O PAPEL DOS CURSOS ANÁLISE REAL NAS LICENCIATURAS: A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO SOBRE CONJUNTOS NUMÉRICOS

Renata Arruda Barros
Instituto Federal do Rio de Janeiro – Campus Volta Redonda
renata.barros@ifrj.edu.br

Magno Luiz Ferreira 1
Instituto Federal do Rio de Janeiro – Campus Volta Redonda
magno.ferreira@ifrj.edu.br

Resumo:
Este trabalho visa discutir a abordagem do professor de análise real nos cursos de licenciatura em matemática em relação a formação do conceito de número irracional. Acreditamos que um enfoque mais voltado para os significados subjacentes às demonstrações pode ajudar os licenciandos, futuros professores, na compreensão estrutural do conjunto em questão. Sendo assim, apresentamos reflexões sobre o conjunto dos números irracionais e sua relação com a noção de obstáculo epistemológico. Além disso, discutiremos o modo como as aulas de matemática destes futuros professores devem abordar o assunto, evitando concepções equivocadas que foram observadas nas respostas dadas ao questionário.

Palavras-chave: números irracionais; análise; formação de professores.

1. Introdução

Definições, teoremas, lemas, corolários, demonstrações. Estas palavras ditam o ritmo das aulas nas disciplinas de análise matemática nos cursos de graduação em Matemática, tanto nos bacharelados quanto nas licenciaturas. No entanto, palavras como: significado, sentido, representação e interpretação têm aparições pouco freqüentes durante as atividades de aula.

De acordo com Machado (2006), as questões semânticas devem receber a mesma atenção que as questões sintáticas[1] recebem no processo de ensino-aprendizagem de

[1] As palavras sintáticas e semânticas significam, respectivamente, função e sentido. Ou seja, espera-se que as proposições sejam permeadas pelos motivos e significados subjacentes a suas demonstrações (parte sintática).

matemática. Em outras palavras, é importante que os professores dêem tanta ênfase ao sentido e significado das expressões matemáticas quanto dão às estruturas das mesmas.

Este trabalho relata a primeira de uma série de ações que visam discutir um novo enfoque, que julgamos necessário, para as aulas de análise nos curso de Licenciatura em Matemática. É importante destacar que estamos defendendo a ideia de um curso de análise mais provido de entendimento semântico, onde a preocupação com as demonstrações seja tão intensa quanto a preocupação com os significados que as mesmas trazem nas entrelinhas. Neste trabalho, defendemos a importância desse tipo de enfoque no que diz respeito a conceitos de finitude, infinitude, enumerabilidade e completude, importantes para a compreensão dos conjuntos numéricos, especialmente os conjuntos dos números reais e o conjunto dos números irracionais.

De acordo com Souto (2010), muitos alunos chegam ao final do Ensino Fundamental e Médio com um conhecimento insuficiente sobre números irracionais / reais. Além disso, estamos de acordo com o autor quando este afirma que um dos motivos para esta má formação de conhecimento está relacionado com a formação matemática dos professores.

No entanto, acreditamos que as discussões e reflexões durante os cursos de licenciatura devam ser norteadas pela busca de compreensão mais profunda sobre as particularidades dos objetos matemáticos. No que diz respeito aos números irracionais as ideias sobre densidade, cardinalidade e completude são pontos chave na formação deste conceito por parte dos professores (SOUTO, 2010). Além disso, é fato que as discussões sobre estas propriedades do conjunto numérico em questão se fazem presentes nos cursos de análise matemática. Desta forma, é possível perceber que esta disciplina pode trazer uma contribuição valiosa para o melhor entendimento dos futuros professores sobre o assunto.

Segundo Costa (2009), os problemas na construção do conhecimento sobre números irracionais podem ser interpretados através da noção de obstáculo epistemológico introduzida, em níveis gerais, por Gastón Bachelard. O primeiro a relacionar essa ideia com as dificuldades de aprendizagem em matemática foi o didata francês Guy Brousseau, no XXVIII CIAEM (Congresso Interamericano de Educação Matemática). Desta forma, é possível atuar sobre o ensino de números irracionais à luz da noção de obstáculo epistemológico.

"O obstáculo epistemológico é aquele do qual não se pode nem se deve escapar pelo fato de seu papel constitutivo do conhecimento visado" (BROUSSEAU, 1998, p. 125 apud

CELESTINO, 2008). Sendo assim, podemos afirmar que o caminho para a compreensão de um objeto matemático passa por discussões e reflexões a respeito dos obstáculos presentes em sua evolução. De acordo com Igliori (2010), caso o professor não tenha a oportunidade para essas reflexões, os obstáculos epistemológicos podem se tornar uma barreira para aprendizagem.

Visando evitar o possível surgimento deste tipo de barreira, analisamos alguns erros comuns a respeito da conceituação de conjuntos numéricos, mais especificamente sobre o conjunto dos números irracionais, identificados na resposta a um questionário aplicado a alunos ingressantes do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ) – Campus Volta Redonda. Essa análise foi feita relacionando tais erros com os obstáculos presentes no processo evolutivo deste conceito e apresentando propostas para a reconstrução dessas ideias equivocadas, através de uma nova abordagem das discussões sobre o tema, feita nos cursos de análise matemática.

2. Pressupostos Teóricos.

Historicamente, os novos conjuntos numéricos sempre se apresentaram de forma controversa. No caso dos números irracionais, a descoberta dos incomensuráveis foi sem dúvida um grande colapso para os pitagóricos (DEWDNEY, 2000). De acordo com Neri (2006):

> Segundo outra doutrina pitagórica “tudo é número”, ou seja, tudo podia ser explicado através de número (inteiros) e suas razões (números racionais). Acreditava-se também que dados dois segmentos quaisquer eles eram sempre comensuráveis, isto é, que existia sempre um terceiro segmento, menor que os dois primeiros, tal que cada um deles era múltiplo inteiro do menor. (NERI, 2006, p. 29)

A citação acima nos apresenta a ideia de que os números irracionais têm sua origem na descoberta dos segmentos incomensuráveis. Com isso, podemos afirmar que as dificuldades com este conjunto numérico têm forte relação com os problemas inerentes à formação do conceito. Desta forma, é necessário que o professor, ou futuro professor, tenha consciência da existência de discussões muito mais profundas sobre as características desses números. Nesse ponto, o curso de análise pode ajudar de forma decisiva. A seguir, apresentamos duas situações que podem ilustrar melhor a necessidade descrita acima:

Em Lima (2004), o início do capítulo sobre números reais apresenta demonstrações que garantem que $\Re$ é um corpo ordenado. É fato que em alguns momentos o autor apresenta teoremas e propriedades que auxiliarão o entendimento em outras partes do texto. No entanto, é possível perceber outras preocupações, como no trecho abaixo.

> Nada do que foi dito até agora permite distinguir os reais dos racionais, pois estes constituem um corpo ordenado. Acabaremos agora nossa caracterização dos reais, descrevendo-o como um corpo ordenado completo, propriedade que os racionais não têm. (LIMA, 2004, p. 15)

Nesta citação, podemos notar a preocupação do autor em deixar claras as propriedades do novo conjunto numérico que se apresenta. Desta forma, podemos identificar a herança problemática do surgimento, ou descoberta, dos irracionais. A completude deste conjunto representa uma característica ligada ao conceito de incomensurável. A não compreensão deste fato pode impedir reflexões a respeito da natureza dos números irracionais. Em outras palavras, a ausência dessa reflexão pode limitar o licenciando à memorização ou à aceitação de propriedades, algumas das quais podem ser interpretadas de forma equivocada e/ou desprovida de significado. Sendo assim, é muito importante que, além da demonstração de teoremas, as aulas apresentem discussões sobre o significado matemático da palavra "completo".

Ainda nesta linha, identificamos nas respostas do questionário concepções equivocadas relacionadas à cardinalidade dos conjuntos dos números irracionais e reais. Em Neri (2006) encontramos a afirmação de que o conjunto dos números reais é não enumerável e, portanto, sua cardinalidade é maior que a dos racionais. A demonstração desta proposição levanta a ideia da existência de "infinitos de diferentes tamanhos" e essa noção, de certa forma, remonta aos problemas discutidos por Cantor, que durante muito tempo não foram plenamente compreendidos (ACZEL, 2003). É preciso discutir o significado de ser enumerável sob a luz da formação e das motivações por trás do conceito de infinito e dos seus desdobramentos ao longo da história da matemática.

Sendo assim, acreditamos que os obstáculos gerados pelos processos históricos de construção dos conceitos de números reais e irracionais podem ser compreendidos sob a ótica de uma abordagem que leve em consideração o significado por trás das demonstrações feitas nos cursos de análise matemática.

3. Metodologia

O questionário em anexo foi aplicado a 31 alunos do primeiro e do quinto período do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ) - Campus Volta Redonda. É importante destacar que nenhum destes alunos havia cursado a disciplina de análise real até responder este questionário e que puderam responder livremente e não se identificaram. O objetivo deste questionário foi analisar como estes alunos compreendiam o assunto, de modo que fosse possível pensar, futuramente, em ações para reparar os equívocos de compreensão do conceito.

4. Análise de dados

A seguir alguns enganos apresentados por esses alunos.

a) Enganos quanto à caracterização - Fizemos perguntas do tipo: O que é um número irracional? e dê exemplos de números irracionais. A seguir podemos observar algumas respostas e comentários sobre as mesmas.

Dentre os alunos do primeiro período, aproximadamente 15% não souberam responder e 53% apresentaram respostas erradas, muitas recorrentes. Nesse sentido, acreditamos que as demonstrações dos teoremas e propriedades sobre números reais merecem, além de sua abordagem estrutural, uma abordagem voltada para o significado subjacente às passagens entre os argumentos, levando em conta a idéia da valorização dos significados ligados aos obstáculos históricos a respeito desses conceitos.

Dentre os alunos do quinto período, todos responderam que os números irracionais são aqueles que não podem ser escritos em forma de fração. Apesar disso, nenhum dos alunos explicou claramente que o numerador e o denominador dessa fração teriam que ser números inteiros. Vendo isso, podemos identificar a necessidade de maiores reflexões sobre as discussões envolvendo a completude da reta, questão principal que justifica a diferenciação entre o conjunto dos números reais e dos racionais, justificando a existência de números reais não racionais. Tais questões envolvem diretamente as noções de incomensurabilidade e enumerabilidade.

Cerca de 40% desses estudantes deram a definição: "O conjunto dos números irracionais é o conjunto de todos os números reais que não podem ser escritos da forma $\frac{p}{q}$, sendo p e q números inteiros". É fato que esta caracterização não está errada. No entanto, esses alunos complementaram a descrição com a frase "..., ou seja, possuem infinitas casas decimais." (sic), não observando o fato de que as duas definições não são equivalentes já que as dízimas periódicas são números racionais e possuem infinitas casas decimais. Sobre este engano, acreditamos que está também relacionado a ausência de discussões sobre conjuntos enumeráveis e não enumeráveis ligadas a formação das concepções sobre números irracionais.

Dentre as respostas corretas dos alunos do primeiro período, aparece que os números irracionais são os que possuem infinitas casas decimais e não são dízimas periódicas. Uma resposta que, mesmo não estando errada, pode levar esse aluno a ensinar esse tema de forma superficial pois ao apresentar os números irracionais com esta ideia, correrá o risco de não explicitar para os seus alunos as diferenças estruturais entre números racionais e irracionais e a falta de uma definição precisa e de reflexões a respeito dela, que despertem a noção do surgimento de um novo conjunto completamente diferente e do contexto histórico envolvido no mesmo, pode levar a uma confusão que aparece de forma recorrente nas respostas erradas: dizer que os números irracionais são aqueles que possuem infinitas casas decimais. Como foi dito anteriormente, entender os números irracionais dessa forma faz com que os alunos acreditem que as dízimas periódicas são números irracionais e as citem como exemplos.

Para ilustrar melhor nossas preocupações com essas variações na descrição de número irracional, podemos apresentar a resposta de um dos alunos a respeito do conjunto dos números irracionais: "é o conjunto das dízimas periódicas" (sic). Isso nos leva a crer que associar os números irracionais às infinitas casas decimais pode não ser a melhor abordagem para esse assunto e que os futuros professores, mesmo sabendo que as dízimas periódicas são números racionais, precisam se preocupar em transmitir isso de forma clara a seus alunos.

Muitos alunos também dizem que números irracionais são aqueles que não possuem raiz quadrada exata. Esse aluno está, provavelmente, construindo uma definição a partir de exemplos decorados. Esse aluno aprendeu que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são irracionais e, a partir disso, construiu essa definição. Aliás, $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ foi citado como exemplo de número irracional por todos os alunos do quinto período e, aproximadamente, 54% dos alunos do primeiro período. Mesmo alunos que disseram não saber a definição de número irracional, souberam dar exemplos corretos e muitos alunos que deram exemplos de números irracionais não souberam responder quando foram questionados sobre o porquê daqueles números serem irracionais. Isso chama a atenção para o cuidado que temos que ter para formar professores que não reproduzam discursos do tipo: "nem todos os números são racionais, por exemplo, $\sqrt{2}$ não é racional". Esse tipo de discurso faz o aluno decorar que $\sqrt{2}$ é irracional sem nunca saber o que isso significa.

b) Enganos quanto à cardinalidade – os futuros professores também responderam sobre a quantidade de elementos dos conjuntos de números racionais e irracionais. Nesta parte, fizemos perguntas do tipo: Quantos números irracionais existem? e qual dos conjuntos é maior em quantidade de elementos, os racionais ou os irracionais? Abaixo podemos observar algumas respostas.

Entre as várias respostas, um erro que aparece de forma recorrente é a resposta baseada na ideia de que o conjunto dos números irracionais é o conjunto de todos os números. Ao perguntarmos se o conjunto dos números irracionais é maior ou menor que o conjunto dos números racionais obtemos como resposta que o conjunto dos números irracionais é maior por conter o conjunto dos números racionais. Provavelmente, o próprio processo de construção dos números e a forma com que esse assunto é abordado nos livros didáticos têm forte influência sobre o desenvolvimento desta concepção. O aluno aprende sobre o conjunto dos números naturais, depois aprende sobre o conjunto dos números inteiros e entende que todos os números naturais são também números inteiros, ou seja, $N \subset Z$. Então, surgem as frações. E, novamente, ele entende que todos os números naturais e inteiros são também números racionais ($N \subset Z \subset Q$). Nesse momento, o professor lhe apresenta os números irracionais e parece natural que o aluno conclua então que todos os outros conjuntos numéricos que ele aprendeu estejam contidos no conjunto dos números irracionais. Isso se dá por uma inversão na ordem de apresentação dos conceitos, ou seja, apresenta-se os números reais como conseqüência da existência dos irracionais quando deveria ser o contrário. A partir do momento que o futuro professor compreender que a existência do conjunto dos números irracionais surge da demonstração da completude do conjunto dos números reais, ele passará a apresentar os números reais antes dos números irracionais desfazendo tal confusão de forma relativamente simples.

Quando questionados a respeito da cardinalidade dos conjuntos dos números racionais e irracionais, além dos 33% de alunos que responderam que o conjunto dos números irracionais possui mais elementos por conter o conjunto dos números racionais, tivemos 23% de alunos que disseram, acertadamente, que o conjunto dos números irracionais é maior, porém nenhum deles soube explicar a razão. Um aluno até justificou sua resposta dizendo que seu professor disse a ele que haviam mais irracionais do que racionais, mas que ele não conseguia entender o motivo. Isso nos leva novamente a necessidade de refletir sobre as questões conceituais ligadas ao estudo das características estruturais de completude e não enumerabilidade do conjunto dos números reais.

Aproximadamente 14% dos alunos disseram que o conjunto dos números racionais tem cardinalidade maior, justificando apenas que existem mais números racionais que irracionais. Esse fato não surpreende se pensarmos que estes alunos não apresentam um conhecimento sólido sobre as características dos dois conjuntos. Além disso, é possível que esta resposta esteja baseada, apenas, em alguns exemplos vistos na Educação Básica.

Quando o conhecimento a respeito de tais conjuntos se baseia apenas em exemplos de números que não podem ser escritos em forma de fração, o aluno pode entender que aqueles exemplos são a totalidade do conjunto. Um dos alunos disse que o conjunto dos números racionais é maior, pois contém os naturais e os inteiros e citou como exemplos de irracionais $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, isso nos leva a pensar no tipo de associação feita por esse aluno: os racionais são maiores que os naturais, os irracionais são raízes quadradas de naturais, logo temos menos irracionais do que racionais. Esse é um raciocínio natural que está baseado numa série de concepções erradas que acreditamos que poderiam não ter sido transmitidas se o seu professor estivesse munido de um conhecimento bem embasado sobre o conceito analítico de finitude, infinitude e enumerabilidade.

Outro equivoco que surgiu foi a resposta de 26% dos estudantes de que os conjuntos são do mesmo tamanho. Dentre esses alunos, mais ou menos metade justificou a afirmação dizendo que ambos os conjuntos são infinitos logo são do mesmo tamanho, o que nos leva novamente a questão do entendimento do conceito de infinitude e enumerabilidade.

Outra justificativa interessante, dada pela outra metade dos alunos, foi que para cada racional existe um irracional. Certamente, esse estudante aprendeu que entre dois racionais sempre existe um irracional e concluiu, erroneamente, que essa correspondência é um a um. O erro citado nos leva a refletir sobre o perigo de simplesmente repetir esse resultado sem mais explicações em sala de aula, o que nos leva novamente a necessidade de um estudo profundo da análise por parte do futuro professor. Não basta que ele decore o teorema que diz: *"Todo intervalo não degenerado contém números racionais e irracionais."* Demonstrações como a da existência de números racionais e irracionais em intervalos não degenerados (LIMA, 2004), se tratadas apenas do ponto de vista sintático, podem limitar a visão do estudante com relação aos próprios intervalos. È importante que se entenda verdadeiramente o porquê desse fato e todos os conceitos que estão envolvidos nessa demonstração.

5. Considerações Finais

Por fim, é necessário esclarecer que não pretendemos abolir, nem mesmo reduzir, o ensino de análise nos cursos de licenciatura em matemática. A ideia também não é ampliar. Nosso objetivo é apontar para a necessidade de um enfoque diferente no ensino dessa disciplina. Ou seja, acreditamos que as aulas de análise matemática, nos cursos de licenciatura em matemática, não devem ser compostas apenas de demonstrações de teoremas e propriedades.

Acreditamos que equívocos como definições incompletas ou incompatíveis com a verdadeira natureza dos números irracionais e interpretações errôneas a respeito de cardinalidades de conjuntos numéricos estão diretamente ligados aos conceitos de incomensurabilidade e infinitude. Além disso, acreditamos que os cursos de análise matemática sejam o momento adequado para discussões permeadas por significados de natureza epistemológica, tanto quanto são permeadas por conhecimento técnico.

Como já foi dito, o trabalho com os conjuntos numéricos representa a primeira de uma série de ações que têm com objetivo desenvolver uma nova abordagem para as aulas de análise real nos cursos de licenciatura em matemática. Apresentamos uma discussão sobre os problemas de compreensão dos licenciandos do IFRJ sobre o conceito de número irracional. Vimos que as dificuldades mais comuns sobre esse conceito são referentes à caracterização e a cardinalidade do conjunto em questão. Sendo assim, é importantíssimo que noções como incomensurabilidade e enumerabilidade sejam apresentadas com preocupações tanto sintáticas quanto semânticas, de maneira que os equívocos presentes na seção 4 possam ser minimizados.

Com isso, acreditamos que a análise das possíveis causas dos erros citados na seção 4 pode contribuir para uma discussão mais ampla sobre o enfoque dado aos assuntos abordados no curso de análise matemática, podendo proporcionar aos futuros professores maior entendimento, não somente sobre as definições, teoremas e demonstrações, mas sobre assuntos que serão expostos por eles na Educação Básica. Por fim, esperamos continuar contribuindo para um ensino de matemática cada vez mais qualificado, em todos os níveis.

6. Referências

ACZEL, A. D. **O mistério do alef**: a matemática, a cabala e a procura do infinito. Tradução de Ricardo Gouveia. São Paulo: Globo, 2003. 218p.

CELESTINO, M. R. **Concepções sobre limites**: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do Ensino Superior. 2008. 208f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

COSTA, L. V. O. **Números reais no Ensino Fundamental:** alguns obstáculos epistemológicos. 2009. 377f. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo.

DEWDNEY, A. K. **20000 léguas matemáticas**: um passeio pelo misterioso mundo dos números. Tradução de Vera Ribeiro; Revisão de Vitor Tinoco. Rio de Janeiro, RJ: Jorge Zahar, 2000. 235p.

IGLIORI, S. B. C. A noção de "obstáculo epistemológico" e a Educação Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2010, p. 113-142.

LIMA, E. L. **Análise real**. v. 1. Rio de Janeiro, RJ: IMPA (coleção matemática universitária), 2004. 200p.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna**: análise de uma impregnação mútua. 6ª ed. São Paulo, SP: Cortez, 2010. 204p.

NERI, C. **Curso de análise real I**. Rio de Janeiro, RJ: UFRJ, 2006. 163p.

SOUTO, A. M. **Análise dos conceitos de número irracional e número real em livros didáticos da Educação Básica**. 2010. 106f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

7. Anexo:

Questionário:

1) O que são números irracionais? Fale sobre eles.
2) Dê exemplos de números irracionais.
3) Explique por quê os números que você citou no item 2 são irracionais.
4) Dentre os conjuntos dos números racionais e irracionais, qual você acha que é maior? Por que?
5) Quais desses conjuntos são finitos e quais são infinitos?