

## O ENSINO DE MATEMÁTICA: A INVESTIGAÇÃO E A REFLEXÃO NA AULA DE MATEMÁTICA

*Francisca Eriane Brito Marques*  
*Universidade Federal do Ceará (UFC)*  
*erianebrito@yahoo.com.br*

### **Resumo:**

Este trabalho tem por objetivo verificar as contribuições que a investigação matemática pode trazer no processo de aprendizagem, contemplando professores e alunos. Para isto foi realizada uma oficina com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública. A atividade foi concretizada em um momento de 120 minutos, através de uma aula expositiva e dinâmica, com a utilização de material concreto, aparelho projetor de imagens e material impresso contendo tabelas. O tema central da atividade foram os Poliedros, em suas diversas formas, e através de uma observação, investigação e reflexão, os alunos, com a mediação do professor, chegariam a Relação de Euler. Com isto, obtivemos resultados significativos a respeito do contributo da utilização desta metodologia no ensino.

**Palavras-chave:** investigação; relação de Euler; aprendizagem.

### **1. Introdução**

O ensino e a aprendizagem da Matemática estão passando por um grande processo de renovação, não apenas de conteúdos, mas principalmente de objetivos e de metodologias. Tanto é que, nos últimos anos, o número de *softwares*, objetos educacionais, entre outros, presentes nos sites que chamamos “*depositórios*” como o *BIOE* (Banco Internacional de Objetos Educacionais) e o *Portal do Professor*, em grande parte são materiais matemáticos. Além de inúmeros cursos de capacitação do professor, envolvendo as diversas formas de mídia, internet, redes sociais, etc. E toda esta movimentação dar-se a esta mudança.

A aprendizagem hoje não é vista mais como a simples transmissão e recepção de informações, onde o professor expõe todo o conteúdo e o aluno apenas escuta e o reproduz, mas sim como um processo de construção de conhecimentos, através da estimulação da investigação e participação dos alunos.

Se quisermos a concretização de uma educação inovadora, precisamos conceber a matemática em sala de aula como um processo de construção, em que o aluno percorre o caminho por meios próprios, pelas suas próprias conclusões, com tentativas e erros, com uma orientação e não com uma instrução imposta e absoluta. Um ensino em que esta disciplina é vista relacionando-a ao mundo real, com aplicações em situações do cotidiano, tornando o conteúdo significativo, sendo uma disciplina não como algo abstrato e sem utilidade.

Se o professor quer tornar os conhecimentos adquiridos em sala de aula significativos, ele então vai trabalhar com o cotidiano do estudante, ser capaz de relacionar os conteúdos com a prática, mostrar que tudo tem um sentido real, tudo isso é um grande

passo na busca de melhorias da prática pedagógica. E o professor que se mostra disposto a agir consciente destas necessidades, prova que realmente sabe o valor de se buscar um ensino com qualidade, capaz de preparar cidadãos críticos e com espírito de reflexão e investigação.

Se o professor tenta oferecer o ensino da matemática de forma dinâmica, atrativa e criativa, tem em mãos uma arma valiosa para desenvolver no aluno o pensamento crítico, a confiança em seu potencial mental e raciocínio lógico e o hábito de utilizar as suas competências com autonomia, senso de investigação e criação.

## **2. Investigações matemáticas**

Já há bastante tempo, a Matemática vem sendo encarada como uma ciência exata, pura, rígida, uma verdade absoluta. No entanto, sabemos que é necessário considerar a prática, e é importante analisar a Matemática numa perspectiva dinâmica, procurando compreender a forma como ela é construída e como evolui. Assim, a construção dos conceitos se dá pela investigação, tornando o estudo mais simples e real.

## **3. A contribuição do método de investigação dos problemas em matemática**

Os problemas são de fundamental importância na construção dos conceitos, pois desempenham na evolução da Matemática o papel da investigação. E cabe aí a figura do professor de Matemática, personagem importantíssimo para instigar, alimentar a curiosidade, orientar e apoiar seus alunos, a fim de garantir o sucesso, ou não, de tal iniciativa.

Assim como é indiscutível a importância dos problemas para os matemáticos, é necessário compreender também qual o seu alcance educativo. Isto é, estabelecer uma forma possível de realizar uma atividade com os alunos, que cumpra o mesmo papel da atividade do matemático, seguindo os padrões de investigação. Obviamente que os conhecimentos que o matemático possui, os processos e métodos que utiliza, o grau de especialização que atinge, o tempo e o interesse que dedica à sua atividade não se comparam com os do aluno. No entanto, a atividade de resolução de problemas, nos dois casos, pode ser equivalente quanto à sua forma natural.

A diferença do trabalho de um aluno que resolve um problema e do trabalho de invenção do matemático consiste apenas numa diferença de grau, uma diferença de nível, natural do estado atual de formação de cada um. A temática da resolução de problemas é importantíssima para compreender até que ponto é possível aproximar o trabalho do aluno na disciplina de Matemática da atividade matemática.

#### **4. Resolução de problemas e investigações**

A “*Resolução de problemas*” sempre foi muito discutida, justamente por este ser um dos principais objetivos do ensino da Matemática, pois ele proporciona nos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas matemáticos. Isto é, o pensamento matemático que os alunos devem desenvolver na escola é constituído não só por raciocínio rigoroso ou formal, mas também por processos informais, como generalizar a partir da observação de casos, argumentar indutivamente, argumentar por analogia, reconhecer ou extrair um conceito matemático de uma situação concreta, etc.

Mas o que seria o problema matemático então?

É importante diferenciar o problema em si e o processo de resolução. O problema matemático consiste em haver conscientemente uma determinada ação para obter um objetivo claro, mas não atingível de maneira imediata. Já o processo de resolução, é a realização desta ação necessária para que ocorra a solução do problema.

Este formato de problema foi sendo modificado positivamente ao longo dos anos ao observar-se que é importante apresentar aos alunos não apenas problemas já perfeitamente formulados em contextos bem precisos. Muitas vezes, o melhor processo de resolução pode estar na exploração do contexto em que o problema foi inserido. Ao trabalharmos a resolução de problemas, valorizamos todo um conjunto de processos característicos da atividade matemática como formular, testar e provar e argumentar conceitos.

Então, qual seria a diferença entre uma atividade de resolução de um problema e uma atividade de investigação?

Na resolução de problemas de matemática, o objetivo é encontrar um caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível. Já numa investigação matemática, o objetivo é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes a partir de uma dada situação. Na investigação, sabe-se qual é o ponto de partida, mas não se sabe qual será o ponto de chegada.

#### **5. Investigações matemáticas: a aula de investigação**

Em geral, uma aula com investigações segue as seguintes fases:

- introdução da tarefa;
- desenvolvimento do trabalho;
- discussão final (reflexão, debate a cerca das observações feitas);
- conclusão.






Para verificar e analisar a execução dessas etapas foi realizada uma aula com alunos do 7º ano de uma escola pública, entre 10 e 12 anos, com duração de 120 minutos onde foi

proposta aos alunos uma tarefa de investigação intitulada “*Poliedros e números: a Relação de Euler*”, e onde os alunos trabalharam em grupo.

Segue abaixo a atividade:

***Poliedros e números: a Relação de Euler***

1. A tabela abaixo mostra alguns poliedros. Analise-os e complete o que falta.

		Número de vértices (V)	Número de faces (F)	Número de arestas (A)
Bloco retangular ou paralelepípedo				
Prisma de base pentagonal				
Prisma de base triangular				
Pirâmide de base triangular				
Pirâmide de base quadrada				

2. Agora, junto aos colegas da equipe, compare, para cada poliedro do exercício anterior, a soma “ $V+F$ ” com o valor de  $A$ . O que vocês descobriram?

3. Examine novamente a tabela da questão 1, agora com mais uma coluna. Analise, e complete com o que falta, isto é, escreva a relação encontrada no exercício 2, em cada um dos poliedros.

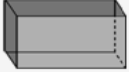




		Número de vértices (V)	Número de faces (F)	Número de arestas (A)	$V+F = A+2$
Bloco retangular ou paralelepípedo		8	6	12	
Prisma de base pentagonal		10	7	15	
Prisma de base triangular		6	5	9	
Pirâmide de base triangular		4	4	6	
Pirâmide de base quadrada		5	5	8	

Fig.1: atividade que a professora propôs aos alunos, contendo figuras de poliedros diversos e tabelas.

Na primeira fase, a de introdução da tarefa, é importante que se tenha uma maior atenção e cuidado, pois esta constitui o início de tudo e poderá influenciar decisivamente o sucesso do trabalho, principalmente se os alunos não estiverem acostumados com este tipo de atividade. Nesta fase inicial, é determinante o modo de apresentação da proposta de trabalho à turma, e o professor deve analisar bem que método pode melhor estimular seus alunos. Esta pode ser feita através da distribuição do enunciado escrito acompanhado por uma pequena apresentação oral, no intuito de deixar a atividade clara e explicitar o tipo de trabalho que se quer desenvolver com as investigações, além de criar um ambiente favorável ao desenvolvimento do trabalho dos alunos. Pode ser feita uma leitura em grande grupo, pensando principalmente em alunos mais novos, neste caso em especial, já que o 7º ano constitui uma série de alunos recém-egressos do processo de alfabetização e, portanto, com algumas dificuldades ainda de leitura. Esta leitura deve ser acompanhada por alguns comentários que o professor considere mais pertinentes, ou por algumas questões cujas respostas revelem se os alunos estão, ou não, a entender o que lhes é proposto na atividade.

Na aula mencionada no início deste tópico, a professora optou por apresentar a tarefa oralmente e por escrito, além de contar com o auxílio de um aparelho projetor de imagens e poliedros diversos construídos com palitos de churrasco e bolinhas de isopor. Como se tratavam de alunos sem experiência de trabalho de cunho investigativo e algumas dificuldades de compreensão da leitura começou por ler as questões propostas na ficha, aproveitando pra relembrar o significado de cada uma das palavras e reforçando assim as definições e conceitos (por exemplo, a definição de poliedros, arestas, etc.), e formulou algumas questões tais como:

- *“Qual o significado da palavra pirâmide?”*;
- *“O que é um prisma?”*;
- *“O que significa um prisma ser pentagonal?”*;

levando sempre em conta a preocupação de não dar informação a mais nem a menos.

Na fase de desenvolvimento do trabalho, o que queremos é que os alunos adquiram uma atitude investigativa, devendo por isso haver a preocupação em centrar a aula na atividade dos alunos, nas suas ideias e na sua pesquisa. Durante esta fase, o professor de matemática tem um papel importantíssimo, o de orientar a atividade. O sucesso e todo o decorrer da aula dependem, em grande parte, da forma como ela incentiva os alunos, conduz os questionamentos, do tipo de apoio que presta no desenvolvimento das investigações. Nunca temos como saber como a turma vai se comportar ou reagir diante deste tipo de atividade, então haverá situações em que o professor vai ter que intervir e por isso deve estar preparado para reagir, encontrar a melhor forma de orientar os alunos, pois a forma como o professor vai intervir é que será responsável pelo desenvolvimento nos alunos de um conjunto de capacidades e atitudes essenciais. Ao longo de toda esta fase é

importante que o professor não der respostas aos alunos diante das perguntas e dúvidas que eles venham a ter, e sim deve assumir uma postura questionadora e envolvente que conduza os alunos a refletir sobre o tema, levando-os a encontrar a resposta solicitada. A expressão “*Porquê?*” deve ser sempre uma resposta aos comentários e soluções apresentadas pelos alunos, de modo a provocar o raciocínio, a incentiva-los a questionar, levando-os a analisar e refletir sobre o seu trabalho e a procurar não só soluções, mas também a encontrar o significado para as suas descobertas.

Durante a realização do trabalho, os alunos podem apresentar várias dificuldades que os impedem de realizar as suas investigações. Geralmente, quando estão pouco habituados ao trabalho de natureza investigativa, chamam rapidamente o professor, dizendo que não sabem o que é para fazer, pois percebem que não enxergam nenhuma resposta imediata. Isto acontece porque não compreendem a natureza da tarefa proposta, e então deve o professor explicar-lhes um pouco do que é o trabalho investigativo e concretizar isso através de um ou outro exemplo, ligado ao cotidiano, que os faça relacionar e então compreender o que realmente se quer com a atividade.

O processo investigativo, em que os alunos se envolvem durante a fase de desenvolvimento da tarefa, por sua vez, compreende diversas etapas fundamentais:

1. Tentam compreender a situação proposta;
2. Organizam os dados;
3. Formulam questões;
4. Fazem conjecturas;
5. Testam as conjecturas;
6. Tentam justificá-las, demonstrá-las.

No caso dos alunos mostrarem dificuldades em organizar os dados e em formular questões, e sendo isto determinante para o prosseguimento e sucesso da investigação, o professor deve apoiá-los. Para levá-los a descobrir o que têm que ser feito, o professor deve fazer questionamentos mais ou menos indiretos de acordo com o que os alunos demonstram entender, de acordo com seu grau de familiaridade com este tipo de tarefas. A exemplo, o professor pode fazer questionamentos relativas àquilo que eles já fizeram, dizer para analisarem atentamente um conjunto de dados já obtidos, sugerir a organização desses mesmos dados de outra maneira, etc. Na atividade proposta pela professora do no nosso estudo de caso, “*Poliedros e números: a Relação de Euler*”, depois de desafiar os alunos a observarem os poliedros, tanto os impressos quanto os concretos, e preencherem a tabela sugerida no exercício 1, foi pedido que os alunos observassem atentamente e fizessem suposições quanto uma possível relação entre os dados anotados. Os alunos então começavam por não perceber bem o que era pedido e deram algumas respostas sem sentido, ou simplesmente nada respondiam. A professora tentou então ajudá-los do

seguinte modo: disse para lerem novamente a proposta de trabalho e perguntou diretamente o que era pedido na atividade, tentou fazer com que percebessem que eles é que tinham de fazer descobertas observando com atenção os resultados que tinham observado, coletado e obtido, sempre indagando: “*O que parece que vai acontecer? Será que é mesmo assim? Por quê?*” Passado algum tempo, começaram a perceber o que estava sendo lhes pedido, a se empolgarem com a atividade e a formular respostas pertinentes sobre a possível relação entre os números que haviam observado.

Durante o trabalho investigativo, muitos alunos podem seguir numa linha em que não obterão sucesso, nesta situação, o professor deve evitar dizer imediatamente que o método utilizado está errado, mas deve permitir que o aluno erre e perceba onde o erro foi cometido, e mais, deve então incentivar o aluno a achar a solução para o erro cometido. No entanto, tem de ter cuidado para que essa exploração mal conduzida não se prolongue demasiadamente e não acabe por gerar desmotivação e desinteresse nos alunos. Assim, algumas vezes o professor deve dar pistas mais diretas e próximas da solução, mas sempre questionando e orientando o aluno através de situações problemas já conhecidas, etc.

Durante a fase de discussão o professor, deve estimular os alunos não só a apresentarem suas conclusões, mas principalmente a discuti-las, para que haja interação na sala de aula e principalmente para que os alunos aprendam a argumentar bem, através de uma comunicação amistosa e enriquecedora. Nesta fase os alunos são confrontados com hipóteses, estratégias e justificações diferentes das que tinham pensado, seja pelos demais alunos, ou pelo próprio professor. Os alunos, então, são estimulados a explicitar as suas ideias, a argumentar em defesa das suas afirmações e a questionar os colegas.

Ao organizar a fase de discussão o professor deve conhecer bem o trabalho dos alunos de modo a valorizar tanto as descobertas mais interessantes como as mais simples, para que não haja desmotivação por parte de nenhum dos alunos. O momento para fazer esta discussão pode variar de acordo com a reação dos alunos, o ideal é fazê-la logo após a exploração da tarefa, mas muitas vezes isso não é possível devido ao horário da aula, e o tempo que os alunos levam no desenvolvimento. O que ocorreu em nosso estudo de caso, foi que nos primeiros cinquenta minutos a professora fez a introdução e desenvolvimento, nos próximos cinquenta fez a discussão, e nos últimos vinte fez o fechamento, isto é, a conclusão. O que me pareceu bem proveitoso, pois a atividade tendo todas as etapas executada em um mesmo momento, ganha maior interesse e entusiasmo, diferente de quando a atividade é realizada em momentos diferentes, pois dificulta o arranque da discussão final, já que os alunos provavelmente não vão mais lembrar tão bem daquilo que fizeram e, de uma maneira geral, os registros escritos não são suficiente para desencadear o raciocínio novamente. Na fase da discussão da aula apresentada anteriormente, a professora não deixou a discussão apenas para o final da atividade, na verdade, ao final de cada uma das questões ela conduziu uma pequena discussão sempre relacionando o que se

pedia na questão atual com a que seria feita logo em seguida, e assim no final de toda a atividade ela conduziu uma discussão maior, abrangendo todas as questões e então o que seria a conclusão final da atividade. No início da discussão, os alunos não estavam muito atentos ao que os colegas diziam, até mesmo porque tinha a preocupação no que eles mesmos iriam dizer, mas esta situação foi melhorando no decorrer da discussão e, pouco a pouco os grupos foram se manifestando mais, não só apresentando suas conclusões, mas também interferindo e questionando as conclusões dos colegas, tornando assim a discussão proveitosa e enriquecedora.

Esta discussão final é também uma importante situação para a interação do grupo, de melhorar a forma de expor e comunicar dos alunos, além de refletir a cerca das questões propostas no trabalho, sabendo que esta é um elemento indispensável numa aula de investigação.

Por fim, a professora concluiu a atividade propondo dois problemas rápidos a serem resolvidos, discutidos e corrigidos ainda em sala de aula.

## 6. Considerações Finais

A aprendizagem não resulta simplesmente da atividade, mas sim da reflexão sobre a atividade. Deste modo, é fundamental, proporcionar aos alunos momentos onde possam pensar, questionar, procurar e refletir sobre a atividade realizada.

O método investigativo permite estabelecer conexões com outras ideias matemáticas, e pode constituir um ponto de partida para outras investigações. Esta prática está para além da matemática, está na formação dos seres, pois saber observar, organizar, analisar e argumentar é necessário para o bom desempenho em sociedade.

## 7. Referências

Luciane de Fatima Bertini e Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Cármen Lúcia Brancaglioni Passos – “ *Uso da Investigação Matemática no Processo de Ensino e Aprendizagem nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental*”

<[http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebiapem2008/upload/135-1-A-gt8\\_bertini\\_ta.pdf](http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebiapem2008/upload/135-1-A-gt8_bertini_ta.pdf)>

Joana Porfírio e Hélia Oliveira – “Uma reflexão em torno das tarefas de investigação”

<<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/textos/porfirio-oliveira.pdf>>