendo assim, os alunos precisavam ser capazes não apenas de resolver problemas ou de reproduzir exercícios, mas também precisavam compreender as propriedades estruturais dos procedimentos que usavam em cada passagem das transformações algébricas.

Concepção fundamentalista-analógica – Esta é a concepção predominante dos dias de hoje. Sua principal característica é a busca por um meio termo entre as concepções: “lingüístico-pragmática” e “fundamentalista-estrutural”. Faz isso através da tentativa de resgatar o valor instrumental da álgebra e da preservação do estudo das propriedades estruturais. Surge aqui, um número maior de exercícios que aplicam a álgebra à realidade, ou a uma simulação do real como, por exemplo, abordar equações com se fosse uma balança, pensando no equilíbrio (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVAO, 2005).

b) *A álgebra segundo as caracterizações de sua atividade*

A álgebra também apresenta variações de acordo com o modo como concebemos as atividades matemáticas relacionadas a ela. Lins e Gimenez (1997) apresentam algumas ideias de como a caracterização da atividade algébrica pode sofrer variações.

Caracterização da atividade algébrica através da evolução histórica de algumas notações – Segundo Lins e Gimenez (1997), o Brasil é um país muito influenciado por este tipo de caracterização da atividade algébrica. A ideia principal dessa caracterização é descrever a álgebra através do processo histórico de desenvolvimento das notações algébricas. Os autores ressaltam uma falha de se limitar a discutir assuntos praticamente exclusivos do ambiente escolar. Além disso, essa caracterização não dá conta de todo o processo de desenvolvimento da álgebra. Exemplos: Se $a + b = 10$, então $10 - a - b = 0$. No entanto, observe que por traz desta atividade está ideia de que o número 10 representa uma soma de dois números, também representados por “a” e “b”.

Caracterização através da presença de certos conteúdos – Talvez esta seja a caracterização mais simplista dentre as quatro que estamos apresentando aqui. Lins e Gimenez (1997) comentam que esta caracterização se limita a uma descrição da álgebra a partir de uma lista de objetos matemáticos que são de alguma forma julgados como álgebra. Acreditamos que, além de simplista, esta forma de caracterizar a atividade algébrica não é precisa, pois os objetos matemáticos que seriam objetos de estudo da álgebra podem mudar de pessoa para pessoa, de acordo com suas visões e concepções acerca dos conteúdos abordados. Exemplos: equações, polinômios, funções... Aqui está o motivo pelo qual acreditamos que esta tendência seja um tanto simplista. Estamos fazendo uma lista de conteúdos que acreditamos que seja álgebra, apenas baseados na intuição.

Caracterização através da ação do pensamento formal - Segundo Lins e Gimenez (1997), o pensamento formal consiste em refletir sobre as operações, ou seja, pensar nas conseqüências que estas operações podem trazer para o problema em questão. De acordo com os autores o lado mecânico da atividade algébrica não estaria sendo contemplado por essa caracterização. Isso nos mostra que esta caracterização também não contempla tudo aquilo que os autores tentam apresentar como atividade algébrica.

Parece-nos que essa abordagem também deixa coisas demais de fora. Por exemplo, se uma criança de 10 anos resolve uma equação, mas fracassa em dar quaisquer sinais de ter atingido o estágio operatório formal piagetiano, vamos negar a esse episódio o *status* de atividade algébrica? (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 100).

É importante destacar que essa caracterização se diferencia das outras duas na maneira de tratar o assunto. Enquanto as primeiras se caracterizam por “julgar” que objetos

matemáticos fazem parte do estudo algébrico, esta caracterização busca decidir quais situações matemáticas são de fato álgebra. Exemplo: Ao resolver a equação $x^2 - 9 = 0$ seguir um raciocínio do tipo: O único número cuja diferença para 9 seja zero é o próprio 9. Portanto x^2 precisa ser 9. Daí nos perguntamos qual o número que elevado ao quadrado gera o 9? 3 ou -3. Este tipo de procedimento é viável, mas isso não quer dizer a aplicação do método do “passo para o outro lado e troco o sinal” não seja álgebra.

Caracterização através de campos conceituais - Caracterização através da ideia de campo conceitual, modelo criado pelo psicólogo francês G. Vergnaud que envolve por si só, conceito, notações, esquemas mentais que resolvem e dão sentido aos conceitos relacionados com estes mesmos esquemas. Os autores afirmam ser possível pensar em um campo conceitual da álgebra.

Pode-se falar de um “campo conceitual da álgebra elementar”, mas, sendo uma unidade muito ampla para a investigação experimental, Vergnaud e seus seguidores preferem tratar, por exemplo, de um “campo conceitual das equações do 1º grau (lineares)”. Alguém trabalhando nesse ou em outros campos conceituais da álgebra estaria engajado em atividade algébrica (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 103).

c) *A álgebra segundo a interpretação de suas variáveis*

Segundo Usiskin (1995), as manifestações algébricas podem, de acordo com a interpretação de suas variáveis, ser classificadas em quatro grupos: aritmética generalizada, métodos e técnicas para resolver problemas, relações entre grandezas e estudo de estruturas.

Álgebra como aritmética generalizada – Esta interpretação representa o entendimento da álgebra como generalização dos conhecimentos aritméticos (USISKIN, 1995). Em outras palavras, os objetos algébricos são compreendidos como sendo resultado da ampliação das ideias da aritmética. Exemplo: Mostrar, através de uma sucessão de casos particulares, que o número mínimo de movimentos para resolver o problema da Torre de Hanói é sempre da forma $2^n - 1$, com n sendo o número de discos envolvidos no quebra-cabeça.

Álgebra como estudo de métodos para resolver certos tipos de problemas – Talvez esta seja a manifestação de álgebra mais comum durante as aulas de matemática. Segundo Usiskin (1995), esta interpretação trata de compreender quais procedimentos se deve usar para resolver certos problemas relacionados à álgebra, sejam eles contextualizados ou não. Exemplo: A soma de alguns números, em progressão aritmética de razão 4, é 300. Sabendo

que o menor desses números é 3 e o maior é 47, responda quantos são os números envolvidos na soma? Para resolver esse problema só precisaríamos lembrar-nos da fórmula

para soma: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$. Com isso aplicamos os procedimentos necessários:



Álgebra como relação entre grandezas – O estudo das funções é, provavelmente, o maior representante desta percepção, a qual explora o estudo de como as grandezas se relacionam (USISKIN, 1995). Exemplo: Um carro de fórmula 1 faz um treino em um circuito cujo percurso, após todas as voltas, soma 500 km. Sabendo que o piloto sempre mantém a velocidade do carro constante, determine a expressão que fornece o tempo de percurso em função da velocidade? Para resolver este tipo de problema é preciso perceber quais são as quantidades relacionadas (*neste caso, velocidade e tempo*), em seguida descobrir como essa relação acontece (*neste caso, precisamos lembrar que a unidade de velocidade é km/h e entender que a cada hora o carro avança a mesma distância*) e com isso é possível chegar à forma genérica $T = 500/V$, com T e V sendo tempo e velocidade.

Álgebra como estudo de estruturas – De acordo com Usiskin (1995), esta interpretação trata de entender quais as percepções matemáticas, tais como equivalências entre expressões, simplificações e outras atitudes matemáticas podem ser úteis ou não para resolver um determinado problema. Exemplo: para fatorar a expressão $3x^2 + 4ax - 132a^2$ podemos notar que $4ax = 22ax - 18ax$ e proceder da seguinte maneira:



Como mencionado anteriormente, acreditamos que o desenvolvimento de abordagens para o ensino de álgebra, que levem em conta estas variações, seja uma contribuição importante para um ensino de álgebra cada vez mais significativo. Além disso, o fato de o processo de educação algébrica sofrer estas variações, independentemente da vontade do professor, constitui um bom motivo para um estudo a respeito do modo como as mesmas ocorrem na Educação Básica.

3. Metodologia

Apresentamos a seguir, as etapas de nosso projeto de pesquisa:

1ª etapa – Revisão bibliográfica: Buscamos estabelecer as diferenças entre as categorias, de modo que fosse possível desenvolver abordagens e/ou metodologias específicas para cada uma.

2ª etapa – Criação do banco de atividades: Consultamos livros didáticos da Educação Básica e periódicos de Educação Matemática para a seleção de atividades que servirão de objeto de estudo no desenvolvimento das novas abordagens. É importante destacar que durante as duas primeiras etapas estivemos em contato com professores da Educação Básica para convidá-los a participar do desenvolvimento e implementação das novas abordagens. Estes professores não tiveram nenhuma obrigação de trabalhar no projeto, o convite para participação visou apenas consultar alguém com um relacionamento mais próximo realidade escolar.

3ª etapa – Desenvolvimento: Com as categorias diferenciadas e as atividades selecionadas, estamos buscando maneiras de ensinar álgebra à luz de cada uma das diversas manifestações algébricas. Nesta etapa, aplicaremos um teste prévio e elaborar abordagens para as categorias descritas no projeto. A aplicação deste teste tem a finalidade de identificar dificuldades comuns relacionados as categorias de manifestação. Cabe ressaltar que este teste não será, necessariamente, uma prova. A escolha de uma atividade de avaliação se dará de acordo com as necessidades das categorias de manifestação algébrica.

4ª etapa – Implementação: Nesta etapa testaremos a eficiência das abordagens e/ou metodologias desenvolvidas na 3ª etapa. Aplicaremos as atividades com as metodologias desenvolvidas por eles em escolas públicas da região Sul Fluminense do Rio de Janeiro. Nossa intenção nesta etapa é identificar potencialidades, fragilidades e aceitação das metodologias, de modo que possamos rediscutir as mesmas para novas aplicações, caso seja necessário.

5ª etapa – Aplicação de um novo teste, com o objetivo de verificar a evolução da aprendizagem, seguindo os parâmetros determinados no pré-teste.

Os contatos com as escolas e os professores que auxiliarão durante as etapas de elaboração e implementação das novas abordagens serão realizados durante a 1ª e 2ª etapas. Desta forma, será possível conversar com os professores, que aceitarem o convite, sobre as possibilidades de aceitação das metodologias desenvolvidas na 3ª etapa. A escolha dos professores e escolas que participarão das atividades de pesquisa levará em conta a possibilidade de aplicação das metodologias e/ou abordagens desenvolvidas durante o

projeto e a presença de turmas que estejam estudando conteúdos referentes à álgebra. Além disso, daremos prioridade à escolas que já tenham algum vínculo com o IFRJ, tais como as escolas que acolhem o projeto PIBID.

4. Resultados Parciais da Pesquisa

Nesta seção serão feitas algumas considerações a respeito dos resultados alcançados até o momento. Especificamente para esta comunicação apresentaremos algumas atividades extraídas de duas coleções de matemática do Ensino Fundamental. Estas coleções foram selecionadas de maneira aleatória, com o objetivo de analisar a seqüência dos conteúdos algébricos neste nível de ensino.

Ao longo da análise das atividades, surgiram algumas interseções entre as manifestações algébricas e modo como estas eram percebidas por nós. Desta forma, foi necessário fazer uma reavaliação das características de cada categoria. No que diz respeito às interpretações das atividades algébricas através de suas variáveis, fizemos algumas alterações que visaram evidenciar os limites de cada manifestação.

Além disso, algumas dificuldades precisaram ser superadas na busca pela criação de nosso banco de atividades. Primeiramente tivemos dificuldades na escolha da concepção que melhor se encaixa em determinado exercício. Outro problema aconteceu nos momento em que nos deparamos com atividades que apresentavam características que se relacionam com mais do que uma das categorias de manifestação. Neste caso, optamos por listar as atividades em todas as categorias relacionadas à mesma. A seguir apresentamos algumas atividades de destacamos de duas coleções de livros didáticos do Ensino Fundamental:

Álgebra como aritmética generalizada: Algumas atividades desta manifestação apresentaram interseções com a álgebra interpretada através de relação entre grandezas. Como foi dito anteriormente, fizemos algumas adaptações para facilitar a classificação. Neste caso, optamos por interpretar as atividades levando, também, em conta a estratégia

1. Escreva no caderno:

- o quadrado do número real x . x^2
- o cubo do número real y . y^3
- a raiz quadrada do número real a . \sqrt{a}
- a quinta potência do número real b . b^5
- a soma dos números reais b e c . $b + c$
- o produto dos números reais a e x . ax
- o dobro do número real y . $2y$
- a sexta parte do número real m . $\frac{1}{6}m$

2. Usando duas letras quaisquer, escreva no caderno uma expressão que represente:

- o dobro de um número real adicionado ao dobro de outro número real. $2x + 2y$
- o produto da soma pela diferença de dois números reais quaisquer. $(x + y)(x - y)$
- a soma dos quadrados de dois números reais quaisquer. $x^2 + y^2$
- a soma do quadrado com o triplo de um número real qualquer. $x^2 + 3x$

de resolução da mesma. Abaixo, um exemplo de atividades relacionadas com esta manifestação.

Figura 1: Atividades diretamente relacionadas à manifestação da álgebra como aritmética generalizada (CASTRUCCI, 2009, p. 38)

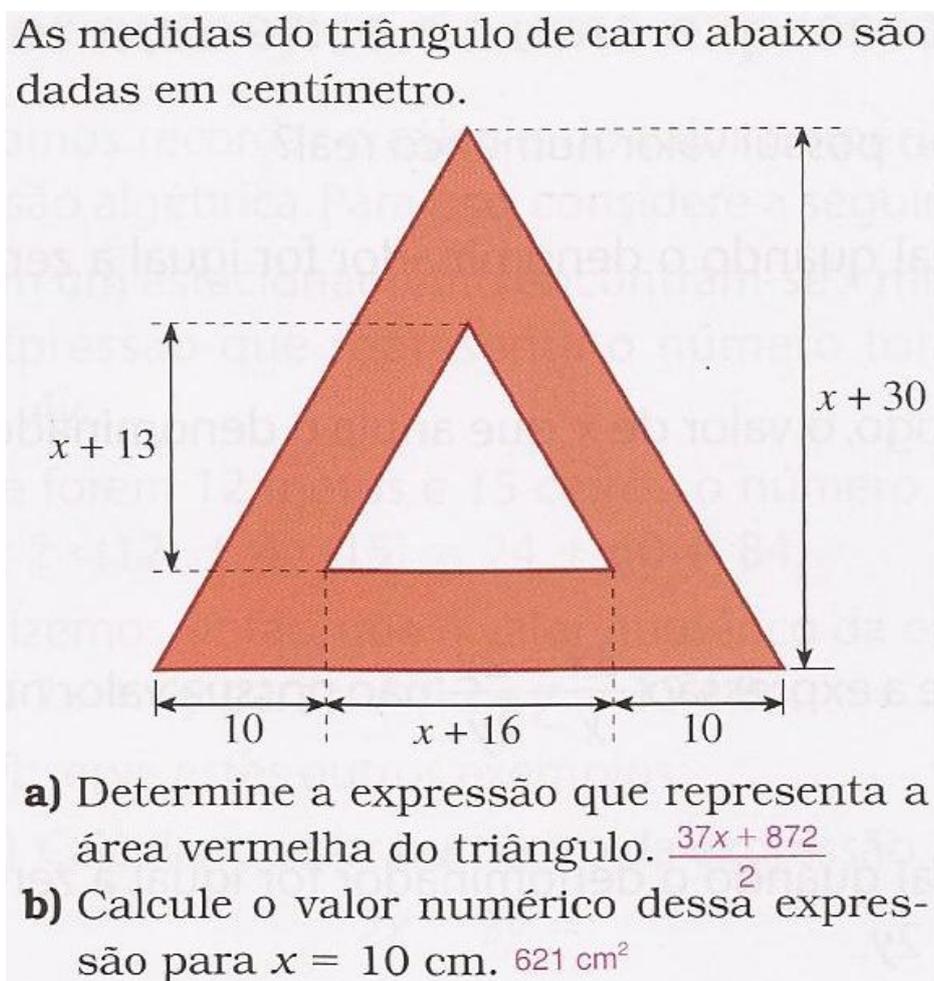


Figura 2: Atividade relacionada à manifestação da álgebra como aritmética generalizada e relação entre grandezas (BIANCHINI, 2006, p. 44)

Nas figuras acima podemos observar um bom exemplo de como a interpretação da estratégia de resolução pode influenciar na manifestação algébrica. Na figura 1 temos um exemplo fortemente ligado à álgebra como aritmética generalizada. No entanto, o item a da figura 2 não apresenta apenas em seu enunciado características desta manifestação, pois é possível interpretar a atividade como relação entre as grandezas área, altura e base. Neste caso, nossa opção foi levar em conta o fato de o exercício apresentar discussões a respeito de variações das medidas. Sendo assim, a atividade se torna um cálculo de área onde as medidas são valores genéricos, característica forte desta manifestação algébrica.

Álgebra como estudo de métodos e técnicas para resolver problemas: Estas atividades se mostraram bem definidas nos livros que consultamos. Como descrito por Usiskin (1995), esta manifestação se caracteriza pela utilização de certos procedimentos padronizados.

Resolva estas equações, sendo $U = \mathbb{R}$.

a) $x^2 - 25 = 0$ $\begin{matrix} x = 5 \text{ ou} \\ x = -5 \end{matrix}$ d) $25y^2 - 36 = 0$

b) $y^2 - 64 = 0$ e) $9x^2 - 1 = 0$
 $y = 8 \text{ ou } y = -8$

c) $81a^2 - 49 = 0$ f) $y^2 - \frac{9}{16} = 0$

Figura 3: Resolução de Equações (BIANCHINI, 2006, p.)

Determine os quocientes:

a) $(12a^2 + 9a) : (+3a)$ $4a + 3$

b) $(15x^3 - 10x^2) : (-5x)$ $-3x^2 + 2x$

c) $(ax + bx) : x$ $a + b$

d) $(3a^2 + 6a) : (4a)$ $\frac{3}{4}a + \frac{3}{2}$

e) $(2x^2 - 5x) : (-3x)$ $-\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

f) $\left(6a^3 - \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}a\right) : \left(\frac{4}{3}a\right)$ $\frac{9a^2}{2} - \frac{9}{16}a + \frac{3}{8}$

Determine o quociente e o resto:

a) $(x^2 + 11x + 18) : (x + 2)$ $x + 9; R: 0$

b) $(8x^2 - 10x + 5) : (2x - 2)$ $4x - 1; R: 3$

c) $(12x^3 - 17x^2 + 10x - 3) : (3x^2 - 2x + 1)$

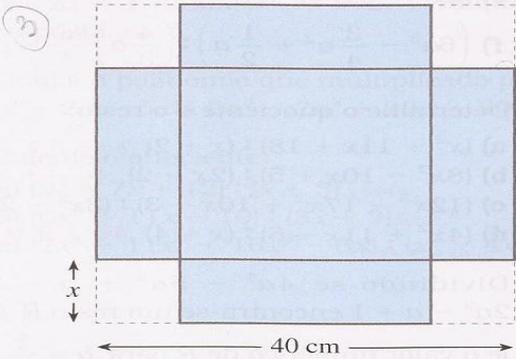
d) $(4x^2 + 11x - 6) : (x + 4)$ $4x - 5; R: 14$
c) $4x - 3; R: 0$

Figura 4: Atividades que envolvem procedimentos e estruturas (BIANCHINI, 2006, p. 56)

Na figura 3 é possível observar que a resolução de equações pode ser percebida como estudo de métodos e técnicas para resolver certos problemas (USISKIN, 1995). Na figura 4 ocorre uma variação para aritmética generalizada, devido ao fato de a divisão de polinômios estar relacionada com a divisão de números inteiros. No entanto, é possível pensar nesta divisão como um procedimento algorítmico, o que caracteriza um procedimento padronizado.

Álgebra como relação entre grandezas: Como mostramos anteriormente, as atividades listadas nesta manifestação apresentam ambigüidades com atividades listadas em aritmética generalizada. Apresentamos a seguir, um exemplo que distingue bem as duas categorias.

Carolina comprou uma folha de cartolina quadrada de 40 cm de lado e deseja construir uma caixa sem tampa com essa cartolina. Para isso, Carolina cortou em cada canto da folha um quadrado de mesmo tamanho. Observe:



a) Represente por meio de uma expressão algébrica a área do fundo da caixa. $(40 - 2x)^2$

b) Qual a capacidade dessa caixa? $(40 - 2x)^2 \cdot x$

c) Se Carolina cortar quadrados de 6 cm de lado, qual será a área aproveitada da folha? 1.456 cm^2

Figura 5: Problema envolvendo área e variação das medidas (BIANCHINI, 2006, p. 60)

No item a da figura acima, podemos identificar um problema parecido com o descrito na figura 2. No entanto esta atividade permite discussões a respeito do que

acontece com o volume da caixa de acordo com a variação de x . Esta possibilidade mostra que atividades que envolvem área e volume podem ser bons exemplos da manifestação da álgebra como relação entre grandezas.

Álgebra como estudo de estruturas: Nesta categoria registramos polinômios, produtos notáveis e escrita algébrica em geral. É importante destacar que esta manifestação apresentou menos interseções com as outras descritas anteriormente, ficando apenas ligada a álgebra como aritmética generalizada como vemos no exemplo abaixo.

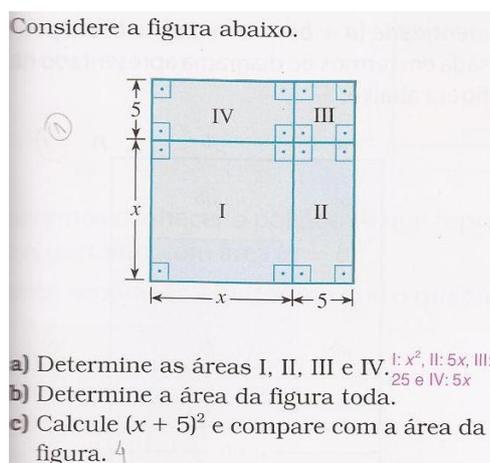


Figura 6: Atividade envolvendo produtos notáveis (CASTRUCCI, 2009, p. 47)

A atividade acima apresenta uma justificativa para o desenvolvimento de produtos notáveis através do conceito de área. Com este exemplo, podemos notar um conceito estrutural surgindo a partir de um conceito que, dependendo da abordagem do professor, pode ser encarado como numérico. Este fato, mostra uma proximidade entre as manifestações de aritmética generalizada e estudo de estruturas.

5. Considerações Finais

É fato que este trabalho está apenas no início, mas acreditamos que o conhecimento das diversas maneiras de abordar o ensino de álgebra é um trabalho de grande importância. Nesta comunicação apresentamos resultados parciais da pesquisa: “Manifestações algébricas: da teoria à prática”. Foi possível identificar alguns contextos que fazem com que uma atividade se caracterize por uma das manifestações algébricas descritas por Ferreira (2009).

Além disso, foi possível constatar que alguns conteúdos presentes no processo de educação algébrica do Ensino Fundamental são caracterizados por manifestações específicas. Destacamos como exemplos os estudos a respeito de notação (que

caracterizam um estudo de aritmética generalizada), a resolução de equações (caracterizada pelo estudo de técnicas), a relação entre áreas e dimensões de uma figura geométrica (relações entre grandezas) e o estudo de polinômios (estruturas).

Por fim, lembramos que estamos em processo de discussão a respeito das possíveis abordagens para cada uma das manifestações descritas neste trabalho. Esperamos que as futuras intervenções baseadas nos resultados de nossa pesquisa possam contribuir para um ensino de álgebra cada vez mais eficiente e significativo.

6. Referências

- BIANCHINI, E. **Matemática**: 6^a serie. 6^a ed. Sao Paulo: Moderna, 2006. 233p.
- BIANCHINI, E. **Matemática**: 7^a serie. 6^a ed. Sao Paulo: Moderna, 2006. 272p.
- BIANCHINI, E. **Matemática**: 8^a serie. 6^a ed. Sao Paulo: Moderna, 2006. 280p.
- CASTRUCCI, B.; GIOVANNI, J. R.; GIOVANNI JR, J. R. **A conquista da matemática**: 7^o ano. São Paulo: FTD, 2009. 336p.
- CASTRUCCI, B.; GIOVANNI, J. R.; GIOVANNI JR, J. R. **A conquista da matemática**: 8^o ano. São Paulo: FTD, 2009. 384p.
- CASTRUCCI, B.; GIOVANNI, J. R.; GIOVANNI JR, J. R. **A conquista da matemática**: 9^o ano. São Paulo: FTD, 2009. 368p.
- FERREIRA, M. L. **Álgebra**: como as crenças dos professores influenciam na aprendizagem dos alunos. 2009. 161f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- FIorentini, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVAO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACION MATEMATICA, 5, 2005, Porto. **Anais**. CIBEM, 2005. p. 1-22.
- FREITAS, M. A. **Equação do 1^o grau**: métodos de resolução e análise de erros no Ensino Médio. 2002. 146f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Campinas, SP: Papyrus, 1997. 176p (SBEM: Coleção Perspectivas em Educação Matemática).
- SANTOS, L. G. **Introdução do pensamento algébrico**: um olhar sobre professores e livros didáticos de matemática. 2007. 231f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Educação, Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitoria.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P (org.). As ideias da álgebra. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo, 1995, p. 9-22.