

ATIVIDADE PRÁTICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE TÓPICOS DE TRIGONOMETRIA PLANA

Guilherme de Lima de Menezes
UFRGS
glmguilima2255@gmail.com

Andrei Luft Diniz
UFRGS
diniz.andrei@hotmail.com

Camila Peres Noguez
UFRGS
camilapnoguez@gmail.com

Jordana Donelli Stremel
UFRGS
jo_donelli@yahoo.com.br

Natali Brandt
UFRGS
natalibrandt@hotmail.com

Resumo:

O presente minicurso, elaborado por alunos bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PIBID-UFRGS), consiste do estudo de um conjunto de atividades a serem desenvolvidas com professores e licenciandos de cursos de Licenciatura em Matemática, com duração de 3h e 30 min. O curso tem como objetivo o ensino e a aprendizagem de tópicos de trigonometria plana através da visualização e manipulação de objetos. Entre as referidas atividades incluem-se: a construção do círculo trigonométrico, por meio de régua e compasso; a construção de teodolitos com a utilização de transferidor, isopor, cola, canudos e potes; e a determinação da altura de árvores, paredes da sala de aula ou postes, por meio de fita métrica e teodolito e da utilização das relações métricas seno, cosseno e tangente.

Palavras-chave: trigonometria; atividade; materiais manipulativos.

1. Introdução

As atividades apresentadas neste trabalho constituem parte das ações desenvolvidas no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), cujos recursos são provenientes da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Este programa também conta com a cooperação da Secretaria de Educação do Estado do Rio Grande do Sul. Estas ações são desenvolvidas pelo grupo de bolsistas PIBID, formado por alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática da UFRGS.

O presente minicurso está direcionado para professores e licenciandos de cursos de Licenciatura em Matemática. Consideramos com Mendes e colegas (2009) que, a partir do desenvolvimento de uma forma dinâmica de ensino, com a inclusão de materiais manipulativos para o estudo do conteúdo, o professor poderá conseguir maior envolvimento dos alunos com as atividades.

Uma das melhores maneiras de se aprender matemática, na sala de aula hoje, é através de um ensino mais prático e dinâmico por parte do professor e dos estudantes, de modo que ambos lancem mão das brincadeiras, das atividades práticas e experimentos. (p. 108).

A partir do objetivo de conseguir melhor entendimento do conteúdo estudado por meio de materiais manipulativos, o presente trabalho apresenta alternativas para que isso ocorra em sala de aula. Primeiramente, serão abordadas partes da história da trigonometria, para que haja uma contextualização do assunto trabalhado. Posteriormente, serão apresentadas aos participantes as atividades práticas, as quais deverão ser executadas por eles.

2. Trigonometria

Os estudos de trigonometria se desenvolveram na Grécia Antiga: estudo dos triângulos e seus elementos (ângulos e lados). Do grego: tri (três) + gono (ângulo) + *metrien* (medida). Dentre diversos tópicos, a trigonometria plana trata de relações entre lados e ângulos em triângulos, além das relações de seno e cosseno em um círculo, denominado círculo trigonométrico. Esses conceitos são de suma importância para diversas áreas, tais como Geodésia, Cartografia, Navegação, Transmissões de rádios e satélites, bem como para o cálculo da trajetória de mísseis e outros objetos e a determinação de alturas, segundo o professor Porto da Silveira¹.

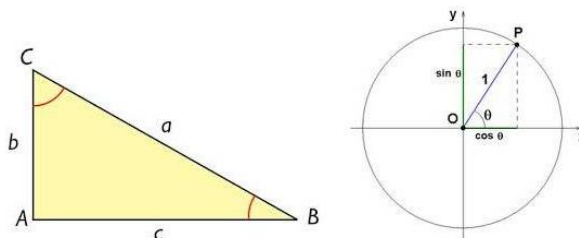


Figura 1: Trigonometria no Triângulo Retângulo e Trigonometria no Círculo. Fonte: <http://trigonometria3308.blogspot.com.br/2010/08/historia-de-la-trigonometria.html> e http://pt.wikipedia.org/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o_trigonom%C3%A9trica.

¹ Disponível em <<http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa2a.html>>. Acesso em: 01 fev. 2013.

Dentre os assuntos abordados em sala de aula, no ensino médio, a trigonometria plana engloba: as relações no triângulo retângulo, relações métricas, semelhança de triângulos, seno, cosseno e tangente de um arco, transformações trigonométricas, medidas de arcos, funções trigonométricas, entre outros. A trigonometria escolar, desde o início dos seus estudos, é embasada no triângulo retângulo, por isso é importante estudar suas características, seus elementos, e as relações entre estes nesse tipo de triângulo. As relações métricas surgem da aplicação do teorema de Pitágoras em dois triângulos retângulos semelhantes.

3. Organização do minicurso

O minicurso será dividido em duas partes. Na primeira parte, serão abordados conceitos de trigonometria plana e aplicações práticas da mesma no cotidiano das pessoas, em um período de 45 minutos. Entre os tópicos escolhidos pelo grupo estão: círculo trigonométrico e a relação fundamental da trigonometria (construção 1), relações no triângulo retângulo, semelhanças de triângulos e proporcionalidade (construções 2 e 3). Utilizando o *Power point*, apresentaremos aos participantes os nossos objetivos e a relevância em aplicar essas atividades em sala de aula.

Na segunda parte, professores e estudantes presentes no minicurso realizarão atividades envolvendo o conteúdo abordado; serão propostos exercícios práticos e a construção de materiais manipulativos. Primeiramente, os participantes irão trabalhar, durante cerca de 35 minutos, na elaboração de um círculo trigonométrico com o emprego de régua e compasso. Concluída esta etapa, será montado um teodolito artesanal, com a utilização de transferidor, barbante, canudinho, percevejo e fita adesiva – duração de 50 minutos. Por fim, os participantes serão convidados a relacionar os conceitos de semelhança de triângulos e relações métricas para determinar alturas de paredes, árvores, muros ou postes, comparando os resultados obtidos por meio das relações de semelhança com os resultados obtidos com o teodolito – duração de 50 minutos.

4. Atividades

Todas as atividades a seguir têm como público alvo alunos do Ensino Médio.

4.1. Construção do círculo trigonométrico

Esta atividade necessita dos seguintes materiais: régua, compasso, transferidor, barbante, percevejo, papel cartolina, lápis e material para colorir.

A seguir, enunciaremos os passos para a construção do círculo trigonométrico.

- Com o lápis, régua e compasso traçam-se duas retas perpendiculares em uma folha de papel cartolina (uma representa o eixo x e a outra representa o eixo y).
- Conforme a trigonometria, por definição, o raio do círculo trigonométrico mede uma unidade de comprimento. Tomando como unidade de comprimento a medida de 10 cm, o raio do círculo trigonométrico terá 10 cm de comprimento. Então, marcamos 10 cm nas abscissas e 10 cm nas ordenadas, determinando assim o raio do círculo trigonométrico.
- Com o compasso, traçamos a circunferência de raio 10 cm, colocando a ponta seca no ponto (0,0) e passando a ponta com grafite pelo ponto (0,1).
- Agora, utilizando o transferidor, marcamos os ângulos mais importantes, fazendo a conversão em radianos. Para isso basta fazer uma regra de três simples, considerando que π corresponde a 180° . São eles: 0° , 30° , 45° e 60° . Para ângulos que não estão no primeiro quadrante, ou seja, maiores de 90° , aplicamos a redução ao primeiro quadrante para que possamos utilizar os ângulos notáveis.
- Construimos um barbante de 10 cm, que corresponde ao comprimento do raio do círculo trigonométrico.
- Com um percevejo, fazemos um furo no ponto (0,0) e prendemos uma extremidade do barbante nesse ponto.
- Com a ajuda da régua, conseguimos visualizar o comprimento em x e em y, respectivamente, o cosseno e o seno de cada ângulo; o barbante corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo. Com a régua traça-se uma perpendicular ao eixo x e uma ao eixo y, construindo o triângulo. Por fim, verificamos o comprimento do cosseno (eixo x) e do seno (eixo y) com a régua.

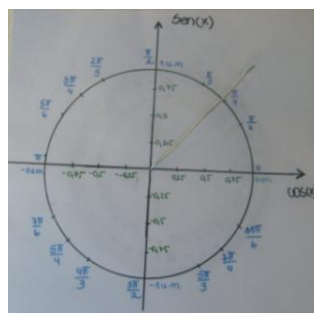


Figura 2: Círculo Trigonométrico. Fonte: Os autores

4.2. Construção do Teodolito

Para esta atividade, precisaremos de sete tipos de materiais: um pote redondo com tampa (tronco de cone com altura entre 10 cm e 15 cm e diâmetros entre 7,5 cm e 9 cm, para a base maior, e entre 4,5cm e 6cm, para a base menor. Estas dimensões referem-se ao pote sem tampa); um canudo oco em formato cilíndrico reto (15cm a 20cm de comprimento e 0,5cm de diâmetro); dois pedaços de placa de isopor grosso de 20cm x 20cm; um pedaço de arame de comprimento maior que o da base maior do pote (de 15 cm a 20 cm); um frasco de cola de isopor; 40 fotocópias de um transferidor de 360°; um rolo de fita crepe; e uma tabela das razões trigonométricas de ângulos de 1 a 89°.

Segue a montagem do teodolito

- Recorte o transferidor e cole no isopor.
- Fure a parte superior do pote (parte que vai a tampa) e coloque um pedaço de arame paralelo ao seu diâmetro, deixando sobras igualmente dos dois lados.
- Fixe o canudo paralelamente ao arame ao fundo do pote (parte fechada do pote).
- Cole a tampa do pote no meio do transferidor e encaixe o pote.
- Coloque uma das placas de isopor paralelamente ao chão. Em seguida, cole sobre essa a outra placa (a placa em que está colado o transferidor), de maneira que elas permaneçam perpendiculares entre si.

Posicione o teodolito de modo que sua base fique perpendicular ao objeto que vai ser observado e medido, por exemplo, um poste. Sugira aos alunos que mirem o ponto mais alto do objeto, por dentro do canudo, assim o arame marcará um ângulo no transferidor e a leitura desse ângulo será realizada.

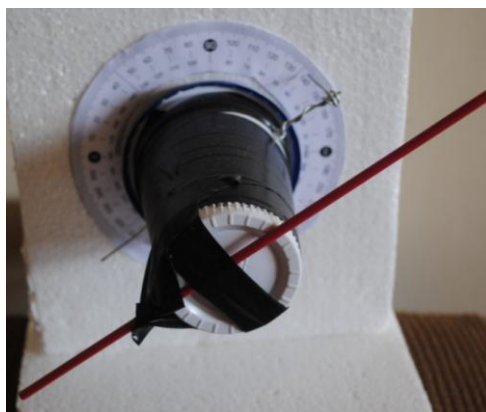


Figura 3: Teodolito Artesanal. Fonte: Os autores

4.3. Cálculo da altura de paredes, árvores ou postes.

Esta atividade consiste em medir alturas, ou seja, através de métodos matemáticos – as relações métricas e a semelhança de triângulo –, podemos estimar a altura de dado objeto. Realizaremos esta atividade de duas formas: 1) utilizando as semelhanças de triângulos e 2) utilizando o teodolito para visualizar os ângulos. Para isso precisaremos de: papel, lápis, borracha, espelho pequeno (10 cm x 10 cm), fita métrica e o teodolito.

1) Medição da altura de um objeto com a utilização de semelhança de triângulos

- Escolhe-se o objeto, cuja distância entre seu ponto mais alto e o solo deve ser medida. Identificamos por A esse ponto.
- O observador para em um ponto onde, com a ajuda de uma colega ele consiga ver o ponto A através do espelho, para isso seu colega ajuda-o movimentando o espelho, e ele também se movimenta até que consiga ver o ponto A. Identificamos por E o ponto em que o observador está parado e enxergando o ponto A através do espelho, colocando-se perpendicularmente ao solo, por fim é identificado por C o ponto em que o espelho ficou localizado.
- Marca-se a projeção ortogonal do ponto A sobre o solo, identificada por B. Observamos que é a distância AB que desejamos medir.
- Mede-se a distância dessa projeção ortogonal ao espelho: BC, a distância dos pés do observador ao espelho: EC, e a altura dos olhos do observador: DE – o ponto D indica a posição dos olhos do espectador.
- Teremos dois triângulos semelhantes: o triângulo retângulo CDE, formado pela altura DE, a distância EC, e a hipotenusa correspondente CD; e o triângulo ABC, formado pela altura AB, a distância BC, e hipotenusa correspondente AC.
- Basta aplicar a semelhança de triângulos: $\frac{BC}{AB} = \frac{CE}{DE}$, pois os triângulos são semelhantes: os ângulos \hat{ABC} e \hat{CED} são retos e os ângulos \hat{ACB} (ângulo complementar ao ângulo refletido) e \hat{DCE} (ângulo complementar ao ângulo de incidência) são congruentes entre si (conforme a segunda lei da reflexão da luz, o ângulo refletido é igual ao ângulo de incidência, devido à

propagação retilínea da luz. Logo seus complementares também são iguais.)².

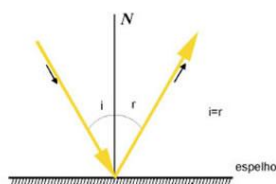


Figura 4: Leis da Reflexão. Fonte: <http://www.infoescola.com/fisica/leis-da-reflexao/>.

. Como os ângulos \hat{ACB} e \hat{CAB} e os ângulos \hat{CDE} e \hat{DCE} são, dois a dois, complementares, segue que os triângulos ACB e CDE são semelhantes.



Figura 5: Medindo alturas com o auxílio da semelhança de triângulos. Fonte: os autores

2) Medição da altura de um poste com a utilização de um teodolito

- Escolhe-se um objeto, cuja distância do ponto mais alto do objeto em relação ao solo deve ser medida, e identificamos como AD.
- Sugere-se que o observador se posicione em um ponto de 5m a 20m do objeto.
- Com o teodolito o observador verifica o ângulo medido, ângulo este que é oposto à distância AB.
- O colega mede a distância CD, do observador ao objeto.
- Utilizando a tangente do ângulo medido, calculamos a altura do poste, no entanto temos que adicionar a distância entre o teodolito e o chão, caso ele esteja fixado em outra base se não o chão, ou seja, $AD = AB + BD$ onde BD é a distância do

$$\text{teodolito ao chão: } \tan \alpha = \frac{AB}{CB}.$$

² Disponível em: <<http://www.infoescola.com/fisica/leis-da-reflexao/>>. Acesso em: 20 fev. 2013.

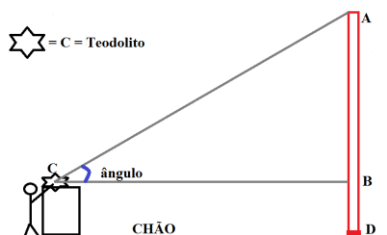


Figura 6: Medindo altura com auxílio do teodolito. Fonte: autores.

5. Considerações finais

Nosso objetivo com este minicurso é mostrar uma possibilidade de incluir aspectos históricos em sala de aula, bem como utilizar-se deles para a elaboração de atividades que envolvam a trigonometria, de modo que o ensino se torne dinâmico e produtivo tanto para o aluno quanto para o professor. Através de materiais manipulativos e com atividades planejadas para os níveis de ensino adequado, a trigonometria e a matemática, em geral, podem ser vistas em termos de algumas de suas aplicações por parte dos alunos. Elaborando materiais concretos e situações-problema, os estudantes estarão mais aptos a exercer sua capacidade de raciocinar, ampliando o seu domínio cognitivo sobre determinado assunto. Segundo Mendes e colegas (2009) e Freire (1996) consideramos como uma tarefa fundamental dos educadores estimularem os alunos ao raciocínio e à aprendizagem dos mais diversos conteúdos selecionados, bem como criar possibilidades para a construção do raciocínio dos alunos.

6. Agradecimentos

Agradecemos ao subprojeto da área da Matemática do PIBID – UFRGS, à CAPES, aos professores orientadores Marcus Basso, Francisco Egger Moellwald, aos demais professores Colaboradores e aos Coordenadores do PIBID da Matemática: Andréia Dalcin.

7. Referências

- FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.
- LIRA, J. C. L. **Leis da Reflexão**. Disponível em: <<http://www.infoescola.com/fisica/leis-da-reflexao/>>. Acesso em: 20 de fev. 2013.
- MENDES, I. A. Atividades históricas para o ensino da trigonometria. In: BRITO, A. J.; CARVALHO, D. L.; MENDES, I. A.; MIGUEL, A. **História da Matemática em Atividades Didáticas**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. p. 107-178.
- SILVEIRA, J. F. P. **Matemática Determinista no Ensino Médio**. Disponível em: <<http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa2a.html>>. Acesso em: 01 fev. 2013.