CONHECIMENTOS SOBRE OS NÚMEROS IRRACIONAIS MOBILIZADOS POR ALUNOS BRASILEIROS E FRANCESES DURANTE A ESCOLARIZAÇÃO

Veridiana Rezende
Universidade Estadual do Paraná – Campo Mourão
rezendeveridiana@gmail.com

Clélia Maria Ignatius Nogueira
Centro Universitário de Maringá
voclelia@gmail.com

Resumo:
Este texto apresenta parte dos resultados de uma pesquisa mais ampla, que teve por objetivo analisar os conhecimentos sobre os números irracionais mobilizados pelos alunos no decorrer do processo escolar. A investigação foi fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais, e os sujeitos da pesquisa foram 21 alunos brasileiros que finalizavam o Ensino Fundamental, Médio e Licenciatura em Matemática, e 21 alunos franceses que finalizavam níveis correspondentes do sistema de ensino francês. Como metodologia, utilizou-se de entrevistas clínicas individuais sustentadas na resolução pelos alunos de atividades envolvendo números irracionais ou suas ideias base. Os principais resultados apontam que independente do sistema de ensino que os alunos estejam inseridos, independente dos currículos explicitarem ou não o conceito de números irracionais, é a experiência escolar, a diversidade de situações vivenciadas e o estágio de desenvolvimento cognitivo que os sujeitos se encontram que vão favorecer a apropriação do conceito de números irracionais.

Palavras-chave: Campo Conceitual; Ensino de Matemática; Números irracionais.

1. Introdução

Esta pesquisa trata-se de uma investigação, que se encontra em fase de conclusão, e diz respeito ao estudo do Campo Conceitual dos números irracionais no processo de escolarização, considerando Campo Conceitual, no sentido de Vergnaud (1990), como um conjunto de situações, conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas.

Os números irracionais são essenciais para a compreensão de diversos conceitos matemáticos que contemplam os currículos da Educação Básica. No campo geométrico, por exemplo, os números irracionais embasam o estudo de medidas de diagonais de quadrados, áreas de quadrados, altura de pirâmides, áreas e perímetros de circunferências, volumes e áreas de esferas e cones, entre outros. No campo trigonométrico, certos valores de ângulos, assim como $sen\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, são representados com o auxílio de números irracionais. No campo algébrico, vale citar a pertinência desses números no estudo do Teorema de Pitágoras, resolução de equações do segundo grau, e de modo mais geral, equações algébricas de grau *n*, tais como, $x^n = a,\ a \in R_+$. Igualmente, no campo numérico, o conceito de raiz quadrada, raiz enésima, potência, números reais, não poderiam ser bem definidos sem o aporte desses números. E, ainda, no que se refere às funções reais, é a existência dos irracionais que garante a questão da continuidade.

No entanto, a experiência de uma das autoras com alunos do 4º ano do Curso de Licenciatura em Matemática, alerta para sérios equívocos desses alunos relacionados às caracterizações de números irracionais, que devem ser estudados desde o 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998). A falta de conhecimento dos números irracionais por alunos de Cursos de Ciências Exatas, também é apontado por Igliori e Silva (2001), Soares, Moreira e Ferreira (1999) e Melo (1999). Assim, com o interesse em investigar sobre os conhecimentos mobilizados pelos alunos desde os anos finais do Ensino Fundamental, período em que, estes números devem ser institucionalizados (BRASIL, 1998), este texto apresenta parte de uma pesquisa mais ampla que teve por objetivo analisar os conhecimentos mobilizados por alunos brasileiros que finalizam o Ensino Fundamental, Médio e Licenciatura em Matemática, e por alunos franceses de níveis de ensino correspondentes, *Collège*, *Lycée* e Licenciatura em Matemática, em atividades matemáticas envolvendo números irracionais.

2. Os números irracionais nos currículos dos sistemas de ensino brasileiro e francês

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN para a disciplina de Matemática para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1998), os números irracionais devem ser institucionalizados no 8º e/ou 9º ano. Para o Ensino Médio, os números irracionais são retomados no estudo dos conjuntos numéricos, e os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 1999) sugerem que estes números devem estar relacionados com o estudo de geometria e medidas.

No que diz respeito aos números irracionais nos Cursos de Licenciatura em Matemática, cujos alunos são sujeitos colaboradores desta pesquisa, os números reais, e, portanto, os irracionais, fazem parte da ementa das disciplinas de Cálculos Diferencial e

Integral I e Análise Real. No entanto, uma exploração detalhada, ou com teorias sobre a construção desses números não faz parte da ementa desses cursos, ficando a critério do professor dessas disciplinas, sobretudo da disciplina de Análise Real.

Em relação ao sistema de ensino francês, os números irracionais não são explicitados nos currículos da Educação Básica - *Collège* ou *Lycée*, ficando a cargo do professor de matemática e dos autores de livros didáticos explicitarem ou não este conceito. No entanto, desde a *Quatrièmme* - nível correspondente ao 8º ano do Ensino Fundamental -, com o estudo do Teorema de Pitágoras, na *Troisièmme* – correspondente ao 9º ano -, por meio estudo das Raízes Quadradas, que possuem um capítulo nos manuais desse nível de ensino, ou no estudo de Geometria, por meio das figuras geométricas planas e sólidos geométricos, existe a presença de números irracionais algébricos, da forma $\sqrt{n}$, com $n \in Z_+$, bem como do número π. Além disso, no *Collége* e no *Lycée*, os números irracionais também se fazem presentes no estudo de Trigonometria.

No que se refere às ementas do Curso de Licenciatura em Matemática da instituição francesa investigada, nota-se que o conceito de número irracional, bem como teorias que sustentam este conceito (Cantor, Dedekind, o método de Eudoxo), e estudo de alguns irracionais algébricos especiais - número e, os decimais de π, construção de números transfinitos - são tratados em diversos momentos do curso, seja nas disciplinas de Análise, Teoria dos Números ou História da Ciência.

Desse modo, conclui-se que no que diz respeito aos números irracionais, no currículo da Educação Básica brasileira estes números são explícitos e nas ementas dos cursos de Licenciatura em Matemática analisadas, a ênfase pelo ensino desses números depende do professor que ministra as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e Análise Real. Já em relação ao currículo francês, a ordem é inversa, os currículos da Educação Básica não explicitam estes números, no entanto, na ementa do curso de Licenciatura investigado, os números irracionais são mencionados direta ou indiretamente em diversos momentos. Entretanto, independente do sistema de ensino, explicitando ou não este conceito, não se pode negar que os irracionais se fazem presentes em diversas situações vivenciadas pelos alunos ao longo da escolarização, conforme já mencionado.

3. A contribuição da Teoria dos Campos Conceituais para a pesquisa

A Teoria dos Campos Conceituais trata-se de uma teoria cognitivista que busca compreender o desenvolvimento dos conceitos no decorrer da aprendizagem escolar (VERGNAUD, 1990). Vergnaud (2009) defende que o desenvolvimento de um conceito pelo sujeito ocorre e é aprimorado ao longo do tempo, pois, um sujeito aprende e se desenvolve em qualquer idade, inclusive na fase adulta. Este pesquisador considera que a experiência tem um papel essencial, visto que "[...] é ao longo da experiência que um indivíduo, adulto ou criança, encontra a maior parte das situações às quais ele deve se adaptar seja uma experiência cotidiana ou uma experiência profissional" (p. 13).

Vergnaud (1990) atribui muita importância à reflexão nas aprendizagens matemáticas, e tenta compreender, nas competências dos sujeitos, as que estão relacionadas aos conhecimentos implícitos. Nesta teoria, não é apenas a resolução de um problema pelos sujeitos que interessa, mas sim o modo como eles resolvem e, principalmente, os conhecimentos implícitos que os alunos mobilizam ao resolver um problema.

Para Vergnaud (2009), é difícil para uma criança explicitar suas competências em palavras, e, apesar de certa experiência em determinadas situações, muitos adultos também não conseguem explicitar verbalmente boa parte dos conhecimentos que utilizam na ação. Partindo destas diferenças entre a forma operatória do conhecimento e sua forma predicativa é que o pesquisador introduz, no sentido psicológico, o conceito de *invariante operatório*. Os invariantes operatórios são conhecimentos que um sujeito dispõe, na ação, para resolver determinada situação. Eles podem ser universais ou apenas localmente verdadeiros. Estes conhecimentos, chamados de conhecimentos em ação, podem ser explicitáveis ou não, conscientes ou não.

Os invariantes operatórios são modelos para se descrever a conduta do sujeito, e são diferenciados em duas categorias: conceitos em ação e teoremas em ação: "Um conceito em ação é um conceito considerado pertinente na ação. Um teorema em ação é uma proposição tida como verdadeira na ação" (VERGNAUD, 2009, p. 23). Os conceitos em ação e os teoremas em ação são de naturezas distintas. Os primeiros não são passíveis de serem verdadeiros ou falsos, eles apenas são pertinentes ou não para a situação. Já os teoremas em ação podem ser verdadeiros ou falsos.

Assim, com vistas a atingir o objetivo da pesquisa, esta investigação fundamentada nesses pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais, propôs-se a analisar os conhecimentos – com atenção especial os teoremas em ação - relacionados aos números irracionais de alunos brasileiros que finalizam o Ensino Fundamental, Médio e Licenciatura em Matemática, e alunos franceses de níveis de ensino correspondentes, por meio de *entrevistas clínicas individuais sustentadas na resolução pelos alunos de atividades*, relacionadas aos números irracionais. As entrevistas foram filmadas e participaram da entrevista 42 alunos de instituições públicas, sendo 21 alunos brasileiros e 21 alunos franceses.

4. Apresentação da atividade e análise dos resultados

O instrumento de investigação da pesquisa consistiu de 9 atividades, com as quais se procurou contemplar diversas situações do Campo Conceitual dos números irracionais, diferentes significantes (símbolos e formas de linguagem) e os possíveis teoremas em ação que poderiam ser mobilizados pelos alunos ao resolver a situação. Ainda para a elaboração das atividades, foram consideradas sete ideias base necessárias para a compreensão dos números irracionais. No entanto, para este texto, serão apresentados os resultados da 1ª Atividade, que analisa os conhecimentos dos alunos em relação às ideias base I, III e IV de números irracionais, conforme especificadas a seguir. Para isto, foram escolhidos dez números: $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, π, $3{,}14$, $0{,}333\ldots$, $0{,}10100100010000\ldots$, $\frac{2}{3}$, -4, $\sqrt{-4}$, 0, que foram representados em cartões e exibidos aos sujeitos da pesquisa.

Para preservar a identidade dos sujeitos da pesquisa, os alunos foram identificados por uma sigla correspondente a uma letra inicial de seu respectivo nível de ensino e um número que varia de 1 a 7, conforme a legenda a seguir:

Quadro 1: Siglas dos sujeitos colaboradores da pesquisa

Níveis do Sistema de Ensino Brasileiro	Sigla
Ensino Fundamental	F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7
Ensino Médio	M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7
Graduação em Matemática	G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7
Níveis do Sistema de Ensino Francês	**Sigla**
Collège	C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7
Lycée - Terminale Economique et Social - TES	ES1, ES2, ES3, ES4
Lycée - Terminale Scientifique - TS	S1, S2, S3, S4, S5
Licence en Mathématiques	L1, L2, L3, L4, L5

Em relação à ideia base IV, *considerar a existência de números irracionais e perceber para quê esses números servem*, com exceção do aluno francês L1, que alegou que o número $0{,}101001000...$ é irracional e que, por este motivo, *este número não existe verdadeiramente*, os demais alunos do Ensino Superior foram unânimes em considerar a existência de todos os números representados nos cartões.

Dentre os alunos brasileiros do Ensino Médio, o único número que foi considerado não existir por cinco alunos foi o número $\sqrt{-4}$. Já dentre os alunos do *Lycée*, além de $\sqrt{-4}$, também apareceram na lista dos não existentes os números 0; -4; $0{,}101001000...$ e $0{,}333...$. Estes dois últimos números foram considerados não existentes por 2 alunos do *Lycée*, porque, segundo os alunos, se tratam de números com infinitas casas decimais.

No que se refere aos alunos brasileiros do Ensino Fundamental e alunos franceses do *Collège*, além de não considerarem a existência de $\sqrt{-4}$, destacam-se as dúvidas sobre a existência de $0{,}101001000...$ Como exemplo, cita-se o aluno F3, que disse *nunca ter visto o número* $0{,}101001000\ldots$ e, por isto, não sabia dizer se este número existe ou não. O número $\sqrt{3}$ também causou dúvida entre os alunos, talvez pelo fato de não existir um número inteiro que seja igual a $\sqrt{3}$, como pode ser indicado na fala de F7: *Não existe né... porque não existe raiz de três.* Acredita-se que a dúvida de alguns alunos também estava relacionada à conversão $\sqrt{3}$ para $1{,}732050...$, concluindo pela não existência de números em sua representação decimal infinita.

Em relação ao número π, apenas o aluno F7 disse não conhecer o símbolo que representa esse número, e alegou nunca ter ouvido falar do número π. Considera-se este fato ao menos inquietante, vindo de um aluno que finaliza o 9º ano do Ensino Fundamental, uma vez que, segundo os PCN (BRASIL, 1998), nesta etapa do ensino, os alunos devem ter estudado sobre os conjuntos numéricos, e devem ter conhecimentos sobre fórmulas de área e comprimento de circunferência, por exemplo, que estão diretamente relacionadas com o número π.

Ao serem questionados sobre *para quê servem os números representados nos cartões*, a maioria dos alunos ofereceu argumentos apenas para os números racionais:

$3{,}14$, $\frac{2}{3}$, $0{,}333...$, que foram justificados para fazer contas, para repartir, alguma coisa repartida (no caso de $0{,}333...$), para medir, resultado de cálculos matemáticos.

O número π*:* quanto a dizer para quê serve o número π, dentre os alunos do Ensino Fundamental e do *Collège*, apenas um aluno brasileiro disse que o número π está relacionado com fórmulas de circunferência. Os demais alunos não souberam justificar a existência desse número. Já todos os alunos do Ensino Médio e 5 alunos do *Lycée* dentre os 9 entrevistados, relacionaram o número π com áreas de circunferências e volumes de esferas. Quanto aos alunos do Ensino Superior, eles também relacionaram, por unanimidade, aplicações do número π com cálculos de área e perímetro de circunferência, e áreas e volumes de esfera.

O número $\sqrt{3}$: nenhum aluno do Ensino Fundamental, Médio, *Collège* e TES soube dizer para quê serve o número irracional algébrico $\sqrt{3}$. Dentre os alunos da Educação Básica entrevistados, apenas dois alunos franceses de TS exemplificaram que $\sqrt{3}$ pode representar a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo.

Apesar de alguns argumentos corretos ao relacionarem $\sqrt{3}$ com medidas de segmentos, até mesmo os alunos brasileiros do Curso de Matemática apresentaram dificuldades para justificar para quê servem números irracionais algébricos tais como $\sqrt{3}$. Embora esses alunos reconheçam que esses números representam medidas de certos segmentos, notam-se incompreensões dos números irracionais, conforme explicitado pelo aluno G4: *Esses números, eu acho que foram criados para dar resposta a uma medida que não é exata... eu sei que os irracionais existem lá na reta numérica porque nem tudo é inteiro e tal, mas eu não consigo ver utilidade deles... eu sei que eles completam a reta, mas não consigo ver pra que servem os irracionais!*

Quanto aos alunos franceses do Ensino Superior, dentre os cinco entrevistados, quatro disseram que $\sqrt{3}$ pode representar a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo, a diagonal de um quadrado, ou, no caso de L3, valores de seno, cosseno, resultados do Teorema de Pitágoras, medida na reta real. Apenas L5 disse que $\sqrt{3}$ serve para fazer cálculos, sem especificá-los.

O número $0{,}101001000...$: nenhum aluno do Ensino Fundamental, Médio, *Collège*, *Lycée*, e Licenciatura Matemática brasileira, justificou a existência de números como

$0{,}1010010001000...$. Apenas dois alunos franceses do Ensino Superior, L4 e L2, disseram que, como se trata de um número real, então *existe uma medida associada a este número.* A diferença entre as respostas dos alunos dos diferentes níveis é que todos os alunos do Ensino Superior brasileiro e francês consideraram a existência do número $0{,}101001000...$. Porém, nem mesmo os alunos desse nível de ensino souberam apresentar uma justificativa para a existência de números irracionais transcendentes, tais como $0{,}101001000...$. Alguns alunos, disseram, incorretamente, que é possível que exista uma fração que represente este número, ou seja, o consideraram racional. De acordo com o aluno G5, $0{,}101001000...$ *é um número muito pequeno, geralmente utilizado em construções [...] eu não me lembro se é periódica ou não, porque ela vai mudando né? Periódica mas aumenta um zero... ela é periódica sim!*

Essa dificuldade dos licenciandos em Matemática em exprimir para quê servem números irracionais também foi percebida na pesquisa de Soares, Ferreira e Moreira (1999). Dos 84 alunos investigados por estes pesquisadores, apenas 15 alunos (18%) responderam de modo coerente à pergunta *O que te leva a acreditar na existência dos números irracionais?*, justificando que os irracionais servem para expressar medidas de diagonais de triângulos retângulos, e que sem os irracionais a reta seria cheia de buracos. Segundo os mencionados pesquisadores, estas dificuldades dos licenciandos apontam para a necessidade dos cursos de Licenciatura em Matemática se adequarem a uma abordagem dos números irracionais voltada para o ponto de vista didático e pedagógico, favorecendo as ações pedagógicas relacionadas a este conceito dos futuros professores.

No que diz respeito à ideia base I, *compreender sobre a questão das infinitas casas decimais de certos números,* foram elaboradas quatro questões com a intenção de investigar quais as percepções dos alunos em relação às infinitas casas decimais dos números irracionais. Para isto, primeiramente desejou-se saber se os alunos distinguem uma quantidade finita que a princípio não pode ser determinada, tal como a quantidade de grãos de arroz que uma pessoa poderá comer em sua vida, de uma quantidade infinita. Esta situação foi inserida porque se entende que, se o aluno não reconhece ao menos esta diferença entre quantidades finitas e infinitas, ele não poderá compreender a ideia de infinitas casas decimais de um número irracional.

Respostas equivocadas relacionadas a dizer que a quantidade de *grãos arroz que eles já comeram* é infinita foram identificadas em nove alunos, sendo um aluno do Ensino

Fundamental e oito alunos franceses, sendo três alunos do *Collège*, um aluno de TS, três alunos de TES e um aluno da *Licence*. E, relativamente à quantidade de *grãos de arroz que eles ainda irão* comer em suas vidas, respostas erradas dizendo que se trata de uma quantidade infinita, foram percebidas ainda com maior frequência: quatro alunos do Ensino Fundamental e dez alunos franceses: três do *Collège*, cinco do *Lycée* e dois do Curso de Matemática. Suas justificativas se referem a um número muito grande ou a uma quantidade que não é possível determinar, conforme apontado pela aluna S4 de TS: *Porque nós não podemos dizer um número preciso de grãos de arroz.*

Destacam-se as dificuldades relacionadas à ideia de infinito presente nos alunos do Ensino Superior, como no caso da aluna francesa L3 do Curso de Matemática, que associou a quantidade de grãos de arroz com o conjunto dos números naturais, justificando que se trata de uma quantidade enumerável infinita: *Até o presente... é enumerável, nós podemos contar... pode ser como os grãos de areia... isto me parece infinito. Eu penso que infinito, mas enumerável, como no conjunto dos naturais N [...] E os grãos de arroz que eu poderei comer, é a mesma lógica, infinito, de fato* (L3).

Ao serem questionados sobre a existência de mais grãos de arroz que os alunos ainda poderão comer em suas vidas ou mais dígitos 3 no número $0{,}333\ldots$, três alunos do Ensino Fundamental, dois alunos do *Collège*, dois de TS e um aluno francês do Curso de Matemática, disseram que acreditam existir mais grãos de arroz do que dígitos 3 no número $0{,}333\ldots$, ou que a quantidade de grãos de arroz que eles irão comer e a quantidade de dígitos 3 no número $0{,}333\ldots$ é a mesma: *Existem infinitos dígitos 3... se eu considero que a quantidade de grãos de arroz é infinita, eu não posso comparar as duas quantidade. Então, não existe mais um do que o outro, os dois são infinitos* (L5).

Nota-se que esses alunos não compreendem a distinção entre um número finito muito grande, que a princípio não se pode determinar, e uma quantidade infinita. Esse fato pode leva-los a conceber um número com uma grande quantidade de casas decimais como sendo um número com infinitas casas decimais.

Em se tratando da ideia base III, *diferenciar um número irracional de um número racional*, todos os alunos brasileiros, entrevistados, responderam que já estudaram ou já ouviram falar sobre estes números. No entanto, nenhum aluno do Ensino Fundamental e Médio classificou corretamente em racionais e irracionais, os números solicitados. Os erros mais frequentes dos alunos do Ensino Fundamental foram classificar como irracional os números $3{,}14$ (cinco alunos), $\frac{2}{3}$ (cinco alunos) e $\sqrt{-4}$ (cinco alunos). Já os erros mais frequentes dos alunos do Ensino Médio foram: classificar $0{,}333\ldots$ como irracional (quatro alunos); classificar π como racional (quatro alunos); e classificar $\sqrt{3}$ como racional (três alunos). Quanto aos sete alunos brasileiros do Ensino Superior, apenas três classificaram os números corretamente. O erro mais frequente foi em relação ao número $0{,}101001000\ldots$, pois, dois alunos o classificaram como racional, e dois alunos ficaram na dúvida e não o classificaram. Um aluno ficou na dúvida se o número $0{,}333\ldots$ seria racional ou irracional, e por isto não o classificou em nenhum dos conjuntos numéricos.

No que diz respeito aos alunos franceses, os alunos do *Collège* disseram não saber sobre os números irracionais. Porém, mesmo diante desse fato, já esperado pela pesquisadora - pois, conforme mencionado, os números irracionais não fazem parte oficialmente do currículo desse nível de ensino-, os alunos eram questionados se, observando os números representados nos cartões, eles teriam alguma intuição sobre quais poderiam ser irracionais, racionais, ou se alguns dos números poderiam ser classificados nem como irracionais nem como racionais. Diante desse questionamento, três alunos do *Collège* classificaram os números de acordo com suas percepções. Os demais não os classificaram, justificando dizendo que nunca ouviram falar desses números.

Dentre os três alunos do *Collège* que classificaram os números, os erros mais frequentes foram: classificar π, assim como $3{,}14$, como racional; classificar $0{,}333\ldots$ como irracional; e classificar $\frac{2}{3}$ como irracional. Quanto aos alunos dos *Lycées*, apesar de não terem classificado corretamente os números em racionais e irracionais, eles tentavam classificá-los, demonstrando já terem ao menos ouvido falar sobre esses números. Destacam-se os erros mais frequentes dos alunos dos *Lycées*: classificar $0{,}333\ldots$ como irracional (quatro alunos); classificar $0{,}101001000\ldots$ como racional (quatro alunos); classificar π, assim como $3{,}14$, como racional (três alunos). Referente aos alunos do Ensino Superior francês, apenas um aluno classificou os números corretamente. Os erros mais frequentes foram: classificar $\sqrt{-4}$ como irracional (dois alunos) e classificar $0{,}333\ldots$ como irracional (um aluno).

Semelhanças entre os conhecimentos de números irracionais mobilizados pelos alunos entrevistados

A análise das respostas possibilitou perceber algumas semelhanças entre a mobilização dos signos pelos alunos e os conhecimentos de números racionais e números irracionais, permitindo classificar[1] suas respostas em seis categorias, conforme descritas a seguir.

i) *Irracionalidade associada a não existência dos números*: Esta classe de respostas foi percebida, sobretudo, em relação ao número $\sqrt{-4}$, pois cinco alunos do Ensino Fundamental, três alunos do Ensino Médio e um aluno de TS disseram não existir ou apresentaram dúvidas sobre a existência de $\sqrt{-4}$, e esses alunos foram unânimes em classificá-lo como irracional. Outro exemplo referente a esta classe de respostas é a classificação do aluno F7, que, no início da entrevista, disse que os números $3{,}14$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{-4}$, $0{,}101001000\ldots$, $0{,}333\ldots$, 0 não existiam, e estes mesmos números foram classificados por ele como números irracionais. Em relação ao número $0{,}12547896351198321\ldots$, F7 respondeu que o referido número não existe, e que o classificaria como irracional, justificando: *Eu acho que... é porque ele não tem fim, então... eu acho que ele é irracional.* Identificar a não existência dos números com irracionalidade, também foi constatada nas respostas de sujeitos do Ensino Superior da pesquisa da Melo (1999), na qual um aluno respondeu: *Racional existe, irracional não existe*.

ii) *Irracionalidade associada aos números que não são inteiros*: Foi percebido que três alunos do Ensino Fundamental, um aluno do *Collège* e um aluno de TS associaram números que não são inteiros, na representação fracionária, decimal ou na forma de radical, aos números irracionais. Este fato é notado na resposta de F2, ao ser questionado sobre quais os critérios utilizados para a classificação dos números $\sqrt{9}$, -4, 0 em racionais, e $\frac{2}{3}$, $3{,}14$, $\sqrt{3}$, $0{,}333\ldots$, $\sqrt{-4}$, $0{,}101001000\ldots$ em irracionais: *Porque os números* $\sqrt{9}$, -4, 0 *não são quebrados, e os números* $\frac{2}{3}$, $3{,}14$, $\sqrt{3}$, $0{,}333\ldots$, $\sqrt{-4}$, $0{,}101001000\ldots$ *são quebrados.*

[1] Cabe ressaltar que estas classificações não são excludentes, ou seja, as respostas dos alunos podem fazer-se presentes em mais de uma dessas classes especificadas acima.

Fichbein, Jehian e Cohen (1995) também identificaram esta categoria de resposta, que diz respeito a identificar um número irracional com um número que não é inteiro, em 28% dos alunos investigados que cursavam *9th Grade*[2]. Desse modo, os resultados da presente pesquisa, juntamente com os resultados de Fichbein, Jehian e Cohen (1995), sugerem a possibilidade da mobilização de um conhecimento falso implícito nas respostas dos alunos, denominado por Vergnaud (1990) por teorema em ação, TAF1: *Se x não é um número inteiro, então x é irracional.*

iii) *Irracionalidade associada a números negativos*: Dentre os alunos entrevistados, dois do Ensino Fundamental, três do Ensino Médio, e dois do *Lycée*, ou classificaram o número -4 como número irracional ou ficaram na dúvida e preferiram não classificá-lo. Este fato também foi percebido nas pesquisas de Fichbein, Jehian e Cohen (1995) e de Igliori e Silva (1999). Nesta última pesquisa, por exemplo, um dos argumentos dos alunos para classificar números em racionais e irracionais foi: *Racionais: números positivos, irracionais: números negativos* (p. 54), indicando, desse modo, a possibilidade de um teorema em ação falso implícito nas respostas desses alunos TAF2: *Se x é um número negativo, então x é irracional.*

iv) *Irracionalidade associada à representação decimal infinita*: Nove alunos entrevistados da Educação Básica relacionaram a questão da irracionalidade de um número às suas infinitas casas decimais, sem alusão ao período. Por exemplo, o aluno S1, de TS classificou como irracionais os números π, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{3}$, $0{,}101001000\ldots$, $0{,}333\ldots$, justificando esta classificação devido à vírgula presente nestes números, e uma *quantidade astronômica* de dígitos após a vírgula.

Cabe destacar que 13 alunos entrevistados da Educação Básica, classificaram $\frac{2}{3}$ como número irracional. Para alguns alunos, tal classificação decorre do fato de $\frac{2}{3}$ não se tratar de um número inteiro, porém, para outros alunos, tal classificação diz respeito às infinitas casas decimais do número desse número.

Essa questão de associar números irracionais com representação decimal infinita sem alusão à periodicidade também foi detectada nas pesquisas de Ferreira, Soares e Moreira (1999), Melo (1999), Igliori e Silva (2001), e Fichbein, Jehian e Cohen (1995),

[2] Nível escolar do sistema de ensino americano cuja idade média dos alunos é de 14 anos, semelhante ao 9º ano do Ensino Fundamental brasileiro.

sendo que, nesta última, 40% dos alunos do *9th Grade*, 38% do *10th Grade*[3] e 3 % dos licenciandos em Matemática definiram de modo errôneo um número irracional como sendo um número com infinitos dígitos. Esse fato também foi identificado na pesquisa de Robinet (1986, p. 15), percebido na fala de um dos sujeitos: *Um número real é um número que pode ter infinitos números depois da vírgula (positivo ou negativo).* Desse modo, pode-se indicar um possível teorema em ação falso implícito nas respostas desses alunos de TAF3: *Se um número x tem representação decimal infinita, então x é irracional.*

v) *Números irracionais não podem ser escritos como a razão entre dois números inteiros*: As caracterizações de números irracionais mais frequentes nos livros didáticos são: a) um número irracional não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros; b) um número irracional possui representação decimal infinita e não periódica. No entanto, as justificativas dos alunos brasileiros e franceses do Ensino Superior, e de dois alunos franceses de TS, para classificar os números como irracionais, diz respeito à caracterização a).

Neste momento da entrevista, nenhum dos alunos desses níveis de ensino mencionou o fato de que um número irracional possui infinitas casas decimais não periódicas. Possivelmente, decorrem desse fato dúvidas explicitadas por quatro alunos brasileiros e um aluno francês do Curso de Matemática, sobre a natureza do número $0{,}101001000...$. Eles se questionavam sobre a existência de uma fração que pudesse representar o referido número: *Eu acho que é irracional, mas eu não sei, porque às vezes pode existir uma fração que resulte nesse número* (aluna G6). Se esses alunos fizessem referência à caracterização b) de números irracionais, é provável que eles tivessem percebido que o número $0{,}101001000...$ trata-se de um irracional.

Resultado semelhante foi apontado por Ferreira, Soares e Moreira (1999). Dentre os 84 alunos de curso de Licenciatura em Matemática que responderam à questão: *Pra você, o que é um número irracional?* Apenas 29 responderam de modo coerente, sendo que 22 alunos responderam de acordo com a caracterização a), e apenas sete alunos responderam de acordo com a caracterização b), indicando que a definição de números irracionais mais presente para os alunos é: *aquele número que não pode ser escrito como uma fração.* Desse modo, nota-se que, embora o teorema em ação verdadeiro TAV1: *Se um número x possui infinitas casas decimais não periódicas, então x é irracional* também caracteriza um

[3] Nível escolar do sistema de ensino americano semelhante ao 1º ano do Ensino Médio brasileiro.

número irracional, são os teoremas em ação verdadeiros TAV2: *Se um número x pode ser escrito na forma* $\frac{p}{q}$*, com* $p, q \in Z$ *e* $q \neq 0$*, então x é racional*; e TAV3: *Se um número p não é racional, então p é irracional,* que aparecem com mais frequência implícitos nas respostas dos alunos do Ensino Superior e de TS, entrevistados nesta pesquisa. Esse fato pode levar a algumas dúvidas e equívocos no momento dos alunos classificarem os números como irracionais ou racionais.

vi) *Falta de percepção sobre a não periodicidade de certos números*: Pode-se afirmar que, dentre os alunos que classificaram os números em racionais e irracionais, com exceção de um aluno brasileiro do Ensino Médio e um aluno francês de TS, os alunos do Ensino Fundamental e Médio, e respectivos níveis do sistema de ensino francês, não perceberam as diferenças concernentes à periodicidade ou não dos números $0{,}101001000...$ e $0{,}333...$, pois ou os alunos classificavam ambos os números como racionais, ou classificavam ambos os números como irracionais. Este fato também foi detectado na classificação do aluno francês L5 do Ensino Superior, assim como na pesquisa de Melo (1999), na qual mais de 30% dos alunos do Ensino Superior de Ciências Exatas, desconhecem a irracionalidade do número $0{,}171771777\ldots$.

5. Considerações finais

Em relação às situações e ideias base do Campo Conceitual dos números irracionais, constatou-se que independente do sistema de ensino que os alunos estejam inseridos, independente desse conceito estar explícito ou não nos currículos e livros didáticos, de apresentar ou não a definição dos números irracionais aos alunos, de se inserir ou não um capítulo nos livros didáticos para se estudar a natureza dos números, esses fatores não interferem nos conhecimentos dos alunos em relação à natureza dos números. Ao contrário, os resultados da presente investigação apontam que é a vivência escolar, e a diversidade de situações vivenciadas pelos alunos, o estágio de desenvolvimento cognitivo em que os alunos se encontram e a experiência com situações matemáticas, que vão favorecer a aquisição do conceito de números irracionais.

Em relação à ideia base IV, os alunos do Ensino Fundamental e do *Collège* argumentaram que vários dentre os números considerados não existiam, e não souberam dizer para quê servem os referidos números irracionais. Já os alunos do Ensino Médio e *Lycée*, apesar de não considerarem a existência de alguns números, apresentaram menos equívocos do que os alunos do Ensino Fundamental e *Collège*, além de exibirem aplicações para o número π. Enquanto que os alunos do Ensino Superior consideraram a existência de todos os números representados nos cartões; argumentaram sobre aplicações para o número π; apesar de algumas dúvidas, eles associaram, principalmente, o número $\sqrt{3}$ com medidas de segmentos; e dois alunos franceses disseram que o número $0{,}101001000...$ representa uma medida por se tratar de um número real.

Relativamente à noção de infinito, ideia base I, pode-se dizer que alguns alunos entrevistados, sobretudo os da Educação Básica, não compreendem nem ao menos noções básicas, como, por exemplo, distinguir uma quantidade que a princípio não pode ser determinada de uma quantidade infinita, tal como os infinitos dígitos de certos números.

No que diz respeito à ideia base III, pode-se dizer que os alunos da Educação Básica entrevistados, não a compreendem, pois nenhum desses alunos classificou corretamente os números em racional e irracional. Em relação aos alunos do Ensino Superior, foi possível perceber um avanço em suas respostas, porém, é preciso destacar que até mesmo alguns desses futuros professores de Matemática não conhecem bem as caracterizações de números racionais e irracionais.

Quanto aos resultados desta pesquisa, espera-se que eles contribuam com os professores da Educação Básica e dos Cursos de Matemática, no sentido de reconhecerem alguns dos conhecimentos implícitos, sobretudo os possíveis teoremas em ação falsos que podem ser mobilizados nas respostas dos alunos no decorrer do processo escolar, a perceberem que o conceito de número irracional leva um longo tempo para ser compreendido pelos alunos, e que seria ingênuo presumir que os alunos do 8º ano do Ensino Fundamental compreendam este conceito, assim como sugerem os PCN (BRASIL, 1998). E, sobretudo, que apresentar a definição de números irracionais aos seus alunos não é suficiente para eles compreenderem a natureza destes números, mas que é preciso que eles vivenciem diversas situações, compreendam e relacionem diversos significantes, passem por momentos de desequilíbrios, para que com o passar dos anos escolares, eles possam se apropriar desse conceito.

6. Referências

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Brasília, 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, 1998.

FISCHBEIN, E., JEHIAN, R., COHEN, D. The concept of irrational number in High-School Students and Prospective Teachers. **Educational Studies in Mathematics**. pp. 29 a 44, 1995.

IGLIORI, Sônia Barbosa Camargo; SILVA, Benedito Antônio da. Concepções dos alunos sobre números reais. In: LACHINI, J., LAUDARES, J. B. (Org.). **A prática educativa sob o olhar de professores de cálculo.** Editora FURMAC, Belo Horizonte, 2001.

MELO, Severino Barro de**.** A compreensão do conceito de números irracionais e sua história: um estudo junto a alunos dos cursos de ciências exatas. **Revista Symposium,** Recife, Ano 3, n. 1, p. 27-36, jan./jun. 1999.

ROBINET, Jacqueline. **Les Réels: quel modèles en ont les élèves? Cahier de didactique des mathématiques.** I.R.E.M. Université Paris VII, nº21, 1986.

SOARES, Eliane Faria; FERREIRA, Maria Cristina Costa; MOREIRA, Plínio Cavalcati. Números Reais: Concepções dos Licenciandos e Formação Matemática na Licenciatura. **Revista Zetetikè,** v. 7, n. 12, pp. 95 – 117, 1999.

VERGNAUD, Gérard. La théorie des champs conceptuels. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, Grenoble : La Pensée Sauvage, vol. 10, n. 2.3, pp. 133 a 170, 1990.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender? In. **A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.** Org. BITTAR, Marilena, MUNIZ, Cristiano Alberto. Editora CRV, Curitiba, 2009.