O ENSINO DE GEOMETRIA MÉTRICA ESPACIAL PAUTADO NA ARTICULAÇÃO ENTRE OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Maria Auxiliadora Lage
Faculdade de Ciências Administrativas e Contábeis de Itabira – FACCI
Colégio Nossa Senhora das Dores – CNSD
OBMEP-IMPA
IMPACTO Pré-Vestibular
auxiliadoralage@gmail.com

Daniele Cristina Gonçalves
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP
Sistema de Educação Profissional – SEPRO
OBMEP-IMPA
daniele.goncalves@yahoo.com.br

Resumo
A presente pesquisa apresenta a análise de uma proposta para o ensino de Geometria Métrica Espacial, realizada com alunos da 2ª série do Ensino Médio. O referencial teórico-bibliográfico foi estruturado segundo a teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval, destacando a importância do trabalho com materiais concretos manipuláveis e recursos tecnológicos, como forma de contribuir para a aprendizagem em Matemática. O objetivo foi identificar as dificuldades dos alunos na articulação entre as representações da linguagem natural, do registro figural e do registro simbólico na Geometria Métrica Espacial. A pesquisa envolveu a elaboração e análise de uma proposta de ensino que contemplasse os aspectos destacados em nosso referencial. Os resultados indicam que o trabalho envolvendo manipulação de materiais concretos e recursos tecnológicos contribuiu para a visualização e tratamento dos objetos geométricos, mas ainda deixaram lacunas em relação à articulação entre registros da língua natural, dos registros figurais e simbólico.

Palavras Chave: Geometria Métrica Espacial; Material Concreto Manipulável; Tecnologias; Registros de Representação Semiótica.

1. Introdução

Os Parâmetros Curriculares Nacionais enfatizam que os conceitos geométricos compõem uma parte importante do currículo de Matemática, pois “por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (BRASIL, 1998, p.51). O documento recomenda ainda que:

> Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas. [...] No entanto, o ensino das propriedades métricas envolvendo cálculos de distâncias, áreas e volumes é apenas uma parte do trabalho a ser desenvolvido que não pode ignorar as relações geométricas em si (BRASIL, 2002, p.123).

Incorporando ao estudo de Geometria Métrica Espacial a teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003), a utilização de materiais concretos manipuláveis e a utilização de recursos tecnológicos, temos ferramentas poderosas para a compreensão das propriedades e relações geométricas.

2. Uma breve revisão teórico-bibliográfica

Os objetos matemáticos podem ser representados de diversas maneiras ou diferentes sistemas de representação, denominado por Duval (1995, 2003) como registro semiótico que cumpre com o papel de comunicação do pensamento. Para este autor a maneira de raciocinar matematicamente e de visualizar um objeto matemático está intimamente ligada à utilização das representações semióticas.

Duval (2003, p. 30) destaca que a "característica mais importante da atividade matemática é a diversidade de registros de representação semiótica que ela mobiliza obrigatoriamente" que cumprem com o papel de comunicação do pensamento. Para esse pesquisador, o objetivo do ensino de matemática é "contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de análise, raciocínio e visualização" (DUVAL, 2006, p. 105).

Segundo Machado (2003), toda comunicação em Matemática se estabelece a partir das representações semióticas. No entanto, Duval (1995) chama a atenção para o fato de que pode haver uma grande discrepância entre as representações mentais, alvo de um objeto, e as representações semióticas. Isso ocorre porque as representações mentais são ideias, crenças e aparências que refletem um conhecimento, mas também pode haver uma estreita relação com as representações semióticas, uma vez que a representação mental é a interiorização da representação semiótica.

A atividade matemática demanda quatro tipos distintos de registros: a linguagem natural, relacionada às associações verbais ou conceituais com argumentações a partir de observações ou crenças e deduções a partir de definições e teoremas; o geométrico, por meio de figuras geométricas planas ou espaciais, com apreensão operatória e não somente perceptiva, e construção com instrumentos; os sistemas de escritas, que podem ser numéricos, algébricos, simbólicos e de cálculo; e os gráficos cartesianos, que tratam das mudanças de sistema de coordenadas, interpolação e extrapolação (DUVAL, 2003).

Para Duval (2006), um dos fatores que dificultam a compreensão matemática dos alunos está relacionado à grande diversidade de representações semióticas utilizada em Matemática. Em alguns casos, como na Geometria, é necessária a utilização de pelo menos dois sistemas de representação, "uma para expressão verbal de propriedades ou para a expressão numérica de magnitude e a outra para a visualização" (DUVAL, 2006, p. 108).

Duval (2006) destaca a existência de dois tipos de transformação de representações semióticas: o tratamento e a conversão. O tratamento ocorre quando é feita uma transformação de representação dentro de um mesmo registro, como, por exemplo, a representação de um número na forma decimal ou fracionária. Já a conversão, envolve a mudança de registro conservando os mesmos objetos, como acontece ao passarmos de uma linguagem algébrica para a representação geométrica e vice-versa, da linguagem natural para a representação geométrica e vice-versa ou ainda da linguagem natural para a forma algébrica.

Duval (1995, 2003) adverte que a conversão de representações semióticas é a atividade cognitiva mais difícil de ser adquirida para grande parte dos estudantes, pois, muitas vezes, o aluno não reconhece o mesmo objeto matemático nas diferentes representações semióticas. É essa não compreensão da coordenação entre os diferentes registros que muitas vezes provocam as dificuldades de aprendizagem na matemática.

Quando o conhecimento está relacionado com a formação e tratamento de representações que privilegiem o monorregistro (registros monofuncionais) como a linguagem simbólica, seja ela algébrica ou numérica, os gráficos, a linguagem figural, correspondente às figuras geométricas, as tabelas ou a linguagem natural, esta aquisição se torna mais fácil para o aluno. Isso não impede o desenvolvimento de alguma forma de compreensão entre os estudantes, mas limita as possibilidades de aquisição de novos conhecimentos matemáticos, além de apresentar a desvantagem de que, assim que deixamos o contexto em que a aprendizagem é feita, a maioria dos alunos são incapazes de mobilizar conhecimentos (DUVAL, 2006).

A verdadeira compreensão da matemática implica na capacidade de mudança de registros. Para Kluppel e Brandt (2012), a geometria requer um modo de processamento cognitivo independente e com características específicas, o que exige simultaneamente dois tipos de registros e a articulação entre eles: o registro em língua natural, para enunciar definições e teoremas; e o registro figural, para designar as figuras e suas propriedades.

A coordenação dos diferentes registros geralmente não ocorre espontaneamente, mas deve ser levada em conta na apropriação de cada uma dos sistemas semióticos. Duval (2003) estabelece duas orientações ao professor que pode contribuir para acentuar a compreensão de um conteúdo em matemática e promover o sucesso de suas ações:

> Primeiramente, a sequência deve ser constituída de uma série de tarefas que tratem dos dois sentidos da conversão; em segundo lugar, para cada sentido da conversão deve haver tarefas que comportem casos de congruência e casos mais ou menos complexos de não congruência (DUVAL, 2003, p.27).

A Geometria Métrica Espacial, por exemplo, lida com três tipos de registros de representação: o registro na linguagem materna, o registro figural e o registro simbólico, que pode ser numérico ou algébrico. É importante que o professor proporcione, em suas atividades, a articulação simultânea entre eles como forma de potencializar a aprendizagem dos alunos.

Nesse sentido, Duval (2003) adverte que o treinamento da conversão num sentido não garante a compreensão do processo inverso. "Passar de um registro de representação a outro não é somente mudar o modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto" (DUVAL, 2003, p. 22). A dificuldade da conversão entre as formas de representação de um objeto matemático depende do grau de incompatibilidade entre a representação de partida e a representação da chegada. As dificuldades decorrentes da inadequação da conversão ainda podem ser agravadas pela ignorância de um dos dois registros de representação. Para Duval (2003):

> Os fracassos ou bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida.

> No caso de as conversões requeridas não serem congruentes, essa dificuldades e/ou bloqueios são mais fortes (DUVAL, 2003, p. 21).

Como forma de amenizar esses bloqueios, esse autor sugere que o trabalho em sala de aula contemple tarefas de produção e tarefas de compreensão. Em uma primeira fase, ele recomenda o trabalho com a produção de outra representação na mesma forma de registro: o tratamento. Em seguida, a produção que conduza à transição para outra forma de representação: a conversão. A diversificação de registros de representação semiótica e a articulação dessas representações são essenciais para a compreensão e assimilação do conhecimento matemático. Dessa forma, é possível buscar conexões, dar significado às representações dos objetos matemáticos, proporcionar ao aluno a possibilidade de experimentação, observação, comparação e organização das suas ideias e, principalmente, permitir a comunicação e diálogo aberto entre aluno-aluno e entre aluno e professor.

As representações semióticas são fundamentais para a atividade cognitiva do pensamento e para que elas possam estabelecer um registro de representação, elas devem permitir as três atividades cognitivas essenciais: a formação, o tratamento e a conversão (DUVAL, 2003).

Portanto, é necessário que as atividades a serem propostas aos alunos sejam bem planejadas pelo professor, de modo que privilegie a diversificação das transformações a serem realizadas, e assim possam contribuir para o desenvolvimento geral das capacidades de observação, de raciocínio, de análise e de visualização.

Nesse contexto, a visualização se insere como um dos principais veículos da percepção e se torna um dos pilares na aprendizagem dos conceitos geométricos, pois assume um papel de destaque para acionar os esquemas e desenvolver estratégias na resolução dos problemas e no próprio desenvolvimento cognitivo. “Um encaminhamento nesse sentido pode ser com uso de recursos que valorizem e ressaltem os invariantes pertinentes aos conceitos, o que poderia facilitar na integração entre significados e significantes” (ALMEIDA e SANTOS, 2007, p. 9).

O material concreto também pode ser uma possibilidade, desde que se estabeleçam vínculos entre concreto e abstrato, na busca de não privilegiar ou enfatizar apenas determinados aspectos ou situações. Nesse sentido, Lorenzato (2010) ressalta a importância do material didático manipulável no ensino da matemática, principalmente no que diz respeito ao ensino de geometria. Os objetos manuseáveis permitem aos alunos utilizarem o tato e a visão. Antes de lidarem com os objetos matemáticos, os alunos precisam lidar com os objetos físicos, o "ver com as mãos" (LORENZATO, 2010, p.18). Em seguida viria o trabalho com a linguagem falada a fim de facilitar a reelaboração do que foi visto, feito e interpretado. Em outra fase, é recomendável que seja feito o registro escrito do que foi vivenciado, por meio da reprodução das figuras, os símbolos criados pelos alunos e professor. Finalmente viria a linguagem matemática, com seus símbolos e rigor próprio.

Nessa concepção, "para alcançar a abstração é preciso começar pelo concreto" (LORENZATO, 2010, p. 20). Esse autor acrescenta que o professor deve levar em consideração que o ensino de matemática deve ocorrer de forma integrada da aritmética, geometria e álgebra, o que Duval (2003) denomina coordenação entre os vários registros semióticos.

Para uma abordagem visual no ensino de Geometria Espacial, também podem ser utilizados recursos como programas computacionais que fornecem construções geométricas não estáticas, por propiciarem uma melhor identificação das invariantes, pela transformação dos elementos de uma figura geométrica de maneira rápida e articulada (ALMEIDA e SANTOS, 2007).

Todo conhecimento está associado a um conjunto de imagens mentais, cuja aquisição depende do uso intensivo de várias linguagens, e a diversificação delas pode favorecer a aprendizagem. Os *softwares* educativos dispõem de recursos em que as imagens são dotadas de movimentos e/ou representações na tela o que contribui na articulação das representações semióticas dos objetos matemáticos (PAIS, 2006).

3. Objetivos e questão de investigação

A partir das discussões apontadas anteriormente, podemos definir como objetivo dessa pesquisa, identificar as dificuldades dos alunos da 2ª série do Ensino Médio na articulação entre os diversos registros de representações semióticas, como a linguagem natural, o registro simbólico algébrico e numérico e o registro figural na Geometria Métrica Espacial.

Buscamos alcançar o objetivo proposto baseando-nos nas características da Teoria de Representações Semióticas, segundo Duval (1995, 2003 e 2006), nos aspectos relacionados à visualização, que tratam Almeida e Santos (2007), e na importância do trabalho com os materiais concretos manipuláveis e recursos tecnológicos no ensino de Matemática, de acordo com Lorenzato (2010) e Pais (2006). Para isso, nossa análise será feita a partir da resolução de questões resolvidas pelos alunos que exigiram a mudança de registro e/ou articulação simultânea de diversos registros de representação semiótica.

Nossa concepção é de que sendo realizado com esses pilares, o trabalho pode contribuir para a aprendizagem da Matemática. Nesse contexto, nossa pesquisa busca responder ao seguinte questionamento: "Quais as contribuições, para a aprendizagem de Geometria Métrica Espacial, de uma proposta baseada na utilização de materiais concretos, na visualização e na articulação entre as representações semióticas"?

4. A pesquisa

A pesquisa foi realizada em uma escola particular de uma cidade do interior de Minas Gerais, envolvendo duas turmas da 2ª série do Ensino Médio num total de 57 alunos.

Procuramos orientar nosso trabalho pela teoria de Duval (1995, 2003, 2006), Almeida e Santos (2007), Lorenzato (2010) e Pais (2006), para possibilitar aos alunos a apreensão conceitual em Geometria Métrica Espacial. Essa pesquisa contou com quatro fases.

Na primeira fase, os alunos foram envolvidos em atividades de observação e exploração de sólidos geométricos em uma lousa 3D e moldes dos sólidos geométricos, seguidos de recorte e montagem. Foi feita também a construção de esqueletos de sólidos geométricos, utilizando varetas e massa de modelar, destacando elementos como diagonais de cubo e paralelepípedo, apótema da base e apótemas laterais de pirâmides regulares.

Na segunda fase, os alunos foram conduzidos na exploração envolvendo contagem e dedução de fórmulas para determinar número de faces, arestas e vértices de um poliedro, além de recordarem fórmulas e propriedades da geometria plana já estudadas no ensino fundamental. Dedução de outras, já esquecidas pelos alunos, como área de triângulo equilátero, apótemas de polígonos regulares, que são essenciais para o estudo da Geometria Espacial.

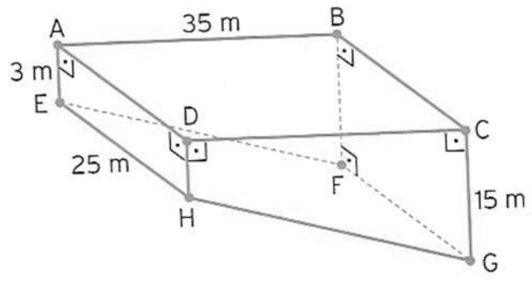
Na terceira fase, os alunos resolveram problemas individualmente e em grupo envolvendo área e volume dos sólidos geométricos. As dificuldades apresentadas durante a resolução dos problemas foram socializadas, discutidas e sanadas em sala de aula.

Na quarta fase foi realizada uma avaliação contendo dez questões sobre os sólidos geométricos estudados durante as três fases anteriores. Entre as questões propostas, duas foram escolhidas para a análise.

Questão 1 (Cefet-MG)
Calcule a quantidade de litros que comporta, aproximadamente, uma caixa-d'água cilíndrica com 2 metros de diâmetro e 70 centímetros de altura. (adote $\pi = 3{,}14$)

Essa questão busca a articulação entre o registro da linguagem natural em forma de texto para o registro simbólico algébrico, tendo como fase intermediária o registro numérico, conforme sugere Duval (2003). Trata-se de uma questão aparentemente simples, mas para resolvê-la é necessário que o aluno perceba a necessidade de converter em uma mesma unidade as medidas do raio e altura, efetuar o cálculo do volume do cilindro e, em seguida, transformar o valor do volume encontrado para a medida de capacidade em litros.

Questão 2
A figura a seguir representa uma piscina.
Qual é o volume da piscina?



Essa questão aborda a coordenação entre o registro geométrico e o registro algébrico. Para resolvê-la, o aluno pode lançar mão de diversas formas de visualização geométrica, mas é a compreensão das propriedades matemáticas que irão orientar a leitura e exploração da figura em direção à solução do problema (DUVAL, 2006). Entre as possibilidades de resolução, o aluno pode calcular o volume de um prisma de altura 25m, cuja base é um trapézio retângulo; ou ainda visualizar a piscina como a composição de dois sólidos geométricos, um paralelepípedo e um prisma triangular, ou mesmo um paralelepípedo superior de altura 3m e metade de um paralelepípedo de altura 12m. Em seguida, o aluno pode calcular o volume de cada um dos sólidos e somá-los.

Ao exigir essas habilidades, essa questão permite ao aluno ampliar suas capacidades de análise, raciocínio, visualização.

5. Descrição e análise das atividades propostas

5.1. Questão 1

Dos 57 alunos que fizeram a prova, os treze alunos que acertaram a questão 1 optaram por transformar as medidas em centímetros, e encontraram o volume em centímetros cúbicos. Para calcular a capacidade da caixa d'água, conforme solicitado, observamos diferentes estratégias de resolução. Alguns alunos fizeram inicialmente a conversão para decímetros cúbicos e em seguida para litros, como o Aluno1. Sua resolução é apresentada na figura 1:

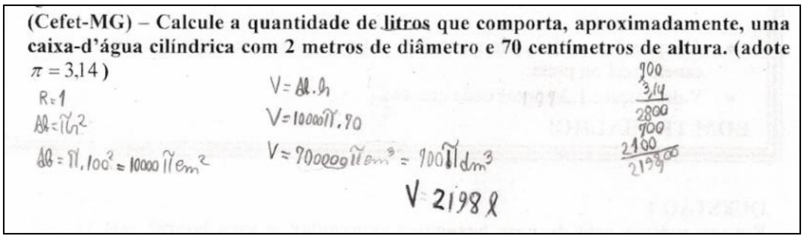


Figura 1 – Resolução de Aluno1 da questão 1

Outros alunos transformaram o volume calculado em centímetro cúbico para o mililitro e depois para litro, como o Aluno 2, cuja resolução é apresentada na figura 2:

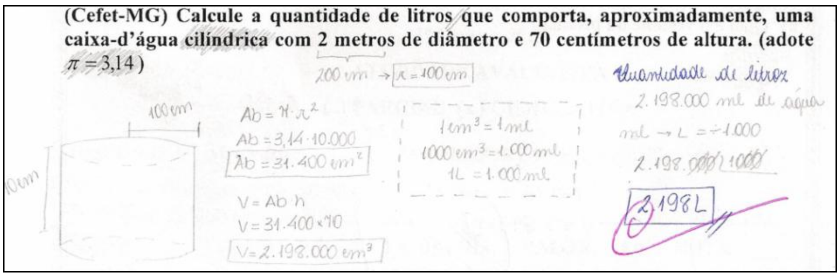


Figura 2 – Resolução do Aluno 2 da questão 1

Podemos observar na figura 2 que Aluno 2 foi capaz de realizar os tratamentos necessários, ao trabalhar com as unidades de medidas. As conversões também foram feitas: a partir da linguagem natural, ela utilizou uma representação geométrica e, em seguida, os registros algébrico e numérico para encontrar o volume da caixa d'água (DUVAL, 2003).

Dezoito alunos fizeram as devidas transformações das medidas de raio ou altura e calcularam o volume, deixando a resposta em cm^3 ou m^3, depois transformaram o resultado para litros.

Oito alunos fizeram as transformações necessárias e erraram as operações de multiplicação.

Oito alunos erraram a questão porque calcularam o volume do cilindro aplicando diretamente a fórmula do volume, sem efetuar nenhuma transformação de unidade.

Apresentamos a seguir a resolução do Aluno 3, na figura 3. Podemos perceber que ela encontrou supostamente a resposta correta em cm^3, mas não transformou sua resposta para litros, não realizando assim o tratamento necessário para responder o que se pedia na questão (DUVAL, 2003).

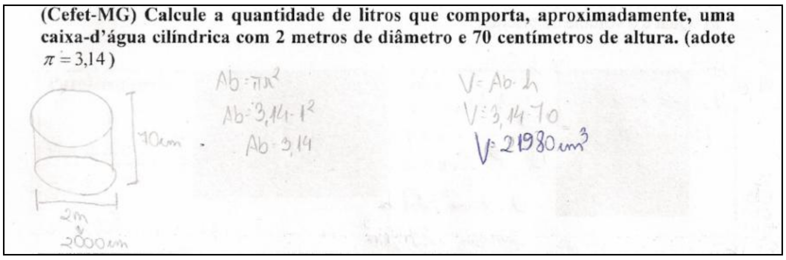


Figura 3 – Resolução do Aluno 3 da questão 1

Três alunos tentaram fazer as transformações das unidades e não conseguiram como é o caso do Aluno 4. Na resolução feita por ele, apresentada na figura 4, identificamos que, ao transformar a altura de 70 cm em metros, cometeu um erro, colocando o valor de 0,07 m, além de ter deixado seu resultado em m^3.

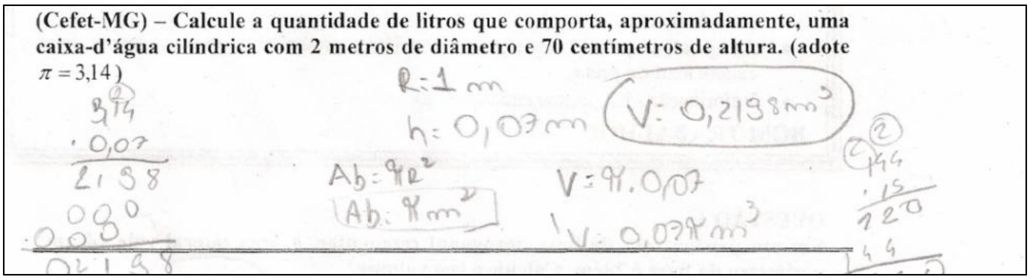


Figura 4 – Resolução do Aluno 4 da questão 1

Apenas dois alunos não fizeram distinção entre as medidas de capacidade e de superfície. A Aluna 5 fez cálculo da área lateral e o Aluno 6 calculou a área total do cilindro, deixando sua resposta em m^2, como apresentado na figura 5:

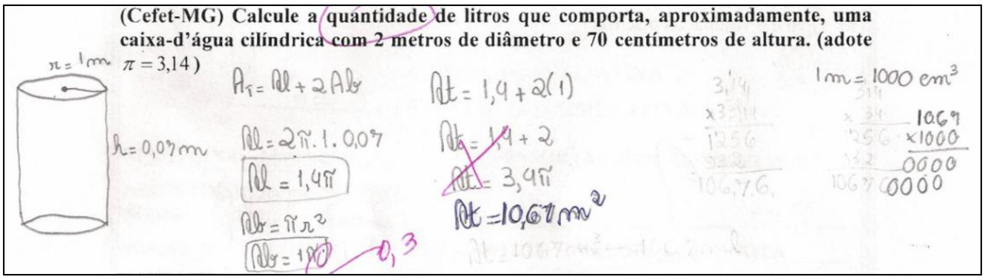


Figura 5 – Resolução do Aluno 6 da questão 1

Cabe ressaltar que nenhum aluno deixou a questão em branco.

5.2. Questão 2

Para encontrar o volume da piscina contida na questão 2, dezesseis alunos que calcularam o volume de um paralelepípedo superior de dimensões 35m, 25m e altura 3m e somaram ao volume de metade de um paralelepípedo na parte inferior, com dimensões 35m, 25m e altura 12m. Outros três alunos tentaram resolver da mesma forma, porém, erraram os cálculos. Apresentamos na figura 6 a resolução do Aluno 7, que utilizou o raciocínio como descrito acima.

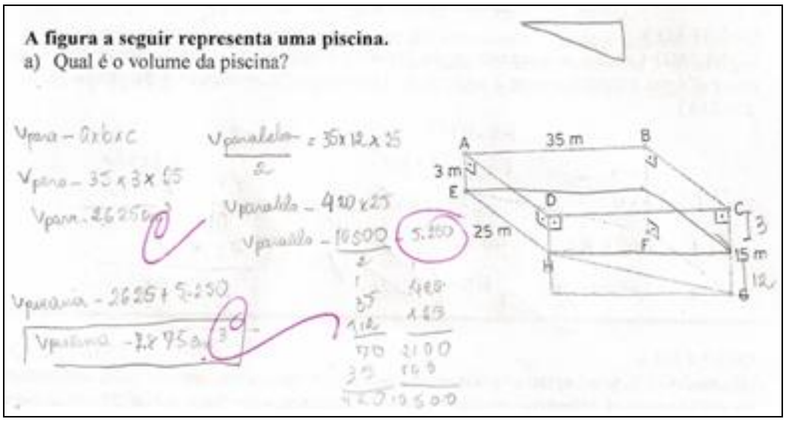


Figura 6 – Resolução do Aluno 7 da questão 2

Apenas o Aluno 8 visualizou a representação da piscina como sendo um prisma cuja base é um trapézio retângulo e altura 25 m. Entretanto, ele errou o cálculo da divisão de 630/2= 310 e, consequentemente, o volume encontrado para a piscina ficou incorreto. Sua resolução consta na figura 7:

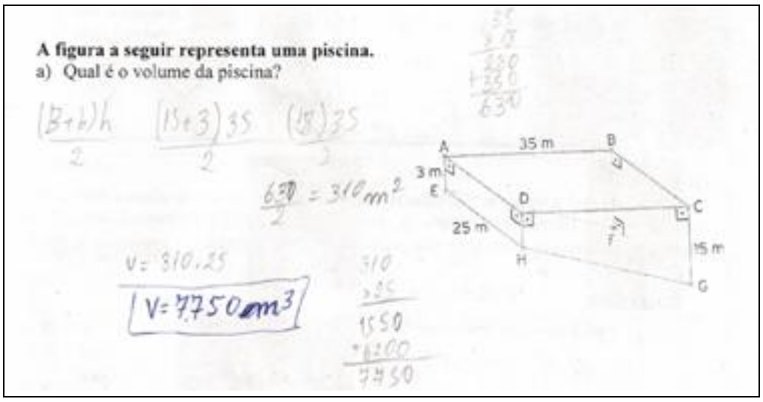


Figura 7 – Resolução do aluno 8 da questão 2

Somente dois alunos visualizaram a representação de um paralelepípedo superior de altura 3m e um prisma triangular na parte inferior, tendo como base um triângulo retângulo de catetos 35m e 12m e altura 25m. A figura 8 apresenta a resolução do Aluno 9.

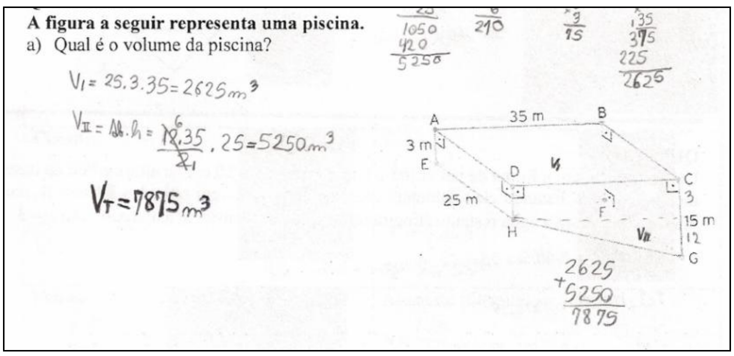


Figura 8 – Resolução do Aluno 9 da questão 2

Alguns erros foram cometidos no cálculo do volume da piscina. Entre eles destacamos o caso do Aluno 10 e outros oito colegas que calcularam o volume do paralelepípedo superior corretamente, porém, visualizaram a parte inferior como sendo uma pirâmide de base triangular. No caso do Aluno 10, cuja resolução apresentamos na figura 8, a base considerada foi um triângulo equilátero. Os demais alunos que utilizaram o mesmo raciocínio consideraram uma pirâmide com base formada por um triângulo retângulo.

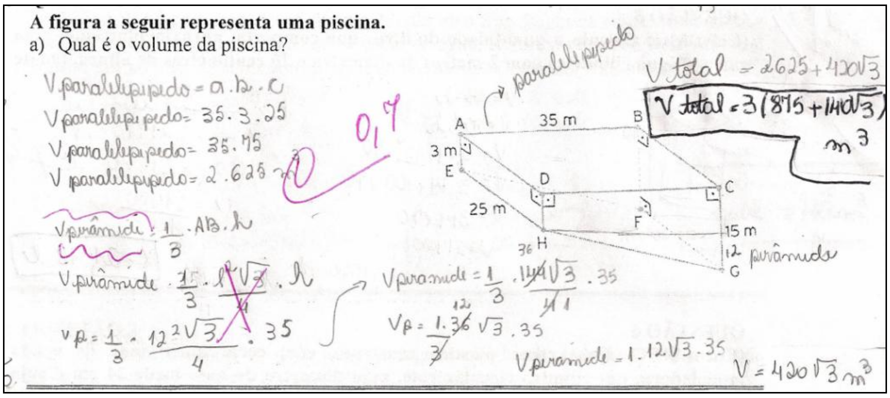


Figura 9 – Resolução do Aluno 10 da questão 2

Quatro alunos calcularam a área total, incluindo a superfície superior da piscina. Esses alunos demonstraram que ainda não adquiriram compreensão das propriedades matemáticas envolvendo os cálculos de área e volume.

Dois alunos calcularam o volume de um bloco de dimensões 35m x 25m x 15m e dividiram por dois. Vinte alunos retiraram incorretamente os dados do enunciado, como é o caso do Aluno 11. Em sua resolução, percebemos que ela considerou a representação geométrica da piscina como dois prismas de base triangular, conforme a figura 10:

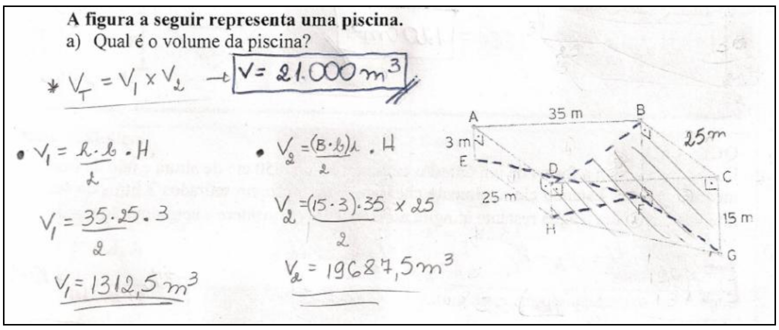


Figura 10 – Resolução do Aluno 11 da questão 2

Nessa questão, seis alunos não apresentaram nenhuma resolução.

A partir da análise das resoluções apresentadas, notamos que esta questão mobilizou uma diversidade de formas de representação (DUVAL, 2003) que foram fundamentais para a resolução correta ou não da questão proposta. Os alunos que possuem boa compreensão conceitual foram capazes de observar "as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto" (DUVAL, 2003, p. 22) e apresentaram uma resolução satisfatória.

Ao analisarmos as resoluções dos alunos que apresentaram a solução incorreta de alguma das questões, podemos perceber uma falha em relação à expressão de propriedades, na expressão numérica de magnitude e também na visualização (DUVAL, 2006).

6. Resultados da Pesquisa

O presente estudo apresentou a importância da teoria das representações semióticas de acordo com Raymond Duval, da utilização de materiais concretos e de recursos tecnológicos no ensino da Geometria Espacial.

Percebemos que ao longo das três fases iniciais, os alunos desenvolveram a capacidade de visualização dos sólidos geométricos e também desenvolveram argumentações baseadas nas propriedades envolvidas e dos aspectos diferentes de um mesmo objeto, tanto na geometria plana quanto na Geometria Espacial.

Os resultados do estudo indicam que o trabalho baseado em uma proposta de ensino envolvendo manipulação de materiais concretos e utilização de recursos tecnológicos, contemplando a revisão de conteúdos relativos à geometria plana, dedução de fórmulas e resolução de exercícios, contribuíram de alguma forma com a visualização. No entanto, identificamos que, ainda assim, ficaram algumas lacunas em relação à articulação entre os registros da língua natural, figurais e simbólico, tanto numéricos quanto algébricos, uma vez que um número considerável de alunos apresentaram dificuldades em articular dois ou mais registros de representação semiótica.

Ressaltamos a necessidade de um trabalho mais acentuado em relação à composição de sólidos envolvendo planos inclinados com o intuito de contribuir para o processo de visualização e articulação dos registros semióticos dos sólidos mais complexos. Além disso, destacamos a importância de se trabalhar com a diversidade de registros de representação que possui um objeto matemático e a articulação entre eles para que o aluno compreenda e realize os diferentes processos cognitivos requeridos pela Matemática. Para que isso ocorra, é importante que o professor proponha atividades que atendam às sugestões de Duval (2003), de modo a incluir tarefas que tratem dos dois sentidos de conversão.

Esse estudo aponta para a necessidade de outras investigações tendo como referência a Teoria de Representações Semióticas, segundo Raymond Duval, envolvendo outros campos da Matemática, dentre os quais destacamos a álgebra, probabilidade, a geometria plana e trigonometria.

7. Referências

ALMEIDA, I. A. C.; SANTOS, M. C. **A visualização como fator de ruptura nos conceitos geométricos.** Curitiba: GRAPHICA, 2007.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. PCN + Ensino Médio. Brasília: MEC, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf> Acesso em: 31 de jan de 2013.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine.** Berne: Peter Lang, 1995. Disponível em <http://tecfa.unige.ch/staf/staf-g/filliet/staf21/texte.html> Acesso em: 31 de jan de 2013.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A (Org.). **Aprendizagem matemática:** Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p. 11-33.

DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. In: **Educational Studies in Mathematics**. Springer, 2006, p. 103-131.

KLUPPEL, G. T.; BRANDT C. F. **Reflexões sobre o ensino da geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval.** IX ANPEDSUL, 2012.

LORENZATO, S. **Para aprender Matemática.** Campinas: Autores Associados, 2010.

MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem Matemática**: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

PAIS, L. C. **Ensinar e aprender Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.