

## UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA DE EXPLORAÇÃO DO PADRÃO FRACTAL TETRA CÍRCULO

Profa. Ms. REJANE WAIANDT SCHUWARTZ FARIA  
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho  
rejanefaria1@hotmail.com

Prof. Dr. MARCUS VINICIUS MALTEMPI  
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho  
maltempi@rc.unesp.br

### Resumo:

Neste trabalho temos por objetivo relatar uma experiência de exploração de Padrões Fractais, realizada por meio do software GeoGebra, por alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Tal experiência didática refere-se a uma das atividades de exploração de Padrões Fractais de uma dissertação de mestrado. A análise desta atividade teve por aporte teórico as fases de investigação de um padrão e foi realizada à luz da metodologia qualitativa de pesquisa. Consideramos que o GeoGebra foi capaz de estimular que conjecturas fossem testadas para que ideias pudessem ser comprovadas ou refutadas. Além disso, a investigação do processo de iteração do Padrão Fractal e de conteúdos matemáticos permite que as conjecturas validadas façam mais sentido aos estudantes, aumentando assim a possibilidade de outros conceitos matemáticos serem produzidos e da generalização dos conteúdos matemáticos ser alcançada.

**Palavras-chave:** GeoGebra; Ensino Médio; Ensino de Matemática; Fases de investigação de um padrão.

### 1. Introdução

Neste trabalho temos por objetivo relatar e analisar uma experiência de exploração de Padrões Fractais realizada por meio do software de Matemática dinâmica GeoGebra<sup>1</sup>, por alunos do primeiro ano do Ensino Médio<sup>2</sup>. Tal experiência integra as atividades que fizeram parte da coleta de dados da dissertação de mestrado intitulada *Padrões Fractais: Contribuições ao processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos* (Faria, 2012).

Para tanto, expomos a análise de parte da atividade *Padrão Fractal Tetra Círculo*. A análise dessa atividade teve por aporte teórico as fases de investigação de um padrão de Herbert e Brown (2000), a saber: Procura do Padrão, Reconhecimento do Padrão e

<sup>1</sup> Disponível em [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

<sup>2</sup> Alunos do Instituto Federal Fluminense (IFF – Campus Campos Centro - Campos dos Goytacazes/RJ).

Generalização<sup>3</sup>. O trabalho de Faria (2012) foi desenvolvido norteado pela metodologia qualitativa de pesquisa, tendo por principais atores os alunos participantes da coleta de dados e a professora-pesquisadora.

Cabe esclarecer que o termo Padrão Fractal foi proposto por Faria (2012) ao entender que estes padrões estão relacionados ao modelo pelo qual os fractais estão condicionados numérica, algébrica e geometricamente. Neste modelo é repetido periodicamente uma determinada estrutura invariante, para a feitura dos próximos níveis em uma ou mais direções. Entendemos que “ao conceito de padrão estão associados termos tais como: regularidade(s), sequência, motivo, regra e ordem” (VALE *et al.*, 2005, p.3). Desse modo, quando reconhecemos um padrão em um fractal podemos prever o que ocorrerá ao longo das iterações. O sentido de iterar um padrão está relacionado à repetição que pode ocorrer indefinidamente. Assim, a cada iteração o padrão chega a um nível sucessor que será a base para a iteração seguinte.

Buscando relatar a experiência didática já citada, passamos a apresentar, nas próximas seções, as fases de investigação de um padrão de Herbert e Brown (2000) e o relato e análise da experiência didática com a atividade Padrão Fractal Tetra Círculo. Finalizando, tecemos considerações sobre a atividade realizada.

## **2. Procura do Padrão, Reconhecimento do Padrão e Generalização**

Segundo Herbert e Brown (2000), a investigação de padrões passa pelas fases: Procura do Padrão, Reconhecimento do Padrão e Generalização. Com base em experiências realizadas com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, as autoras enumeraram essas três fases como suficientes para classificar o desenvolvimento dos alunos durante a investigação de padrões. Nas experiências, o empenho dos alunos passou por três etapas. Primeiramente os alunos buscaram o padrão na situação dada, que em Herbert e Brown (2000), a fase de Procura do Padrão. No caso das atividades com Padrões Fractais, esta fase consistiu na etapa em que os alunos se dedicaram à compreensão do padrão que faz com que o fractal repita sua estrutura inicial.

Na segunda fase de Herbert e Brown (2000), os alunos reconheceram o padrão por meio de diferentes representações matemáticas que identificaram durante a compreensão da situação dada. Já nas atividades de exploração de Padrões Fractais, os alunos passaram

---

<sup>3</sup> Pattern seeking, pattern recognition and generalization.

por essa fase ao reconhecerem o padrão para um nível específico e descreverem os demais níveis usando tabelas e outras formas de representações matemáticas, como frações e potências. Além disso, escreveram fórmulas expressando um conteúdo matemático para um nível qualquer.

Por fim, os alunos do experimento de Herbert e Brown (2000) atingiram a terceira fase, a de Generalização, quando generalizaram o padrão e relataram isso retomando a situação inicial. Nas atividades com Padrões Fractais, essa fase foi atingida quando os alunos conseguiram escrever para “um nível posterior a um nível qualquer” (nível  $n+1$ ), uma fórmula geral expressando o conteúdo matemático explorado naquela situação.

### 3. Relato e análise da experiência didática com a atividade Padrão Fractal Tetra Círculo

Nesta seção é apresentada parte da análise dos procedimentos para a investigação do Padrão Fractal Tetra Círculo realizados pelas alunas Maísa e Viviane<sup>4</sup>. Relatamos, simultaneamente, os registros escritos nas folhas da atividade, os diálogos entre a dupla e alguns momentos em que as observações sobre a atividade foi compartilhada com os demais participantes da pesquisa. As transcrições apresentadas nesta seção são trechos da discussão da dupla, acompanhadas de comentários nossos, entre parênteses, visando trazer informações complementares, necessárias ao entendimento da transcrição.

Diante do computador, com a construção do Padrão Fractal Tetra Círculo aberta no GeoGebra, as alunas Maísa e Viviane iniciaram a atividade com a leitura da primeira questão, que afirmava que cada cor representava um nível do Padrão Fractal (Figura 1).

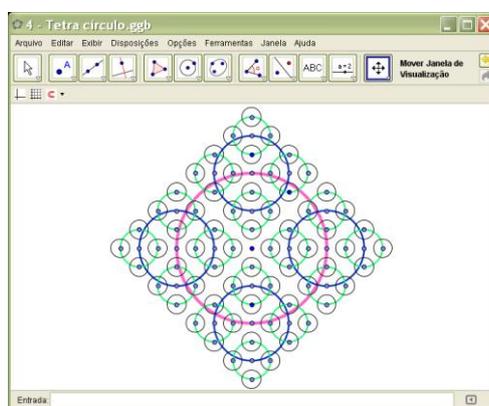


Figura 1: Padrão Fractal Tetra-Círculo no GeoGebra

---

<sup>4</sup> Nomes fictícios.

Fonte: Faria (2012)

Na segunda questão, analisaram por meio da ferramenta protocolo de construção os níveis do Padrão Fractal e registraram suas observações (Figura 2).

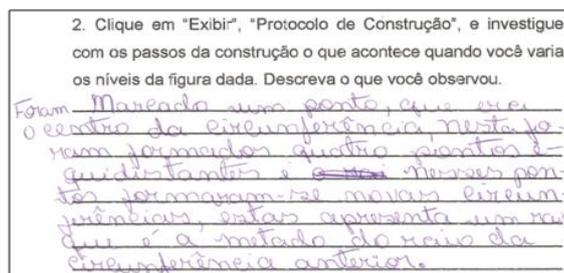


Figura 2: Observações realizadas pelas alunas na questão 2

Fonte: Faria (2012)

Após manipularem este Padrão Fractal no software GeoGebra e investigarem os passos, Maísa compartilhou com todo o grupo que os pontos marcados não eram quaisquer, eram pontos equidistantes e que o raio das circunferências seguintes mediam a metade do raio da circunferência gerada no nível anterior. Sua parceira, Viviane, registrou que não havia percebido esta característica sobre o centro das circunferências (Figura 3).

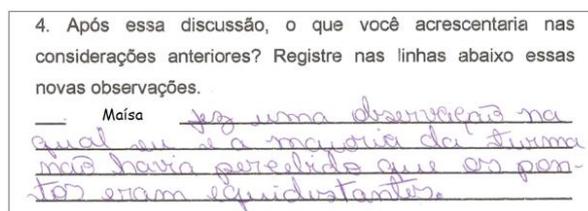


Figura 3: Comentários registrados pelas alunas na questão 4

Fonte: Faria (2012)

Durante uma conversa com os alunos referente à questão quatro, foi destacado que o processo de construção dos níveis do fractal era infinito, pois embora apenas quatro níveis estivessem representados, neste quarto nível, em cada circunferência gerada, quatro novas circunferências poderiam ser formadas e este mesmo processo poderia ser realizado indefinidamente. Nesse sentido, foi esclarecida a limitação deste processo para uma representação no papel, pois como as circunferências possuem raios que vão sendo reduzidos à metade, em um nível bem próximo já não seria possível fazer a representação dessas circunferências, devido ao pequeno tamanho que teriam. Então, foi destacado a possibilidade que o GeoGebra traz, por meio da ferramenta *zoom*, pois poderíamos ampliar uma pequena circunferência, e nela construir quatro novas, seguindo o processo de construção do Padrão Fractal.

Enquanto era falado sobre a ferramenta *zoom*, a dupla foi aproximando a tela nas circunferências menores, fazendo o teste das propriedades apresentadas. Tal exploração do Padrão Fractal pela dupla evidenciou o quanto os recursos do GeoGebra podem facilitar a manipulação e visualização de peculiaridades nas construções. Nesse caso especificamente, foram utilizadas as ferramentas *ampliar* e *reduzir*, que permitem que as figuras sejam analisadas em diferentes tamanhos.

Na quinta questão, foi proposto que os alunos construíssem o Tetra Círculo, melhorassem a visualização editando as cores e salvassem suas construções no software, seguindo um roteiro (Quadro 1). As alunas seguiram o roteiro e a Figura 4 mostra a construção realizada pela dupla.

Quadro 1: Questão 5  
Fonte: Faria (2012)

5. Agora vamos construir esse fractal. Para isso:
- Abra um arquivo novo no GeoGebra.
  - Crie um círculo de raio 4 com a ferramenta *círculo dados centro e raio*.
  - Faça o próximo nível desse fractal, para isso marque 4 círculos cujos raios sejam a metade do raio do nível anterior de modo que o centro desses círculos sejam equidistantes.
  - Repetindo o mesmo procedimento, represente mais 3 níveis desse fractal.
  - Para melhorar a visualização dos níveis, represente cada nível com uma cor diferente, para isso, vá em *editar*, depois em *propriedades*. Com a janela *propriedades* aberta, selecione o círculo que você quer mudar a cor e em seguida clique na cor escolhida. Quando colorir cada círculo, feche a janela *propriedades*.
  - Agora salve a construção. Para isso vá em *arquivo*, *gravar como*, e salve o arquivo com o nome de tetra círculo + maq XX, onde XX é o número da sua máquina.

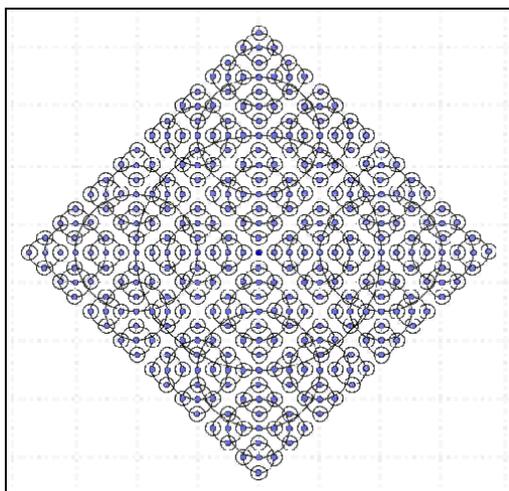


Figura 4: Padrão Fractal Tetra Círculo construído pela dupla

Fonte: Faria (2012)

Segundo as Fases da Investigação de um Padrão de Herbert e Brown (2000), as alunas durante estas questões (da primeira à quinta) estavam na fase de Procura do Padrão na situação dada, pois buscavam extrair a informação do caso específico. Primeiramente a

dupla buscou o padrão do fractal, pois reviram por vezes o processo de construção do Tetra Círculo, observando o que acontecia quando os níveis eram variados, por meio do recurso protocolo de construção do GeoGebra. As alunas compartilharam suas observações com os demais colegas, e registraram outras que ainda não haviam observado. Entendo que este momento de compartilhamento foi necessário para que o maior número possível de informações fosse extraída. Ademais, as alunas construíram o Tetra Círculo no GeoGebra, repetindo então o padrão daquele fractal específico.

Ao se dedicarem à compreensão do Padrão Fractal Tetra Círculo, a visualização ganhou destaque, pois as propriedades geométricas de autossimilaridade e complexidade infinita foram observadas ainda que não formalizadas.

Prosseguindo, foi solicitado que os alunos realizassem a questão 6 (Figura 5). As alunas lêem o enunciado e iniciam um diálogo:

*Viviane: Comprimento do raio... (apontando para o nível zero).*

*Maísa: Quatro!*

*Maísa: Quatro, dois, um e zero vírgula cinco (Maísa dita as respostas para que Viviane anote na tabela os valores referentes ao comprimento do raio das circunferências).*

Após completarem a primeira parte da tabela, Viviane lê o que é pedido na outra coluna e elas continuam o diálogo.

*Viviane: Comprimento do raio expresso por uma fração de numerador quatro e denominador em potência de base dois.*

*Maísa: Numerador quatro e denominador dois. Ah, tá... Dois elevado a dois.*

Viviane interrompe Maísa e pergunta:

*Viviane: Professora, esse comprimento do raio, o que você quer?*

*Rejane: Olha só, o que é que a gente está buscando? O padrão, não é? É poder dizer quando eu chegar em um “nível n” como que vai ser isso...ok? Olhem só, o comprimento do raio, em u. c., expresso por uma fração de numerador quatro, ou seja, em todas elas o numerador vai ser quatro, e o denominador em potência de base dois. Então é quatro sobre dois, elevado a algum número. Quatro dividido por que número dá quatro?*

*Maísa e Viviane: um.*

*Rejane: E como eu escrevo um em potência de base dois?*

*Maísa: Zero? Dois elevado a zero!*

Após essa explicação, a dupla completa a coluna do comprimento do raio expresso por uma fração (Figura 5).

6. Como você mesmo construiu, a medida do raio do maior círculo é 4 u.c. Agora preencha a tabela abaixo com as medidas dos raios dos demais círculos do fractal Tetra Círculo.

Círculo	Comprimento do raio em u.c.	Comprimento do raio em u.c. expresso por uma fração de numerador 4 e denominador em potência de base 2
Nível 0	4	$\frac{4}{2^0}$
Nível 1	2	$\frac{4}{2^1}$
Nível 2	1	$\frac{4}{2^2}$
Nível 3	0,5	$\frac{4}{2^3}$

Figura 5: Questão 6 realizada pela dupla Maísa e Viviane na atividade 4

Fonte: Faria (2012)

Em seguida, Viviane registra suas observações na questão 7 sobre a sequência de números obtida na tabela da questão 6 (Figura 6).

7. O que você pode afirmar sobre essa sequência de números?

O expoente da base 2 é o mesmo número referente a cada nível.  
O raio vai reduzindo sempre a metade do raio do nível anterior.

Figura 6: Questão 7 realizada pela dupla

Fonte: Faria (2012)

Na questão 8, houve um momento para que os alunos compartilhassem as observações com os outros grupos. Nesse momento, Viviane leu para a turma as observações que havia registrado na questão 7.

Após os alunos exporem suas observações, foi destacado o fato de que esta sequência era uma progressão geométrica. Os alunos ainda não haviam estudado as progressões, por isso, foi explicado que quando em uma sequência o termo seguinte é obtido por meio de uma multiplicação por um número que é sempre o mesmo, dizemos que esta é uma progressão geométrica, e este valor que é multiplicado é chamado de razão. Por esse motivo, Viviane e Maísa registraram que a sequência de números obtida é uma progressão geométrica. Após essa discussão, Viviane e Maísa passaram a fazer a questão 9, e logo registraram que o comprimento do raio das circunferências geradas no nível 4, se o processo de iteração prosseguisse, seria  $\frac{4}{2^4}$ , como mostra a (Figura 7).

9. Se o processo de construção do fractal prosseguisse, qual seria o comprimento do raio (em u.c.) no nível 4?

Seria 0,25 em que  $\frac{4}{2^4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25$

Figura 7: Questão 9 realizada pela dupla

Fonte: Faria (2012)

Em seguida, registraram que o comprimento do raio das circunferências para um nível qualquer, o nível  $n$ , seria  $\frac{4}{2^n}$ .

Durante as questões seis a dez, os alunos passaram pela fase de Reconhecimento do Padrão, pois reconheceram o padrão para aquele caso específico e o descreveram usando tabelas e representando os valores encontrados por meio de frações e potências. De acordo com Herbert e Brown (2000), é nessa fase que os alunos buscam representações matemáticas que expressem as observações realizadas com a exploração do padrão.

O próximo passo foi realizar as questões 11 e 12, nas quais os alunos pensaram na variação de outros níveis do padrão. Especificamente na questão 11, os alunos escreveram como pode ser encontrado o número de circunferências no caso de um nível posterior ao  $n$ , o nível  $n+1$ . A dupla registrou que teriam  $\frac{4}{2^{n+1}}$  circunferências no nível  $n+1$ .

Na questão 12, os alunos ainda foram questionados sobre o comprimento do raio das circunferências geradas em um nível, que poderia existir, anterior ao nível zero. A dupla registrou que a circunferência teria raio igual a oito.

Assim, as questões 11 e 12 se enquadram na terceira fase destacada por Herbert e Brown (2000), a da Generalização. Afirmamos isso com base na fórmula geral que os alunos escreveram para um nível posterior a um nível qualquer (nível  $n+1$ ) e nas afirmações que os alunos foram capazes de realizar na questão 12, pois o fato de terem registrado que a circunferência teria um raio de oito centímetros indica que entenderam que, como o raio de cada circunferência gerada era metade do raio da circunferência do nível anterior, o raio da circunferência anterior ao nível zero teria o dobro da medida do raio do nível zero.

Durante a realização da atividade, as alunas utilizaram ferramentas que permitiram uma investigação dinâmica, e uma interação com os objetos construídos. *Mover e deslocar eixos* são exemplos de ferramentas que permitiram que as construções fossem movidas a partir de pontos específicos e que os eixos fossem deslocados para que propriedades particulares fossem focadas e melhor observadas. Além disso utilizaram as ferramentas *apagar objetos*, que exclui construções indesejadas, e as opções de *exibir/esconder* tanto os objetos quanto os rótulos, que possibilitam que construções auxiliares e os nomes das construções sejam mostrados ou ocultados. Assim, pode-se apresentar somente o que é necessário, dando à construção um aspecto visual de maior clareza.

#### 4. Considerações Finais

As alunas que participaram desta atividade se dedicaram na realização das questões propostas e, ao longo dos encontros, se mostraram interessadas em não somente manipular e analisar os Padrões Fractais, mas também em aprender a construí-los no GeoGebra. Por meio da experimentação, simulações e testes, numa ação sobre os Padrões Fractais e dos processos de construção dos níveis destes, a generalização de conteúdos matemáticos como potências, uso de tabelas, frações, comparação de raios de circunferências e progressões geométricas foi explorada pelos alunos, conduzindo-os a pensar em níveis posteriores.

Em particular, o GeoGebra atuou no processo iterativo de construção, manipulação e análise de Padrões Fractais para a compreensão de conteúdos matemáticos numa perspectiva mais geral, que buscou alcançar o nível  $n$ . Ao concluir a atividade, a dupla registrou que gostou muito de ter realizado uma construção de um fractal (Figura 8).

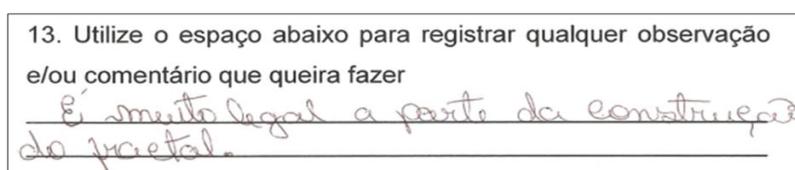


Figura 8: Comentário final sobre a atividade 4 registrado pela dupla

Fonte: Faria (2012)

Esse comentário indica o interesse das alunas em realizar construções dos Padrões Fractais no software GeoGebra. Além desse comentário, Viviane expôs em uma entrevista realizada com no final da coleta de dados que todas as atividades deveriam ter a parte de construção do Padrão Fractal, como podemos observar no diálogo abaixo:

*Viviane: Quando se vai trabalhar com adolescentes eu acho que é bem complicado ficar só na parte de analisar.*

*Rejane: Então você achou importante a gente fazer construções?*

*Viviane: Sim. Com certeza.*

*Rejane: Por quê? Chama mais atenção?*

*Viviane: É. Se torna mais interessante.*

Com base nas vivências ao longo de toda a coleta de dados, consideramos que o GeoGebra foi capaz de estimular que conjecturas fossem testadas para que ideias pudessem ser comprovadas ou refutadas. Percebemos que neste software, a investigação do processo

de iteração de um Padrão Fractal, bem como de conteúdos específicos que podem ser explorados por meio da manipulação e análise desses padrões, fazem com que as conjecturas validadas passem a fazer mais sentido aos estudantes, aumentando assim a possibilidade de outros conceitos matemáticos serem produzidos e da generalização dos conteúdos matemáticos em questão ser alcançada.

## 5. Referências

FARIA, R. W. S. *Padrões Fractais: Contribuições ao processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

HERBERT, K. E BROWN, R. Patterns as tools for algebraic reasoning. Reimpresso por Barbara Moses, ed., Algebraic Thinking, Grades K-12: Readings from NCTM's School – Based Journals and Other Publications. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

VALE, I.; PALHARES, P.; CABRITA, I.; BORRALHO, A. Os Padrões no ensino e aprendizagem de Álgebra. Actas do XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE, 2005.